Eduard Čech

Nouvelles formules de la géométrie affine

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 32_1 (1923), 311-315

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500880

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Nouvelles formules de la géométrie affine.* Nota di Eduard Čech presentata dal Corrispondente G. Fubini.

1. Dans l'espace affine, où le groupe fondamental est celui des affinités unimodulaires, on a à considérer deux classes contragrédientes de vecteurs, ceux de la premiere classe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ayant comme composantes des différences de coordonnées de deux points.

Le produit vectoriel $\alpha \times \beta$ ($A \times B$) de deux vecteurs de la première (seconde classe) est un vecteur de la seconde (première) classe, le produit scalaire $\alpha . A$ de deux vecteurs de classes différentes et le déterminant $(\alpha \beta \gamma)$ ou $(A B C)$ de trois vecteurs de la même classe sont des quantités scalaires.

2. Si le point x décrit une *courbe gauche* orientée C, je fixe le facteur du vecteur (de la seconde classe) de direction du plan osculateur moyennant la condition

$$dx = \varepsilon \xi \times d\xi \, , \, \varepsilon = \pm 1 \, .$$

Le plus simple paramètre intrinsèque ou l'arc affine λ est défini à une constante additive près, par une quelconque des expressions

$$d\lambda^3 = dx \, . \, d^2 \xi = - d^2 x \, . \, d\xi = \varepsilon (\xi \, , d \xi \, , d^2 \xi) \, , d\lambda^6 = \varepsilon (dx \, , d^2 x \, , d^3 x) \, .$$

L'accent signifiant dérivation par rapport à λ, je pose

$$A = \xi'' \, , B = - \xi' \, , C = \varepsilon \xi \, , (A B C) = 1 \, ,$$
$$\alpha = B \times C \, , \beta = C \times A \, , \gamma = A \times B \, .$$

On a deux invariants k et l dont les expressions indépendantes de la variable indépendante sont

$$l \, d\lambda^6 = d^3 x \, . \, d^3 \xi \, , k \, d\lambda^8 = d\lambda^3 \left[d^3 x \, . \, d^2 \xi - \frac{1}{3} d^2 (d\lambda^3) \right] + \frac{5}{9} \left[d (d\lambda^3) \right]^2 ;$$

remarquons que l'on a aussi

$$d^3 x \, . \, d^2 \xi = - d^2 x \, . \, d^3 \xi = - \varepsilon (\xi \, , d^2 \xi \, , d^3 \xi) \, .$$

Formules analogues à celles de Frenet:

$$\alpha' = \beta \, , \beta' = k \alpha + \varepsilon \gamma \, , \gamma' = - \varepsilon l \alpha \, ,$$
$$A' = - k B + \varepsilon l C \, , B' = - A \, , C' = - \varepsilon B \, .$$

3. Considérons la *bande d'éléments de contact du seconde ordre* d'une surface non développable S le long d'une courbe non asymptotique C. Soit x le point de C, ξ le vecteur de direction du plan tangent de S. On choisit le facteur de ξ de telle manière que

$$dx \pm \sqrt{\varepsilon}\, \xi \times d\xi \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

soient les d'rections des tangentes asymptotiques de S et que $\xi \, . \, d^2 x > 0$.

Le plus simple paramètre intrinsèque ou *l'arc affine* λ de la bande sera défini par l'équation

$$d\lambda^2 = \xi \, . \, d^2 x = - d\xi \, . \, dx \, .$$

La bande possède quatre invariants P, Q, R, T dont les expressions indépendantes de la variable indépendante sont

$$\mathrm{P}\, d\lambda^3 = \frac{1}{2}(dx \, . \, d^2\xi - d^2 x \, . \, d\xi) \;,\; \mathrm{Q}\, d\lambda^6 = (dx \times d^2 x) \, . \, (d\xi \times d^2 \xi) \, ,$$

$$\mathrm{R}\, d\lambda^6 = (dx \, , d^2 x \, , d^3 x) \;,\; \mathrm{T}\, d\lambda^3 = (\xi \, , d\xi \, , d^2 \xi) \, .$$

J'introduis un trièdre mobile $(x \alpha \beta \gamma)$ en posant

$$\alpha = x' \, , \beta = x'' - \mathrm{P}x' \, , \gamma = \xi \times \xi' \, , (\alpha \, \beta \, \gamma) = 1 \, ,$$
$$\mathrm{A} = \beta \times \gamma \, , \mathrm{B} = \gamma \times \alpha \, , \mathrm{C} = \alpha \times \beta \, ,$$

les accents signifiant dérivation par rapport à λ.

Formules analogues à celles de Frenet:

$$\alpha' = \mathrm{P}\alpha + \beta \, , \beta' = -\mathrm{Q}\alpha + \mathrm{R}\gamma \, , \gamma' = \mathrm{T}\alpha - \mathrm{P}\gamma \, ,$$
$$\mathrm{A}' = -\mathrm{PA} + \mathrm{QB} - \mathrm{TC} \, , \mathrm{B}' = -\mathrm{A} \, , \mathrm{C}' = -\mathrm{RB} + \mathrm{PC} \, .$$

4. Pour déterminer intrinsèquement la *bande d'éléments de contact du troisième ordre* de S de long de C, il faut connaître encore un autre invariant N à l'aide duquel le vecteur X de la normale affine s'exprime en fonction linèaire de β et γ selon la formule

$$\mathrm{X} = \beta + \mathrm{N}\gamma \, .$$

5. Si le point x décrit une surface S non développable, u et v étant les variables indépendantes [1], on peut fixer le facteur du vecteur (de la seconde classe) ξ de direction du plan tangent moyennant l'équation

$$\xi(\xi \xi_1 \xi_2) = -\varepsilon\, x_1 \times x_2 \quad , \quad \varepsilon^2 = 1 \, ,$$

[1] Quelquefois, je pose $u = u_1 \, , v = u_2$.

l'indice i indiquant la dérivée par rapport a u_i. Le vecteur X de la normale affine est défini par les équations

$$X . \xi = 1 \ , \ X . \xi_1 = 0 \ , \ X . \xi_2 = 0 ;$$

on suppose le signe de X choisi de façon à avoir $(x_1 \, x_2 \, X) > 0$. Les deux formes différentielles de MM. Pick et Blaschke sont

$$F_2 = - dx \, . \, d\xi = \Delta_{11} \, du^2 + 2\Delta_{12} \, du \, dv + \Delta_{22} \, dv^2 ,$$
$$F_3 = \frac{1}{2} (dx \, . \, d^2\xi - d^2x \, . \, d\xi) = \Delta_{111} \, du^3 + 3\Delta_{112} \, du^2 \, dv + 3\Delta_{122} \, du \, dv^2 + \Delta_{222} \, dv^3 .$$

On pose

$$\nabla = \Delta_{11} \, \Delta_{22} - \Delta_{12}^2 .$$

Alors

$$\varepsilon = - \operatorname{sgn} \nabla \ , \ (x_1 \, x_2 \, X) = \sqrt{|\nabla|} \ , \ (\xi \, \xi_1 \, \xi_2) = - \varepsilon \sqrt{|\nabla|} \ .$$

Encore, je pose

$$\vartheta_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\nabla} \quad , \quad \vartheta_{12} = - \frac{\Delta_{12}}{\nabla} \quad , \quad \vartheta_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\nabla} \, .$$

$$J = \frac{1}{\nabla^2} \begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix} ,$$

$$H = J + \text{courbure de } F_2 .$$

J'emploie le calcul absolu. F_2 étant la forme fondamentale, je dénote par φ_i, φ_{ik} ... les dérivées covariantes successives d'un invariant φ, $c_{i_1 \ldots i_\alpha | j}$, $c_{i_1 \ldots i_\alpha | jk}$ les systèmes déduites par dérivation covariante du système covariant $c_{i_1 \ldots i_\alpha}$, et si

$$C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha} c_{i_1 \ldots i_\alpha} du_{i_1} \ldots du_{i_\alpha} ,$$

je pose

$$\delta C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha j} c_{i_1 \ldots i_\alpha | j} \, du_{i_1} \ldots du_k \, du_j \ , \ \delta^2 C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha jk} c_{i_1 \ldots i_\alpha | jk} \, du_{i_1} \ldots du_{i_\alpha} \, du_j \, du_k \, .$$

J'emploie aussi les différentielles contravariantes de M. Levi-Civita et Fubini

$$\overset{2}{\delta} u_i = \overset{2}{d} u_i + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} du_r \, du_s \ , \ \overset{3}{\delta} u_i = d \left(\overset{2}{\delta} u_i \right) + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} du_r \, \overset{2}{\delta} u_s \, .$$

Je pose

$$D_{11}=\frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(\Delta_{111/2}-\Delta_{112/1}),$$

$$D_{12}=\frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(\Delta_{112/2}-\Delta_{122/1}),\ D_{22}=\frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(\Delta_{122/2}-\Delta_{222/1}),$$

$$D_1=\frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(D_{11/2}-D_{12/1}),$$

$$D_2=\frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(D_{12/2}-D_{22/1}),\ D=\frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(D_{1\ 2}-D_{2/1}),$$

$$\vartheta=d_{11}\,du^2+2d_{12}du\,dv+d_{22}\,dv^2=\frac{\varepsilon}{\sqrt{|\nabla|}}\begin{vmatrix}D_{11}\,du+D_{12}\,dv\,, & D_{12}\,du+D_{22}\,dv\\ \Delta_{11}\,du+\Delta_{12}dv\,, & \Delta_{12}\,du+\Delta_{22}\,dv\end{vmatrix},$$

$$F_2^{(i)}=\Delta_{1i}\,du+\Delta_{2i}\,dv\ ,\ F_3^{(i)}=\Delta_{11i}\,du^2+2\Delta_{12i}\,du\,dv+\Delta_{22i}\,dv^2.\ (i=1,2).$$

Les équations fondamentales et leurs conditions d'intégrabilité (Radon) sont

$$\sum_{ik}x_{ik}\,du_i\,du_k=\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}\,x_s+F_2\,X\,,$$

$$dX=-H\,dx+\sum_{irs}\vartheta_{rs}\,d_{ir}\,du_i\,x_s\,,$$

$$\sum_{ik}\xi_{ik}\,du_i\,du_k=-\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}\,\xi_s+(\vartheta-HF_2)\,\xi\,,$$

$$H_i-\varepsilon D_i=\begin{vmatrix}\Delta_{i11} & \Delta_{i12} & \Delta_{i22}\\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22}\\ D_{11} & D_{12} & D_{22}\end{vmatrix}\ (i=1,2).$$

6. J'ai calculé l'arc affine λ et les invariants k et l d'une courbe asymptotique, ainsi que le trièdre mobile attaché à la courbe (voir nº 2).

Si $e=\operatorname{sgn}F_3$, on a

$$d\lambda^3=|F_3|,\ k=\frac{F_3^2\,\vartheta+\frac{5}{9}(\delta F_3)^2-\frac{1}{3}F_3\,\delta^2 F_3}{F_3{}^{8/3}},\ l=e\left(\frac{\delta\vartheta}{F_3}+H\right).$$

$$eA=\frac{3\vartheta}{F_3{}^{2/3}}\,\xi-\frac{\delta F_3}{F_3{}^{5/3}}\,d\xi-\frac{3\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}\,\xi_s}{F_3{}^{2/3}}\,,$$

$$eB=-\frac{d\xi}{F_3{}^{1/3}},\ eC=\varepsilon'\,\xi\,.$$

L'ε' est l'ε du n° 2, et peut être déterminé d'une quelconques des deux équations

$$F_2^{(1)} = - \varepsilon' \sqrt{|\nabla|}\, dv \quad , \quad F_2^{(2)} = \varepsilon' \sqrt{|\nabla|}\, du \, .$$

7. J'ai calculé aussi l'arc affine λ et les cinq invariants P, Q, R, T, N de la bande d élément de contact du troisième ordre le long d'une courbe non asymptotique. L'ε du n° 3 est égal à l'ε du n° 5. Si $e = \operatorname{sgn} F_2$, on a

$$d\lambda^2 = |F_2|\, , \; P = e \frac{F_3}{|F_2|^{3/2}}\, , \; T = e\,(T_s + T_g)\, , \; N = e\,\varepsilon\,(T_s - T_g)\, ,$$

$$T_g = -\,\varepsilon \frac{\sqrt{|\nabla|}}{|F_2|^{3/2}} \left(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u \right), \; T_s = \frac{1}{\sqrt{|\nabla F_2^3|}} \begin{vmatrix} F_3^{(1)} & F_3^{(2)} \\ F_2^{(1)} & F_2^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2} J = e\left(\varepsilon\, T_s^2 - P^2 \right),$$

$$Q = NT + e\left(H - \frac{\vartheta}{F_2} \right),$$

$$R = NP - \frac{dN}{d\lambda} + \frac{D_{11}\, du^2 + 2\, D_{12}\, du\, dv + D_{22}\, dv^2}{|F_2|}\, .$$

Les vecteurs α, β, γ du trièdre mobile attaché à la bande sont donnés par les équations

$$\alpha = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}}\, , \; e\beta = \varepsilon\,(T_g - T_s)\,\gamma + X\, ,$$

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{|\nabla F_2|}} \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix}.$$

8. Le lecteur trouvera les démonstrations et tous les détails dans mon Mémoire « Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine » qui paraîtra dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, Tchécoslovaquie.