Eduard Čech

Sur les invariants de l'élément linéaire projectif d'une surface

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 32_2 (1923), 335-338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500874

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dal vol. XXXII, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 10°. — Seduta del 18 novembre 1923.

Matematica. — *Sur les invariants de l'élément linéaire projectif d'une surface.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Une surface S non réglée étant donnée, on peut former deux formes différentielles ($u = u_1$, $v = u_2$ étant les coordonnées curvilignes):

$$(1)\begin{cases}\varphi_2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k = a_{11}\, du^2 + 2a_{12}\, du\, dv + a_{22}\, dv^2 .\\ \varphi_3 = \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l = a_{111}\, du^3 + 3a_{112}\, du^2\, dv + 3a_{122}\, du\, dv^2 + a_{222}\, dv^3\end{cases}$$

Ces formes ne changent pas si l'on soumet S soit à une homographie, soit à une déformation projective [2].

(1) Presentata nella seduta del 4 novembre 1923.

(2) Fubini, *Fondamenti di geom. proiettivo-differenz.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 43 (1918-19), § 1.

Elles sont liées par les relations [1]

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma a^{ik} a_{ikl} = 0 \\ \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + A^2 = 0 . \end{cases}$$

2. Je pose

$$(3)\qquad Du_i = \Sigma \vartheta^{ik} a_{rs}\, du_s = \Sigma a^{ik} \vartheta_{rs}\, du_s ;$$

on a réciproquement

$$(3)_{bis}\qquad du_i = \varepsilon \Sigma \vartheta^{ik} a_{rs}\, Du_s = \varepsilon \Sigma a^{ir} \vartheta_{rs}\, Du_s .$$

On a alors

$$(1)_{bis}\qquad \varphi_2 = \Sigma \vartheta_{ik}\, du_i\, Du_k = -\varepsilon \Sigma a_{ik}\, Du_i\, Du_k$$

et si $\Sigma b_{ik}\, du_i\, du_k$ est une forme quadratique *conjuguée* a φ_2 (c'est-à-dire si l'on a $\Sigma a^{ik} b_{ik} = 0$)

$$(4)\qquad \Sigma b_{ik}\, Du_i\, Du_k = \varepsilon \Sigma b_{ik}\, du_i\, du_k .$$

J'introduis encore une forme cubique φ_3' en posant

$$(5)\qquad \varphi_3' = \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, Du_l = \Sigma b_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \text{ [2]}.$$

On a les identités

$$(6)\qquad \varphi_3^2 - \varepsilon \varphi_3'^2 - \tfrac{1}{2} \varphi_2^3 = 0 ,$$

$$(5)_{bis}\qquad \begin{cases} b_{ikl} = \Sigma \vartheta_{ri} a^r_{kl} , & a_{ikl} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{ri} a^r_{kl} , \\ b^r_{kl} = \Sigma \vartheta^{ir} a_{ikl} , & a^r_{kl} = \varepsilon \Sigma \vartheta^{ir} b_{ikl} , \end{cases}$$

$$(7)\qquad \Sigma a^{ikl} a_{ikl} = -\varepsilon \Sigma b^{ikl} b_{ikl} = 2 , \quad \Sigma a^{ikl} b_{ikl} = 0 ,$$

$$(7)_{bis}\qquad \Sigma a^{ik}_r a_{iks} = -\varepsilon \Sigma b^{ik} b_{iks} = a_{rs} , \quad \Sigma a^{ik}_r b_{iks} = \vartheta_{rs} .$$

3. De la première ligne de (2) on peut déduire facilement qu'il existe une forme linéaire covariante $\Sigma \psi_i\, du_i$ telle que l'on ait les identités suivantes

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{ikl,r} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{rs} \psi^s \cdot b_{ikl} \\ b_{ikl,r} = \Sigma \vartheta_{rs} \psi^s \cdot a_{ikl} . \end{cases}$$

[1] Je fais usage des notations habituelles du calcul absolu, φ_2 étant la forme fondamentale. Ainsi $A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, $a^{11} = \dfrac{a_{22}}{A}$, $a_{ikl,r}$ sont les dérivées covariantes des a_{ikl} etc. Je pose aussi

$$\varepsilon = \frac{|A|}{A} = \operatorname{sgn} A = \pm 1 , \ \vartheta_{11} = 0 , \ \vartheta_{12} = \sqrt{|A|} , \ \vartheta_{21} = -\sqrt{|A|} , \ \vartheta_{22} = 0 .$$

[2] Je suppose que les b_{ikl} forment un système covariant symmétrique.

A l'aide des ψ_i, on exprime aisément les trois *invariants du premier ordre* du système φ_2, φ_3:

$$(9) \qquad \Phi = \Sigma\, \psi_i \psi^i \quad , \quad \Psi = \Sigma\, a^{ikl}\, \psi_i \psi_k \psi_l \quad , \quad \Psi' = \Sigma\, b^{ikl}\, \psi_i \psi_k \psi_l$$

liés par l'identité

$$(9)_{bis} \qquad \Psi^2 - \varepsilon\, \Psi'^2 = \tfrac{1}{2}\, \Phi^3 .$$

4. A l'aide des dérivées covariantes $\psi_{i,k}$ des ψ_i on peut exprimer les quatre *invariants du second ordre*

$$(10) \qquad \begin{cases} K = -\frac{1}{3}\, \Sigma\, a^{ik}\, \psi_{i,k} \ , \quad H = \Sigma\, \vartheta^{ik}\, \psi_{i,k} \\ \Theta = \Sigma\, a^{ikl}\, \psi_{i,k} \psi_l \quad , \quad \Theta' = \Sigma\, b^{ikl}\, \psi_{ik}\, , \psi_l . \end{cases}$$

On peut démontrer que K est la *courbure de* φ_2.

On a les identités suivantes [1]:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\Phi &= \left(-3K + 2\, \frac{\Psi\Theta - \varepsilon\, \Psi'\Theta'}{\Phi^2}\right) \Sigma\, \psi_i\, du_i + \\ &\qquad + \varepsilon \left(-H + 2\, \frac{\Psi'\Theta - \Psi\Phi'}{\Phi^2}\right) \Sigma\, \psi_i\, Du_i \ , \\ d\Psi &= \left(-\frac{3\varepsilon}{2}\, \frac{\Psi' H}{\Phi} - \frac{9}{2}\, \frac{\Psi K}{\Phi} + \frac{3}{2}\, \Theta\right) \Sigma\, \psi_i\, du_i + \\ &\qquad + \varepsilon \left(-\Psi' - \frac{3}{2}\, \frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\, \frac{\Psi' K}{\Phi} - \frac{3}{2}\, \Theta'\right) \Sigma\, \psi_i\, Du_i \ , \\ d\Psi' &= \left(-\frac{3}{2}\, \frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\, \frac{\Psi' K}{\Phi} + \frac{3}{2}\, \Theta'\right) \Sigma\, \psi_i\, du_i + \\ &\qquad + \left(-\Psi - \frac{3\varepsilon}{2}\, \frac{\Psi' H}{\Phi} - \frac{9}{2}\, \frac{\Psi K}{\Phi} - \frac{3}{2}\, \Theta\right) \Sigma\, \psi_i\, Du_i \, . \end{aligned} \right.$$

5. Donnons-nous deux couples de formes φ_2, φ_3 et $\bar\varphi_2, \bar\varphi_3$ [2] et cherchons s'il est possible de trouver une transformation à déterminant fonctionnel positif [3] qui porterait φ_2 en $\bar\varphi_2$ et φ_3 en $\bar\varphi_3$. Il faut considérer, outre le paramètre différentiel habituel

$$\Delta(P, Q) = \Sigma\, a^{ik}\, P_i Q_k \quad , \quad \Delta(P, P) = \Delta(P)$$

[1] Je suppose $\Phi \gtrless 0$. Si $\Phi = 0$, on a des identités analogues que je omets d'écrire ici.

[2] Les variables dans les formes $\bar\varphi_2, \bar\varphi_3$ sont $\bar u = \bar u_1$, $\bar v = \bar u_2$. Les invariants Φ, Ψ... déduits des $\bar\varphi_2, \bar\varphi_3$ seront indiqués par $\bar\Phi, \bar\Psi, \ldots$.

[3] C'est seulement pour simplifier les énoncés que je fais cette supposition.

le paramètre différentiel

$$\mathbf{E}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \Sigma a^{ikl}\, \mathrm{P}_i\, \mathrm{P}_k\, \mathrm{Q}_l \quad , \quad \mathbf{E}(\mathrm{P},\mathrm{P}) = \mathbf{E}(\mathrm{P}).$$

En premier lieu, supposons qu'on puisse trouver deux des invariants

$$(12) \qquad \Phi\,,\Psi\,,\mathrm{H}\,,\mathrm{K}\,,\Theta\,,\Theta',$$

soient **P** et Q, dont le Jacobien soit différent de zéro.

Alors une transformation à déterminant fonctionnel positif porte φ_2 en $\overline{\varphi}_2$ et φ_3 en $\overline{\varphi}_3$ alors et alors seulement qu'elle satisfait aux équations

$$\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P} \;,\; \overline{\mathrm{Q}} = \mathrm{Q}\,,$$

$$\overline{\Delta}(\overline{\mathrm{P}}) = \Delta(\mathrm{P}) \;,\; \overline{\Delta}(\overline{\mathrm{P}},\overline{\mathrm{Q}}) = \Delta(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \;,\; \overline{\Delta}(\overline{\mathrm{Q}}) = \Delta(\mathrm{Q}),$$

$$\overline{\mathbf{E}}(\overline{\mathrm{P}}) = \mathbf{E}(\mathrm{P}) \,,\, \overline{\mathbf{E}}(\overline{\mathrm{P}},\overline{\mathrm{Q}}) = \mathbf{E}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \,,\, \overline{\mathbf{E}}(\overline{\mathrm{Q}},\overline{\mathrm{P}}) = \mathbf{E}(\mathrm{Q},\mathrm{P}) \,,\, \overline{\mathbf{E}}(\overline{\mathrm{Q}}) = \mathbf{E}(\mathrm{Q}).$$

On voit en particulier que les transformations en question, si elles existent, sont en nombre limité et peuvent être déterminées par des éliminations et dérivations.

Dans le cas général, où $\dfrac{\partial(\Phi\,,\Psi)}{\partial(u\,,v)} \neq 0$, les conditions peuvent s'écrire bien plus simplement:

$$\overline{\Phi} = \Phi \;,\; \overline{\Psi} = \Psi \;,\; \overline{\Psi}' = \Psi' \;,\; \overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} \;,\; \overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \;,\; \overline{\Theta} = \Theta \;,\; \overline{\Theta}' = \Theta'.$$

En second lieu, supposons que tous les invariants (12) soient fonctions d'un d'entre eux, mais excluons encore la possibilité que Φ et Ψ soient simultanément des constantes. Alors pour l'existence d'une transformation de $\varphi_2\,,\varphi_3$ en $\overline{\varphi}_2\,,\overline{\varphi}_3$ il faut qu'il existe entre $\overline{\Phi}\,,\overline{\Psi}\,,\overline{\mathrm{H}}\,,\overline{\mathrm{K}}\,,\overline{\Theta}\,,\overline{\Theta}'$ *les mêmes* relations.

D'ailleurs, s'il en est ainsi, il existe ∞^1 transformations qui peuvent être trouvées par des quadratures.

Enfin, si Φ et Ψ sont des constantes, les conditions sont simplement $\overline{\Phi} = \Phi\,,\,\overline{\Psi} = \Psi$. Il existe alors ∞^2 transformations qu'on trouve par des quadratures.

6. Un exposé complet paraîtra dans les Publications de l'Université Masaryk, Brno, Tchécoslovaquie.