Eduard Čech

Sur les surfaces dont toutes les courbes de Darboux sont planes

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 31_1 (1922), 154-156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500872

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Estratto dal vol. XXXI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 4°. — Seduta del 19 febbraio 1922.

Matematica. — *Sur les surfaces dont toutes les courbes de Darboux sont planes.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI.

Les coordonnées tangentielles homogènes z, d'une surface quelconque, rapportée aux lignes asymptotiques, satisfont, si l'on choisit convenablement le facteur de proportionnalité, aux équations [1]

$$z_{uu} = 2bz_v + cz \ , \ z_{vv} = 2a'z_u + dz \,. \tag{1}$$

L'expression

$$P = [-12a'^2 b\tau^2 + (a'_v b - a' b_v)\tau + a'_u b - a' b_u]z - 6a'b(z_u - \tau z_v) \,,$$

où $a'\tau^3 + b = 0$, représente [2] le plan osculateur d'une ligne de Darboux (à osculation quadrique) de la surface. On déduit, en faisant usage des conditions d'intégrabilité du système (1), l'identité

$$6(P_u + \tau P_v) - P\left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v}\right) \log a'^5 b^7 =$$

$$= a'bz \left\{ \left[6 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \frac{a'}{b} - \left(\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{a'}{b}\right)^2 - 36\left(a'_u + \frac{a'}{b} b_u - d\right)\right] \tau^2 + \right.$$

$$\left. + 12\tau \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \log \frac{a'}{b} + 6 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \frac{a'}{b} + \left(\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{a'}{b}\right)^2 + 36\left(b_v + \frac{a'}{b} a'_v - c\right) \right\} .$$

Pour les surfaces en question, le second membre s'évanouit identiquement en τ. On peut donc faire [3], dans ce cas,

$$a' = b = \varphi \ , \ c = 2\varphi_v \ , \ d = 2\varphi_u \,,$$

ainsi que les équations (1) sont

$$z_{uu} = 2(\varphi z_v + \varphi_v z) \ , \ z_{vv} = 2(\varphi z_u + \varphi_u z) \,, \tag{2}$$

où φ satisfait les conditions d'intégrabilité

$$\varphi_{uu} = 2\varphi\varphi_v \ , \ \varphi_{vv} = 2\varphi\varphi_u \,. \tag{3}$$

Je vais montrer qu'on peut intégrer (2), mais, pour brièveté, j'écarte les cas aisés où φ est fonction d'une seule des quantités

$$x_i = \varepsilon^{2i} u + \varepsilon^i v \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}} \ , \ i = 0, 1, 2). \tag{4}$$

[1] Les indices u, v signifient partout les dérivées partielles.

[2] En ce sens que les coordonnées de ce plan s'obtiennent en remplaçant z par les coordonnées du plan tangent de la surface.

[3] Si l'on a $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\dfrac{a'}{b}\right) = 0$ (surfaces isothermo-asymptotiques de M. Fubini), on peut faire $a' = b$ par un changement des paramètres u, v.

Tout d'abord remarquons que

$$f(x_i) = \varepsilon^i \varphi_u + \varepsilon^{2i} \varphi_v + \varphi^2 \tag{5}$$

est, en vertu de (3), une fonction de x_i seul et satisfait à l'équation

$$f'''(x_i) = 4f(x_i)\, f'(x_i). \tag{6}$$

Ceci étant, on peut, dans le cas actuel, représenter le plan osculateur d'une ligne de Darboux par l'expression

$$Q_i = \varepsilon^{2i} z_u + \varepsilon^i z_v - 2\varphi z\,, \tag{7}$$

qui vérifie, d'après (2), l'équation différentielle

$$\frac{d^3 Q_i}{dx_i^3} = 4\, \frac{d}{dx_i} [f(x_i)\, Q_i]\,. \tag{8}$$

Grâce à (6), on remonte de l'équation (8) à la suivante

$$\frac{Q_i}{f'(x_i)} + a \int \frac{f(x_i)\, dx_i}{[f'(x_i)]^2} + b \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} = c_i\,, \tag{9}$$

a, b, c_0, c_1, c_2 étant des constantes, dont les deux premières ne dépendent pas de l'indice i, car on trouve

$$a = (\varphi_{uv} - 4\varphi^3)\, z - \varphi_v z_u - \varphi_u z_v + \varphi z_{uv}\,, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} b = \varphi(2\varphi_u \varphi_v - 3\, \varphi\varphi_{uv} + 4\varphi^4)\, z + (\varphi^2 \varphi_v - \varphi_u^2)\, z_u + \\ + (\varphi^2 \varphi_u - \varphi_v^2)\, z_v + (\tfrac{1}{2}\, \varphi_{uv} - \varphi^3)\, z_{uv}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Pour trouver la relation qui passe nécessairement entre les constantes a, b, c_i, on commence par eliminer z des équations (7), (10), (11), ce qui donne

$$\Theta_0 Q_0 + \Theta_1 Q_1 + \Theta_2 Q_2 = 3\varphi\, (\varphi_{uv} - 2\varphi^3)\, a - 6\varphi^2 b\,, \tag{12}$$

où j'ai posé

$$\Theta_i = 2\varphi\, \varphi_u \varphi_v - \tfrac{1}{2}\, \varphi_{uv}^2 + \varepsilon^i \varphi\, (\varphi_u \varphi_{uv} - 2\varphi\, \varphi_v^2) + \varepsilon^{2i} \varphi\, (\varphi_v \varphi_{uv} - 2\varphi\, \varphi_u^2)\,.$$

Or l'identité

$$f'(x_i) = \varphi_{uv} + 2\varepsilon^i \varphi\varphi_u + 2\varepsilon^{2i} \varphi\varphi_v$$

donne par multiplication

$$\Theta_i\, f'(x_i) = 6\varphi^2 \varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} - \tfrac{1}{2}\, \varphi_{uv}^3 - 4\varphi^3\, (\varphi_u^3 + \varphi_v^3) = \Theta\,, \tag{13}$$

où Θ ne contient plus l'indice i. Si l'on introduit encore les valeurs des Q_i tirés de l'équation (9), l'identité (12) donne

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=0}^{2} \int \frac{f(x_i)\, dx_i}{[f'(x_i)]^2} - \frac{3\varphi\, (2\varphi^3 - \varphi_{uv})}{\Theta}\right] a + \\ + \left[\sum_{i=0}^{2} \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} - \frac{6\varphi^2}{\Theta}\right] b = c_0 + c_1 + c_2\,. \end{aligned}$$

Les deux constantes a et b étant manifestement indépendentes, les deux quantités entre crochets sont des constantes et l'on a simplement, en disposant convenablement des limites inférieures des intégrales,

$$(14)\qquad \sum_{i=0}^{2}\int\frac{f(x_i)\,dx_i}{[f'(x_i)]^2}=\frac{3\varphi(2\varphi^3-\varphi_{uv})}{\Theta}\ ,\quad \sum_{i=0}^{2}\int\frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2}=\frac{6\varphi^2}{\Theta}\ ,$$

$$(15)\qquad c_0+c_1+c_2=0\,.$$

L'identité

$$Q_0+Q_1+Q_2=-6\varphi z$$

donne maintenant les solutions du système (2). Mais c'est l'interprétation géométrique du procédé employé qui donne des résultats intéressants. Tout d'abord, l'équation (8) étant du troisième ordre seulement, les plans des lignes de Darboux de chaque famille enveloppent un cône [1]. On voit aussi que ces trois cônes sont homographiques, si nous faisons correspondre les plans tangents appartenant à une même valeur du paramètre qui est, respectivement, x_0, x_1, x_2. D'autre part, si l'on pose la relation trilinéaire

$$x_0+x_1+x_2=0\,,$$

les trois cônes engendrent, par les intersections des plans tangents, la surface cherchée. Passons au fait que a et b ne dépendent pas de i. Ceci donne, en premier lieu, que les sommets des trois cônes sont situés en ligne droite, tout les plans contenant celle-ci étant de plus unis dans les homographies qui ont lieu entre les cônes. Ces homographies sont donc des simples perspectivités, et les plans de perspectivité forment d'ailleurs nécessairement un faisceau. Enfin, d'après (15), entre les sommets des cônes et ces plans passe la bien connue relation d'une forme cubique binaire et son covariant cubique [2].

Essentiellement, trois cas sont possibles

$$-\varphi=\zeta x_0+\zeta x_1+\zeta x_2\,,$$

(cas général), ou

$$-\varphi=\operatorname{cotg} x_0+\operatorname{cotg} x_1+\operatorname{cotg} x_2\quad,\quad -\varphi=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\,.$$

Dans le cas général, on voit que l'on a

$$f(x_i)=3\wp x_i\ ,\quad \varphi^2=\wp x_0+\wp x_1+\wp x_2\,,$$

$$\Theta=-\frac{27}{2}\wp' x_0\,\wp' x_1\,\wp' x_2\ ,\ \varphi(2\varphi^3-\varphi_{uv})=\wp x_0\,\wp x_1+\wp x_0\,\wp x_2+\wp x_1\,\wp x_2+\tfrac{3}{4}g_2\,.$$

On peut donc, dans les équations (14), choisir zéro comme limite inférieure des intégrales.

(1) Si φ est fonction de x_i seul, les plans des courbes de Darboux $x_i=$ constante forment un faisceau. Ces courbes sont des simples coniques et les courbes conjuguées sont planes.

(2) Ces plans coupent la surface en courbe de Segre particulières

$$x_0-x_1=0\ ,\ x_1-x_2=0\ ,\ x_2-x_0=0.$$