Eduard Čech

L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo

Ann. Mat. Pura Appl. (3) 31 (1922), 191-206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500870

L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista projettivo.

(*Di* EDUARD ČECH, *a Praga.*)

---

1. L'oggetto di questa Memoria è il problema di trovare un sistema di enti geometrici, invarianti per trasformazioni projettive, la cui conoscenza equivalga a quella dei coefficienti dell'equazione di una superficie, nell'intorno d'un punto regolare, non parabolico, sino al quarto grado inclusivamente; un sistema tale sarà indicato nel n.° 8. Giova definire la superficie in questione, secondo WILCZYNSKI (¹), mediante un sistema di due equazioni a derivate parziali del tipo:

$$\left.\begin{aligned} y_{uu} + 2\,b\,y_v + f\,y = 0, \\ y_{vv} + 2\,a'\,y_u + g\,y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

di cui si suppongono riempite le condizioni d'integrabilità.

Il sistema (1) possiede quattro soluzioni linearmente indipendenti $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$. Interpretando queste soluzioni come coordinate omogenee puntuali, si ha una superficie Π riferita alle asintotiche. Ci occorre considerare un altro sistema di riferimento, *variabile con u, v*, chiamato il sistema di *coordinate locali*, determinato nella maniera seguente: Dati i valori u, v, siano $z^{(i)}$ le coordinate d'un punto qualunque nel sistema primitivo e x_i le coordinate dello stesso punto nel sistema locale; allora si ha

$$z^{(i)} = x_1\,y^{(i)} + x_2\,y_u^{(i)} + x_3\,y_v^{(i)} + x_4\,y_{uv}^{(i)}. \tag{2}$$

Faremo uso costante delle coordinate così definite, le quali, come si vede, sono affatto indipendenti dalla scelta speciale delle soluzioni particolari $y^{(i)}$; ed anche adopereremo le coordinate contragredienti ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. L'equa-

---

(¹) ***Projective differential geometry of curved surfaces,*** cinque Memorie pubblicate nelle Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 8-10, 1907-09. V. specialmente il ***First Memoir*** e il ***Second Memoir.***

zione di Π, nel sistema locale, è

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_4}{x_1} &= \frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_1} + \frac{2}{3} b \frac{x_2^3}{x_1^3} + \frac{2}{3} a' \frac{x_3^3}{x_1^3} + \\ &+ \frac{1}{6 x_1^4}(b_u x_2^4 + 4 b_v x_2^3 x_3 + 4 a'_u x_2 x_3^3 + a'_v x_3^4) + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

In tutta la Memoria, O sarà il punto $(1, 0, 0, 0)$ in considerazione, ω il piano tangente $(x_4 = 0)$, α_1 $(x_2 = x_4 = 0)$ e α_2 $(x_3 = x_4 = 0)$ le tangenti asintotiche.

2. Nella Memoria « *O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru* » (Intorno all'elemento del terz'ordine di una curva gobba ed una superficie dello spazio projettivo) (1), mi ero già occupato del tema proposto, limitandomi però ai termini del terzo grado. Conviene stabilire alcuni risultati ivi raggiunti. All'elemento della superficie, vi avevo riattaccato una *serie di trasformazioni* Σ_k *tra il piano punteggiato* ω *e la stella di piani* O, dipendenti da un parametro k. Le equazioni di Σ_k, nel sistema delle coordinate locali, sono

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= 0, & \sigma x_1 &= 2k(a'\xi_3^3 + b\,\xi_3^3) - 3\,\xi_2\xi_3\xi_4, \\ \rho\,\xi_2 &= 3\,x_2 x_3^2, & \sigma x_2 &= 3\,\xi_2\,\xi_3^2, \\ \rho\,\xi_3 &= 3\,x_2^2 x_3, & \sigma x_3 &= 3\,\xi_2^2\,\xi_3, \\ \rho\,\xi_4 &= 2k(b\,x_2^3 + a' x_3^3) - 3\,x_1 x_2 x_3, & x_4 &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

La trasformazione Σ_0 è subordinata alla polarità rispetto alla quadrica H, la così detta quadrica di Lie, la cui equazione è

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 + 2\,a' b\,x_4^2 = 0. \qquad (5)$$

Questa quadrica è l'iperboloide osculatore delle due rigate generate dalle tangenti asintotiche di un sistema lungo la curva asintotica dell'altro sistema. Se $b' = a' = 0$, il che soltanto per una quadrica accade identicamente, tutte le trasformazioni Σ_k si riducono a Σ_0. Per le superficie rigate, una delle funzioni b ed a' è identicamente zero, e le Σ_k sono trasformazioni quadratiche. Qui ci limiteremo al caso generale $a' b \neq 0$, rimandando pel caso delle rigate alla mia Memoria « *Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek* »

(1) *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Praga, t. 50, 1920-21, pp. 219-249.

(Geometria projettiva di cinque rette sghembe infinitamente vicine) [1]. Per un valore dato di k, ai fasci di piani della stella O, corrisponde nelle Σ_k una rete di cubiche razionali, con un punto base doppio in O e due punti base semplici infinitamente vicini su ciascuna tangente asintotica, sì che la curvatura dei due rami in O è il prodotto di $-\frac{2k}{3}$ per quella della curva asintotica corrispondente. I punti corrispondenti nelle Σ_k a un piano generico della stella O formano una punteggiata sulla tangente coniugata all'intersezione del piano con ω, omografica col parametro k. Le cubiche corrispondenti nelle Σ_k ad un fascio di piani d'asse r formano un fascio con un punto base doppio in O, un punto base infinitamente vicino sopra ciascuna tangente asintotica, e tre altri punti base, che si trovano nelle intersezioni della polare reciproca di r rispetto ad H colle tangenti di Darboux-Segre [2]

$$x_4 = b\,x_2^3 + a'\,x_3^3 = 0;$$

questi ultimi sono i flessi delle cubiche. Segue incidentemente che *la posizione delle tangenti di* Darboux-Segre *non dipende che dalle curvature delle due asintotiche, anzi soltanto dal loro rapporto.* Ciò spiega il fatto segnalato da Fubini [3] che, date su tutta la superficie le asintotiche, si ha una espressione per le direzioni di Darboux-Segre, la quale non contiene le derivate di D, D', D''. Vedremo in appresso (n.° 12) la costruzione effettiva delle tangenti di Darboux-Segre dalle curvature delle asintotiche.

Fra le trasformazioni Σ_k ve ne sono due d'un significato geometrico semplice. Il piano che corrisponde ad un punto P del piano ω nella trasformazione Σ_1 è il luogo delle polari di P rispetto alle coniche osculatrici delle intersezioni di Π coi piani del fascio OP, e correlativamente; che il luogo in questione è un piano, è in sostanza un risultato ottenuto da Transon già nel 1841 [4]. Nella trasformazione Σ_{-3} invece, al punto P corrisponde il

---

[1] Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, Brno, 1921, n.° 4 (con un riassunto francese).

[2] Segnalo qui una definizione semplicissima di queste tangenti, che mi pare finora inosservata: I punti delle tangenti di Darboux-Segre sono i centri delle omologie, trasformanti la superficie in un'altra che ha in O un contatto del terz'ordine colla proposta; tutte queste omologie sono involutorie e il piano d'omologie è il piano polare del centro rispetto ad H.

[3] *Applicabilità projettiva di due superficie* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. 41, 1916, p. 153).

[4] *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces*: Journal de Liouville, t. 6, 1841.

piano osculatore della curva di contatto di Π col cono circoscritto, avente il centro nel punto P. Questa trasformazione è stata considerata da SEGRE nella Memoria « *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie* [1]. La connessione di quelle due trasformazioni con le curvature delle asintotiche, le tangenti di DARBOUX-SEGRE e la quadrica di LIE sembra essere stata svolta per la prima volta nella mia Memoria citata al principio di questo numero. Giova però considerare tutte le trasformazioni Σ_k.

3. Alle cose dette, che furono svolte nella Memoria citata, aggiungiamo qui una *costruzione effettiva del punto P corrispondente in Σ_k a un piano ξ* $(0_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ *della stella O, supposta la conoscenza della correlazione Σ_0 e della curvatura delle asintotiche.* Si costruisca dapprima il polo P_0 del piano ξ rispetto ad H; poi si scelga, nel piano ω, una conica p_i $(i=1, 2)$, toccante α_i in O e la cui curvatura in questo punto sia il prodotto di $\frac{4k}{3}$ per quella dell'asintotica corrispondente, sì che p_i passi per P_0; si determini l'intersezione P_i della retta OP con la tangente di p_i nel punto d'intersezione con α_j $(i, j=1, 2)$. Il punto cercato P, insieme con O, divide armonicamente $P_1 P_2$. Il punto P_i è indipendente dalla scelta particolare della conica p_i, come si vede semplicemente osservando che, da una conica soddisfacente le condizioni, si ottengono le altre mediante omologie di centro O ed asse $O P_0$. Per la dimostrazione si può dunque la conica p_1 far passare per il punto (0, 1, 0, 0). L'equazione di p_1 ha la forma

$$2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + a_{33}\,x_3^2 = 0.$$

Dalle condizioni prescritte, si trova

$$a_{12} : a_{23} : a_{33} = 3\,\xi_2\,\xi_3 : (3\,\xi_3\,\xi_4 - 4\,k\,a'\,\xi_2^2) : 8\,k\,a'\,\xi_2\,\xi_3.$$

L'equazione della tangente di p_1 nel punto (0, 1, 0, 0) è

$$3\,\xi_2\,\xi_3\,x_1 + (3\,\xi_3\,\xi_4 - 4\,k\,a'\,\xi_2^2)\,x_3 = 0$$

e le coordinate di P_1 risultano

$$x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = (-3\,\xi_3\,\xi_4 + 4\,k\,a'\,\xi_2^2) : 3\,\xi_3^2 : 3\,\xi_2\,\xi_3 : 0,$$

---

[1] *Rendiconti Acc. Lincei*, t. 17, 1908.

Similmente si trova per P_2

$$x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} : x_4^{(2)} = (-3\,\xi_2\,\xi_4 + 4\,k\,b\,\xi_3^2) : 3\,\xi_2\,\xi_3 : 3\,\xi_2^2 : 0.$$

Per il coniugato armonico di O rispetto a $P_1\,P_2$ si ha evidentemente

$$\rho\, x_i = \xi_2\, x_i^{(1)} + \xi_3\, x_i^{(2)} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

il che, per le (4), prova l'asserzione fatta. Se $b = 0$ (superficie rigate), la costruzione di P_2 diviene illusoria; ma allora si ha semplicemente $P \equiv P_1$. S'intende che si può fare anche la costruzione correlativa.

4. Cominciando a considerare anche i termini del quarto grado nell'equazione (3), fa d'uopo accennare un teorema dovuto a Moutard (1): *Il luogo delle coniche osculatrici delle curve sezioni di* Π *coi piani passanti per una tangente fissa, è una quadrica, che diremo la quadrica di* Moutard. L'equazione della quadrica di Moutard appartenente alla tangente

$$x_4 = x_3 - n\,x_2 = 0 \tag{6}$$

è

$$\left.\begin{aligned} &\Big[8\,(b + a'\,n^3)^2 - 3\,n\,(b_{..} + 4\,b_{.}\,n + 4\,a'_{..}\,n^3 + a'_{.}\,n^4)\Big]\,x_4^2 + \\ &\quad + 18\,n^3\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3) + 24\,n^2\,(a'\,n^3 - 2\,b)\,x_2\,x_4 - \\ &\qquad - 24\,n\,(2\,a'\,n^3 - b)\,x_3\,x_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bisogna indicare degli enti geometrici, per mezzo di cui si possa costruire la quadrica di Moutard appartenente a una tangente qualsiasi. Mi sono occupato di questo problema nella Memoria: « *Moutardovy kvadriky* » (Le quadriche di Moutard) (2), della quale occorre adesso riferire qualche risultato. Si stabilisca dapprima *la trasformazione* Ω *nella varietà delle rette dello spazio* nella maniera seguente: Una retta generica r incontra il piano ω nel punto P. A questa retta si farà corrispondere la sua polare reciproca rispetto alla quadrica di Moutard appartenente alla tangente OP. È chiaro senz'altro che la conoscenza di Ω basti a costruire le quadriche di Moutard. Le equazioni di Ω sono del settimo grado nelle coordinate di retta. Ma si può decomporre Ω

(1) V. Darboux, *Sur le contact des courbes et des surfaces*. Bull. des Sc. Math. (2), t. 4, 1880.

(2) Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, Brno, n.° 3 (con un riassunto francese).

in operazioni più semplici. Diciamo r' la retta corrispondente a r in Ω e r'' quella corrispondente a r in Ω^{-1}; sia P l'intersezione di r con ω, π il piano $r\,O$. Nel fascio delle quadriche toccanti H lungo le due tangenti asintotiche, si fissi una qualunque, Q^λ, d'equazione

$$2\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3) - \lambda\,x_4^2 = 0; \tag{8}$$

e sia r_0 la retta polare di r rispetto a Q^λ. Nella schiera rigata determinata dalle tre rette r', r'', r_0 si ha una retta $P'\,P''$ giacente nel piano ω e una retta $(\pi'\,\pi'')$ passante per O; intendiamo che il punto P'' ed il piano π'' siano incidenti colla tangente $O\,P$, mentre il punto P' ed il piano π' sono incidenti colla tangente coniugata. Si trova poi, come ho mostrato nella Memoria citata, che le rette $P'\,P''$ e $\pi'\,\pi''$ rimangono fisse, quando la retta r descrive il fascio $(P\,\pi)$. Inoltre, il punto P'' ed il piano π' non dipendono che dal punto P; il punto P' e il piano π'' invece dipendono soltanto dal piano π. I piani π, π' corrispondono risp. ai punti P', P nella trasformazione $\Sigma_{3/2}$. La corrispondenza tra P e P'' e quella tra π e π'' sono due corrispondenze biunivoche involutorie di de Jonquières; nella prima, si ha una curva C^λ, nell'altra un cono Γ^λ di elementi uniti. L'equazione di C^λ è

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 10\,b^2\,x_2^6 + (44\,a'\,b + 9\,\lambda)\,x_2^3\,x_3^3 + 10\,a'^2\,x_3^6 + \\ &+ 12\,x_1\,x_2\,x_3\,(b\,x_2^3 + a'\,x_3^3) - 3\,x_2\,x_3\,(b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3\,x_3 - \\ &- 2\,a'_u\,x_2\,x_3^3 + a'_v\,x_3^4) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

e quella del cono Γ^λ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 10\,a'^2\,\xi_2^6 + (28\,a'\,b - 9\,\lambda)\,\xi_2^3\,\xi_3^3 + 10\,b^2\,\xi_3^6 + \\ &+ 12\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,(a'\,\xi_2^3 + b\,\xi_3^3) + 3\,\xi_2\,\xi_3\,(a'_v\,\xi_2^4 - 2\,a'_u\,\xi_2^3\,\xi_3 - \\ &- 2\,b_v\,\xi_2\,\xi_3^3 + b_u\,\xi_3^4) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Supponiamo ora che, *fatta la scelta della quadrica Q^λ, si sappia costruire l'intersezione d'una tangente arbitraria t con C^λ e il piano tangente di Γ^λ passante per t; allora si è in grado di costruire la retta corrispondente ad una retta arbitraria r in Ω*. Sia, come sopra, P l'intersezione di r con ω, π il piano $r\,O$, r_0 la retta polare di r rispetto a Q^λ, P' il punto corrispondente al piano π, e π' il piano corrispondente al punto P in $\Sigma_{3/2}$. Costruiamo l'intersezione R della retta $O\,P$ colla curva C^λ, come pure il piano tangente ρ del cono Γ^λ, contenente la medesima retta. Si determini il punto P'' e il piano π'', incidenti con la retta OP, sicchè

$$(O\,R\,P\,P'') = (\omega\,\rho\,\pi\,\pi'') = -1.$$

Le rette r_0, $r_1 \equiv P'P''$, $r_2 \equiv (\pi'\pi'')$ determinano una serie rigata (¹); la retta r' richiesta appartiene a questa serie e si determina coll'essere il rapporto anarmonico

$$(r_1\,r_2\,r_0\,r') = \frac{1}{3}.$$

La costruzione così esposta è abbastanza semplice, ma ci rimane il problema di sostituire C^λ e Γ^λ con elementi più semplici. Già nella Memoria citata ho fatto l'osservazione che conviene sostituire Γ^λ e C^λ con le loro trasformate mediante $\Sigma_{-\frac{5}{4}}$. Lo sono la curva D^λ

$$\left.\begin{aligned}(16\,a'b + 3\,\lambda)\,x_2^2 x_3^2 - (b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3 x_3 - 2\,a'_u\,x_2 x_3^3 + a'_v\,x_3^4) + \\ + 4\,(b\,x_2^3 + a'\,x_3^3)\,x_1 = x_4 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

e il cono Δ^λ

$$\left.\begin{aligned}(8\,a'b + 3\,\lambda)\,\xi_2^2 \xi_3^2 - (a'_v\,\xi_2^4 - 2\,a'_u\,\xi_2^3 \xi_3 - 2\,b_v\,\xi_2 \xi_3^3 + b_u\,\xi_3^4) - \\ - 4\,(a'\,\xi_2^3 + b\,\xi_3^3)\,\xi_4 = \xi_1 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

5. Cerchiamo ora come si possa *ridurre la costruzione di* D^λ *e* Δ^λ *a qualche operazione eseguibile.* Se λ è variabile, la curva D^λ descrive un fascio. Si vede dapprima che O ne è un punto base triplo con tre punti base semplici infinitamente vicini rispettivamente sulle tre tangenti di Darboux-Segre. Inoltre, la tangente asintotica α_i $(i = 1,\ 2)$ contiene un altro punto base semplice E_i, di coordinate

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{matrix} a'_v : 0 : 4\,a' : 0\ (E_1) \\ b_u : 4\,b : 0 : 0\ (E_2). \end{matrix} \qquad (13)$$

Infine si ha un punto base infinitamente vicino ad E_i, sì che la tangente, in E_i, delle curve del fascio incontra l'altra tangente asintotica α_j nel punto D_j

(¹) Ovvero un fascio, se OP o la tangente coniugata è una tangente di Darboux-Segre.

di coordinate

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{matrix} b_v : 0 : -2b : 0 \, (D_1) \\ a'_u : -2a' : 0 : 0 \, (D_2). \end{matrix} \tag{14}$$

Correlativamente: Δ^λ tocca il piano ω lungo le tre tangenti coniugate a quelle di Darboux-Segre; inoltre, per α_i passa un piano tangente fisso ε_i di coordinate

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{matrix} 0 : 4a' : 0 : -a'_v \, (\varepsilon_1) \\ 0 : 0 : 4b : -b_u \, (\varepsilon_2). \end{matrix} \tag{15}$$

È pure fissa la retta di contatto di ε_i con Δ^λ, la quale determina, insieme con α_j, il piano δ_j di coordinate

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{matrix} 0 : 2b : 0 : b_v \, (\delta_1) \\ 0 : 0 : 2a' : a'_u \, (\delta_2). \end{matrix} \tag{16}$$

ε_1, ε_2, δ_1, δ_2 sono, come si vede subito, ordinatamente i piani polari di E_1, E_2 D_1, D_2 rispetto ad H.

6. Prima di proseguire, vogliamo determinare *il significato geometrico dei punti e piani che qui compariscono.* Indichiamo con d la retta $D_1 D_2$, e la retta $E_1 E_2$, d' l'intersezione $(\delta_1 \delta_2)$, e' l'intersezione $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$. Le equazioni di queste rette sono

$$x_4 = 2a'b\, x_1 + a'_u b\, x_2 + a' b_v\, x_3 = 0 \; (d) \tag{17}$$

$$2b\, x_2 + b_v\, x_4 = 2a'\, x_3 + a'_u\, x_4 = 0 \; (d') \tag{18}$$

$$x_4 = 4a'b\, x_1 - a' b_u\, x_2 - a'_v b\, x_3 = 0 \; (e) \tag{19}$$

$$4a'\, x_2 - a'_v\, x_4 = 4b\, x_3 - b_u\, x_4 = 0 \; (e'). \tag{20}$$

Ora confrontando le nostre equazioni (17) e (18) colle equazioni (70^a) e (70^b) nel *Second Memoir* di Wilczynski, p. 95, si vede che *le nostre rette d e d' sono identiche colle «directrix lines» di* Wilczynski, vale a dire sono le direttrici della congruenza lineare intersezione dei complessi lineari osculatori delle due asintotiche. Ma anche le rette e, e' sono in stretta connessione colle asintotiche. Seguendo Wilczynski (¹), chiamiamo *cono osculatore* di una curva gobba il cono proiettante dal punto considerato della curva la sua cubica gobba osculatrice, mentre *conica osculatrice* della curva sarà la se-

(¹) *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces.* Teubner, 1906.

zione della sviluppabile delle tangenti di quella cubica col piano osculatore (¹). Ciò posto, si può facilmente trovare l'equazione della conica osculatrice di un'asintotica, confrontando l'equazione (40) p. 250 del libro citato or ora, colle equazioni (59), (62), (63) p. 93 del *Second Memoir*. In questa maniera si verifica subito che *il punto* E_i $(i, j = 1, 2)$ *è il polo di* α_j *rispetto alla conica osculatrice della curva asintotica di cui* α_i *è tangente*. Correlativamente ε_i è il piano polare di α_j rispetto al cono osculatore di quella asintotica.

7. Mentre le rette d, d' furono già considerate da WILCZYNSKI, le rette e, e' sembrano nuove (²). Ed è qui il luogo di far menzione d'una *terza coppia di rette polari rispetto a H che è in stretta connessione colle precedenti.* Nella nota: « *O trilineárních systémech čar na ploše a projektivní aplikaci ploch* » (Sui sistemi trilineari di curve sopra una superficie e l'applicazione proiettiva delle superficie) (³) ho dimostrato che, in ogni punto della superficie, *i piani osculatori delle tre curve coniugate a quelle di* DARBOUX-SEGRE *contengono una retta l' e, correlativamente, i punti di regresso delle sviluppabili circoscritte alla superficie lungo quelle tre linee giacciono sopra una retta l* (⁴). Le equazioni di l sono

$$x_4 = 6\,a'\,b\,x_1 - (a'\,b_u - a'_u\,b)\,x_2 + (a'\,b_v - a'_v\,b)\,x_3 = 0 \tag{21}$$

e quelle di l'

$$6\,a'\,b\,x_2 + (a'\,b_v - a'_v\,b)\,x_4 = 6\,a'\,b\,x_3 - (a'\,b_u - a'_u\,b)\,x_4 = 0. \tag{22}$$

(¹) Ho dato qualche proprietà di questi due enti correlativi nella nota « *K diferenciální geometrii prostorových křivek* » (Intorno alla geometria differenziale delle curve gobbe). Mem. dell'Acc. delle Scienze di Praga, t. 30, 1921, n.° 15.

(²) 18-5-1922. Le rette e, e' compariscono nella Memoria di GREEN, *Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences*, Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 20, 1919, sotto il nome di *canonical edges*.

(³) Memorie dell'Acc. delle Scienze di Praga, t. 30, 1921, n.° 23 (con un riassunto francese).

(⁴) Si ha, sopra una superficie non rigata, un'infinità di sistemi tripli di curve, dotati di queste due proprietà duali. (Son quelli che nella nota ora citata chiamo *trilineari*). Il sistema definito dall'equazione differenziale $(d\,v - \tau_1\,d\,u)\,(d\,v - \tau_2\,d\,u)\,(d\,v - \tau_3\,d\,u) = 0$ possiede queste proprietà quando si ha $\tau_1\,\tau_2\,\tau_3\,a' - b = \left| \tau_i^2,\ \tau_i,\ \frac{\partial \tau_i}{\partial u} + \tau_i \frac{\partial \tau_i}{\partial v} \right| = 0$. Si vede subito che, se in una corrispondenza tra due superficie si corrispondono le linee di DARBOUX-SEGRE, tutti i sistemi trilineari si corrispondono; e viceversa, se si corrispondono le asintotiche ed un sistema trilineare, le linee di DARBOUX-SEGRE si corrispondono.

Ora la (21) si può scrivere

$$x_4 = (2\,a'\,b\,x_1 + a'_u\,b\,x_2 + a'\,b_v\,x_3) + (4\,a'\,b\,x_1 - a'\,b_u\,x_2 - a'_v\,b\,x_3) = 0.$$

Confrontando colle (17) e (19) si vede che *le rette d, e, l appartengono ad un fascio* e, se m è quella retta del fascio che passa per O, si ha

$$(d\,e\,l\,m) = -2. \tag{23}$$

Correlativamente sia m' quella retta del fascio $d'\,e'$ che giace nel piano ω; la retta l appartiene pure al fascio e si ha

$$(d'\,e'\,l'\,m') = -2. \tag{24}$$

Se

$$\frac{\partial}{\partial v}\,a'\,b^2 = \frac{\partial}{\partial u}\,a'^2\,b = 0, \tag{25}$$

le tre rette d, e, l e anche le tre rette d', e', l' coincidono. Le superficie dotate di questa proprietà ammettono un gruppo continuo a due parametri di deformazioni proiettive in sè (¹).

8. Adesso siamo in grado di indicare il sistema di enti geometrici, atto a sostiturire i coefficienti dell'equazione (3) sino al quarto grado inclusivamente. Basta conoscere: *la quadrica di Lie, le curvature delle due asintotiche e le due rette d, e,* la cui definizione geometrica era data nel n.° 6. Basterà infatti dimostrare che, scegliendo H per la quadrica Q^λ, cioè facendo $\lambda = -4\,a'\,b$, la curva C^λ e il cono Γ^λ riescono determinati. Ora consideriamo nel piano ω due coniche c_1^k, c_2^k, definite nella maniera seguente (k è arbitrario): La conica c_i^k ($i = 1, 2$) tocca nel punto O la tangente asintotica α_i, la sua curvatura ivi è il prodotto di $-\dfrac{2\,k}{3}$ per quella dell'asintotica corrispondente, e tocca nel punto E_j ($i, j = 1, 2$) la retta $D_i\,E_j$. L'equazione

(¹) Incidentemente noto che si può, come ho mostrato in una nota attualmente in corso di stampa nelle Memorie dell'Acc. delle Scienze di Praga, definire la deformazione proiettiva più semplicemente che non l'abbia fatto Fubini e precisamente: *affinchè la corrispondenza fra due superficie sia una deformazione proiettiva, occorre e basta che, in ogni coppia di punti corrispondenti, i piani osculatori delle linee corrispondenti formino due stelle omografiche.*

di c_1^k è

$$c_1^k \equiv 3\,x_2\,(4\,b\,x_1 - b_u\,x_2 + 2\,b_v\,x_3) - 8\,k\,a'\,b\,x_3^2 = x_4 = 0, \tag{26}$$

e quella di c_2^k

$$c_2^k \equiv 3\,x_3\,(4\,a'\,x_1 + 2\,a'_u\,x_2 - a'_v\,x_3) - 8\,k\,a'\,b\,x_2^2 = x_4 = 0. \tag{27}$$

Le due quartiche spezzate $c_1^k \,.\, x_2^2 = 0$, $c_2^k \,.\, x_3^2 = 0$ hanno un punto triplo in O, e le tre tangenti in O dell'una coincidono in α_1, quelle dell'altra in α_2; segue che nel fascio da esse determinato esiste una quartica che tocca in O le tre tangenti di Darboux-Segre. L'equazione di questa curva è

$$c_1^k\,x_2^2 + c_2^k\,x_3^2 = 0$$

ossia

$$12\,x_1\,(b\,x_2^3 + a'\,x_3^3) - 3\,(b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3\,x_3 - 2\,a'_u\,x_2\,x_3^3 + a'_v\,x_3^4) -$$
$$- 16\,k\,a'\,b\,x_2^2\,x_3^2 = 0.$$

Ma confrontando con (11) si vede che per

$$\lambda = -\frac{(16\,k + 3)}{9}\,a'\,b \tag{28}$$

la quartica così ottenuta coincide con D^λ.

Correlativamente sia γ_i^k $(i = 1, 2)$ il cono quadrico di centro O che tocca ω lungo α_i, la cui curvatura lungo α_i è il prodotto di $-\dfrac{3}{2k}$ per quella della sviluppabile delle tangenti dell'asintotica corrispondente, e che tocca ε_j lungo l'intersezione di ε_j con δ_i (¹). L'equazione di γ_1^k è

$$\gamma_1^k \equiv 3\,\xi_3\,(-2\,b_v\,\xi_2 + b_u\,\xi_3 + 4\,b\,\xi_4) - 8\,k\,a'\,b\,\xi_2^2 = \xi_1 = 0, \tag{29}$$

e quella di γ_2^k

$$\gamma_2^k \equiv 3\,\xi_2\,(a'_v\,\xi_2 - 2\,a'_u\,\xi_3 + 4\,a'\,\xi_4) - 8\,k\,a'\,b\,\xi_3^2 = \xi_1 = 0. \tag{30}$$

Il cono Δ^λ appartiene alla schiera determinata dai coni spezzati $\gamma_1^k \,.\, \xi_3^2 = 0$, $\gamma_2^k \,.\, \xi_2^2 = 0$, allorchè si ha

$$\lambda = \frac{8\,(2\,k - 3)}{9}\,a'\,b, \tag{31}$$

(¹) Si può osservare che c_i^k e $\gamma_i^{(-k)}$ sono polari rispetto ad H.

dunque generalmente per un altro valore di k che prima. Ma *se si sceglie* $Q^\lambda \equiv H$, cioè $\lambda = -4a'b$, si ha, in ambedue i casi,

$$k = -\frac{3}{4}. \tag{32}$$

Si vede dunque che $D^{(-4a'b)}$ e $\Delta^{(-4a'b)}$ sono completamente determinati, se si conoscono gli elementi enunciati al principio di questo numero, come si era asserito.

9. Rimane però desiderabile di fornire una costruzione geometrica della curva

$$c_1^k x_2^2 + c_2^k x_3^2 = 0 \tag{33}$$

dalle coniche c_1^k e c_2^k, e precisamente la costruzione della sua intersezione con una tangente data t della superficie Π. A tale scopo si consideri, accanto alla curva (33), la quartica generale del fascio predetto

$$c_1^k x_2^2 + \mu\, c_2^k x_3^2 = 0. \tag{34}$$

Si può in una maniera ben determinata stabilire il valore del parametro μ così che la retta t sia una delle tre tangenti della curva (34) nel punto triplo O. Indicando con R_1, R_2, P ordinatamente i punti d'intersezione di t colle curve c_1^k, c_2^k (33), si ha allora

$$(R_1\, R_2\, O\, P) = \mu. \tag{35}$$

Ora l'equazione delle tangenti della curva (34) nel punto triplo O è

$$b\, x_2^3 + \mu\, a'\, x_3^3 = x_4 = 0. \tag{36}$$

Ma questa equazione rappresenta un'involuzione cubica I_3^1, proiettiva col sistema dei valori del parametro μ, sì che al valore $\mu = 0$ ($\mu = \infty$) corrisponde la tangente asintotica α_1 (α_2) contata tre volte, mentre le tangenti di Darboux-Segre corrispondono al valore $\mu = 1$. Si è dunque condotti al problema già accennato nel n.° 2, di costruire le tangenti di Darboux-Segre dalle curvature delle asintotiche, al quale torneremo nel n.° 12.

10. Nella Memoria di Segre « *Complementi alla teoria*, ecc. », citata nel n.° 2, si rileva l'esistenza di un cono di centro O, della sesta classe in generale, e di una curva del sesto ordine nel piano ω, le quali godono della proprietà seguente: Il cono circoscritto alla superficie Π da un punto della *curva di* SEGRE tocca la superficie in una curva la quale ammette un piano tangente del *cono di* SEGRE come piano iper-osculatore, e correlativamente. L'equazione (13) della Memoria citata del *cono di* SEGRE, nel sistema di riferimento di cui qui si fa uso, è

$$\left.\begin{aligned} &4\,a'^2\,\xi_2^6 - 4\,b^2\,\xi_3^6 + 4\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,(a'\,\xi_2^3 - b\,\xi_3^3) + \\ &+ \xi_2\,\xi_3\,(a'_v\,\xi_2^4 - 2\,a'_u\,\xi_2^3\,\xi_3 + 2\,b_v\,\xi_2\,\xi_3^3 - b_u\,\xi_3^4) = \xi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Trasformando mediante $\Sigma_{3/2}$, si ha la curva

$$x_4 = b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3\,x_3 + 2\,a'_u\,x_2\,x_3^3 - a'_v\,x_3^4 - 4\,(b\,x_2^3 - a'\,x_3^3)\,x_1 = 0, \tag{38}$$

che è una quartica con punto triplo in O, toccante ivi le tre tangenti coniugate a quelle di DARBOUX-SEGRE. Ora questa equazione si può scrivere

$$c_1^k\,x_2^2 - c_2^k\,x_3^2 = 0, \tag{39}$$

il che ci conduce alle stesse considerazioni fatte sopra. Essendo Q l'intersezione della curva (39) colla tangente t, si ha, invece dell'equazione (35), quest'altra

$$(R_1\,R_2\,O\,Q) = -\mu. \tag{40}$$

Si ha anche

$$(R_1\,R_2\,P\,Q) = -1.$$

Però dobbiamo osservare che, nel caso attuale, il valore del parametro k resta ad arbitrio nostro.

11. Nel n.° 6 abbiamo ottenuto una costruzione assai semplice per i piani osculatori delle linee coniugate a quelle di DARBOUX-SEGRE ed i punti di regresso delle sviluppabili circoscritte alla superficie lungo queste. Proponiamoci ancora lo stesso problema per le linee di DARBOUX-SEGRE. Nella Memoria « *O trilineárních*, ecc. », citata nel n.° 7, ho provato che, data sulla superficie una famiglia di curve mediante l'equazione differenziale

$$\frac{dv}{du} = \tau\,(u,\ v), \tag{41}$$

l'equazione del piano osculatore della curva della famiglia passante per il punto in considerazione è

$$2\,\tau^2\,x_2 - 2\,\tau\,x_3 + (\tau_u + \tau\,\tau_v - 2\,b + 2\,\tau^3\,a')\,x_4 = 0, \tag{42}$$

mentre l'equazione del punto di regresso della sviluppabile circoscritta è

$$-2\tau^2\xi_3+2\tau\xi_2+(\tau_u+\tau\tau_v+2b-2\tau^3a')\xi_1=0. \tag{43}$$

Nel caso attuale delle linee di DARBOUX-SEGRE, τ è radice dell'equazione cubica

$$\tau^3a'+b=0 \tag{44}$$

sicchè le coordinate del punto di regresso sono

$$x_1:x_2:x_3:x_4=(\tau_u+\tau\tau_v+4b):2\tau:-2\tau^2:0. \tag{45}$$

Complessivamente si hanno tre punti, corrispondenti alle tre radici della (44). Per questi punti mandiamo una conica k_i $(i=1,\ 2)$, toccante α_i nel punto O. Si trova come equazione di k_1, essendo $\rho=e^{\frac{2\pi i}{3}}$:

$$\begin{vmatrix} x_2^2, & x_3^2, & x_1x_2, & x_2x_3, \\ 4\tau^2, & 4\tau^4, & 2\tau(\tau_u+\tau\tau_v+4b), & -4\tau^3 \\ 4\rho^2\tau^2, & 4\rho\tau^4, & 2\rho\tau(\rho\tau_u+\tau^2\tau_v+4b), & -4\tau^3 \\ 4\rho\tau^2 & 4\rho^2\tau^4, & 2\rho^2\tau(\rho^2\tau_u+\tau\tau_v+4b), & -4\tau^3 \end{vmatrix}=0.$$

Alla terza colonna del determinante, si aggiunga la prima moltiplicata per $-\frac{\tau_v}{2\tau}$, la seconda moltiplicata per $-\frac{2b}{\tau^3}$, e la quarta moltiplicata per $\frac{\tau_0}{2\tau}$; si trova così come valore del determinante

$$-2^6\tau^6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho^2 & \rho & 1 \\ \rho & \rho^2 & 1 \end{vmatrix}(2\tau^3x_1x_2-\tau^2\tau_ux_2^2-4bx_3^2+\tau^2\tau_vx_2x_3).$$

Semplificando ancora mediante l'equazione (44) e le sue derivate, abbiamo come equazione della conica k_1:

$$x_4=6a'bx_1x_2+12a'^2bx_3^2-(a'b_u-a'_ub)x_2^2+(a'b_v-a'_vb)x_2x_3=0. \tag{46}$$

Scambiando u, x_2, a' con v, x_3, b, si ha l'equazione della conica k_2:

$$x_4=6a'bx_1x_3+12a'b^2x_2^2+(a'b_v-a'_vb)x_3^2-(a'b_u-a'_ub)x_2x_3=0. \tag{47}$$

I tre punti di regresso, insieme con O *sono l'intersezione delle due coniche* k_1 e k_2, cosicchè si tratta ancora della posizione di queste. Ma l'equazione (46) può scriversi

$$x_4 = \left[6\, a'\, b\, x_1 - (a'\, b_u - a'_u\, b)\, x_2 + (a'\, b_v - a'_v\, b)\, x_3\right] x_2 + 12\, a'^2\, b\, x_3^2 = 0.$$

Confrontando colla (21), si vede che k_1 tocca le rette α_1, l, intersezioni con α_2; similmente k_2. La determinazione di queste due coniche si finisce allora osservando che la curvatura in O di ciascuna è il doppio di quella della curva asintotica corrispondente. Correlativamente per *i piani osculatori delle linee di* Darboux-Segre; ma si può anche cambiare il segno delle curvature di k_1 e k_2 in O e poi costruire i piani polari rispetto a H, delle intersezioni delle due coniche così ottenute.

12. Si vede subito l'esattezza del seguente corollario del risultato or ora raggiunto: *Nel piano* ω *si conduca una retta arbitraria* r, *pur non passante per* O. *Si costruisca una conica* s_i $(i, j = 1, 2)$, *toccante le rette* α_i, r *nelle intersezioni con* α_j. *Se, nel punto* O, *la curvatura della conica* s_i *è il prodotto di* λ_i *per quella della curva asintotica corrispondente, si ottiene, congiungendo* O *coi tre altri punti d'intersezione delle due coniche* s_1, s_2, *quel gruppo dell'involuzione* I_3^1, *rappresentata dalla equazione* (36), *che corrisponde al valore* $-\lambda_1 : \lambda_2$ *del parametro* μ. *Specialmente si hanno le tangenti di* Darboux-Segre *per* $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ *e quelle coniugate per* $\lambda_1 = \lambda_2$. Ora si può facilmente condurre al termine la costruzione delle curve (33) e (39). Occorre stabilire il valore del parametro μ corrispondente a quel gruppo di I_3^1 che contiene la tangente data t. Sia R_i $(i, j = 1, 2)$ l'intersezione di t con c_i^k, S_i l'intersezione di α_i con c_j^k. La tangente di c_1^k in S_2 intersechi α_1 nel punto T. Si costruisca la conica c, la quale tocca le tangenti passanti per S_2 nei punti O e T e passa per R_1. Allora il rapporto delle curvature delle coniche c_2^k e c in O è $-\mu$. Si può facilmente rappresentarlo con un rapporto anarmonico. Basta costruire la retta congiungente le due intersezioni, diverse da O, delle coniche c_2^k e c, la quale intersechi α_1 in U. Si ha poi

$$-\mu = (O\, U\, T\, S_1). \tag{48}$$

Indicando, come sopra, con Q l'intersezione della retta t colla curva (38), abbiamo dunque

$$(O\,Q\,R_1\,R_2) = (O\,U\,T\,S_1)$$

ed il punto Q si ottiene, congiungendo l'intersezione delle rette $R_1\,T$, $R_2\,S_1$ col punto U e segando colla retta t. Il punto P d'intersezione di t con D^λ, valendo la (28), è il coniugato armonico di Q rispetto a R_1, R_2; ricordiamo che, se si è scelta la quadrica di LIE per la quadrica Q^λ, si deve porre $k = -\frac{3}{4}$, determinare cioè le coniche c_1^k, c_2^k così che le curvature in O siano le curvature delle asintotiche divise per due.

Torino, Ottobre 1921.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XXXI della Serie III, pag. 191 e seguenti.

TIPO-LIT. TURATI LOMBARDI e C.
Milano, 1922.