Eduard Čech

I fondamenti della geometria proiettiva differenziale secondo il metodo di Fubini

Ann. Mat. Pura Appl. (3) 31 (1922), 251-278

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500862

I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini.

(*Di* EDUARD ČECH, *a Praga.*)

In una serie di Memorie (¹), il prof. FUBINI ha edificato in questi ultimi anni i fondamenti della geometria proiettivo-differenziale delle ipersuperficie (²) col metodo delle forme differenziali, che si era mostrato tanto efficace nella geometria metrica. Studiando queste ricerche, mi sono accorto sempre più che la natura intima del metodo appare più chiara, se si fa uso conseguente del principio di dualità. Inoltre mi è sembrato sempre più fondamentale l'ufficio compiuto in tali ricerche dalla scelta dei fattori arbitrarî delle coordinate omogenee dei punti e iperpiani tangenti. Analizzando il significato geometrico di tale scelta, mi sono convinto che occorre, anche per le applicazioni, di estendere le formole date dal FUBINI per le coordinate normali, al caso che i fattori detti siano fissati in modo qualunque. Nello sviluppo di tali idee mi è stata molto utile anche una Memoria del prof. SANNIA (³), di prossima pubblicazione negli *Annali di Matematica*, gentilmente fattami conoscere dall'Autore, del che gli esprimo qui la mia riconoscenza. Si è mostrato opportuno di esporre i risultati che ho ottenuti in modo da potersi leggere senza supporre la conoscenza dei lavori del prof. FUBINI in argomento. Avendo qui reso più intuitivi i concetti analitici introdotti dal FUBINI mediante qualche considerazione geometrica, posso forse sperare di avere anche reso con ciò più evidente la loro importanza. Rilevo, fra i risultati particolari che sem-

---

(¹) V. specialmente la Memoria: *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale.* Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. 43, 1918-19.

(²) E anche in altri casi.

(³) *Riavvicinamento di geometrie differenziali delle superficie: ordinaria, affine, proiettiva, ecc.*

brano nuovi, la generalizzazione della quadrica di Lie e del gruppo delle tangenti di Segre alle ipersuperficie, e l'estensione delle due forme differenziali, e dell'applicazione proiettiva, alle *varietà d'elementi*.

Ho divisa la Memoria in tre parti. Nella prima pongo il concetto generale della congruenza delle normali e deduco le equazioni fondamentali per una scelta fissa dei fattori delle coordinate. Nella seconda parte studio l'effetto della moltiplicazione per fattori arbitrarii delle coordinate, considero la normalizzazione delle coordinate, delle forme e delle normali, e infine studio le geodetiche della forma quadratica. Nella terza parte dò un breve cenno dell'estensione della teoria alle varietà di elementi.

§ 1.

Consideriamo in uno spazio lineare S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni un'ipersuperficie Π. Indichiamo sempre con una lettera sola, x e ξ rispettivamente, $\left(\text{e analogamente } \frac{\partial x}{\partial u_i}, X, \ldots\right)$ le coordinate omogenee dei punti e degli iperpiani tangenti di Π, le quali siano funzioni date di n variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots u_n$. Saranno dunque identicamente soddisfatte le equazioni

$$S x \xi = S \xi d x = S x d \xi = 0 \tag{1}$$

dove, come sempre nel seguito, il simbolo S significa la somma estesa alle diverse $n+2$ coordinate. Ora la nostra ipersuperficie non muta:

1.° moltiplicando tutte le x per un fattore ρ e le ξ per σ, le funzioni ρ e σ delle u essendo legate all'unica condizione $\rho\sigma \neq 0$;

2.° cambiando comunque le variabili indipendenti $u_1, \ldots, u_n$; e infine, trattandosi di geometria *proiettiva*;

3.° eseguendo sulle x e ξ due sostituzioni lineari contragredienti, a coefficienti *numerici* e a determinante uguale all'unità. Però tutti i calcoli che si faranno saranno tali da non mutare eseguendo le operazioni 2 e 3. In quanto all'operazione 1, cominciamo per supporre scelti in modo *fisso* i fattori delle x e delle ξ, mentre più tardi studieremo l'effetto del cambiamento di essi. Astraendo da fattori *numerici* delle coordinate, possiamo dare a questa scelta un significato geometrico semplice. Cominciamo con le ξ. Ad ogni punto di Π associamo la retta intersezione degli iperpiani

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \ldots, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \tag{2}$$

evidentemente indipendente dalla scelta delle variabili indipendenti. Questa retta, passante per il punto x, sarà per brevità di linguaggio nel seguito chiamata semplicemente la *normale*. Si può osservare che prendendo per le ξ i coseni direttori e la distanza dall'origine, essa coincide colla normale metrica, e similmente nello spazio non euclideo prendendo per ξ le coordinate di Weierstrass. Però data una congruenza di rette [4] affinchè sia possibile scegliere il fattore delle ξ in modo che essa diventi la congruenza delle normali, è necessario che sia soddisfatta una condizione che si vedrà alla fine di questo paragrafo. Per ora osserviamo soltanto che, date le normali, il fattore delle ξ è determinato a meno di un fattore numerico. Per il seguito, ci conviene di fissare sopra ogni normale un punto X e il fattore delle sue coordinate secondo le condizioni

$$S X \xi = 1, \quad S X \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0 \text{ [5]}. \tag{3}$$

Correlativamente l'S_{n-1} determinato dai punti

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial u_n} \tag{4}$$

sarà chiamato l'S_{n-1} *pseudonormale*. Per esso si farà passare l'iperpiano Ξ secondo le equazioni

$$S \Xi x = 1, \quad S \Xi \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0. \tag{5}$$

L'indeterminazione che resta nelle X, Ξ si può del resto, come vedremo, togliere in modo intrinseco.

Ci occorre considerare ancora un altro ente geometrico legato alla scelta dei fattori delle x e ξ. Si tratta della proiettività π fra i punti di ξ e gli

[4] Congruenza di rette sarà per noi varietà ∞^n di rette.

[5] Gli indici i, k, l, r, s vanno sempre da 1 a n. Queste notazioni e formole coincidono con quelle del Fubini nel caso di coordinate *normali*.

iperpiani per x, nella quale al punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} \tag{6}$$

corrisponde l'iperpiano

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} . \tag{6'}$$

In questa proiettività, in particolare, l'S_{n-1} pseudonormale e la normale si corrispondono. Anzi, essa si può definire come quella proiettività nella quale si corrispondono tutti gli S_{n-1} pseudonormali e rette normali, ai quali si giunge moltiplicando le x e ξ per *lo stesso* fattore. Estendiamo questa proiettività a tutto lo spazio facendo corrispondere al punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu X \tag{α}$$

l'iperpiano

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu \Xi.$$

Osserviamo che (α) definisce $\lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_n, \mu$ come coordinate *locali* dei punti di S_n, cioè in un sistema di riferimento variabile al variare delle u. La proiettività estesa è la polarità rispetto ad una quadrica Q, la cui equazione nelle coordinate locali è

$$\sum_{ik} \Delta_{ik} \lambda_i \lambda_k - 2 \lambda \mu - \mu^2 S X \Xi = 0 \tag{7}$$

dove le Δ_{ik} sono quantità che ora definiremo. Vedremo più tardi che Q è una *quadrica osculatrice* di Π, vale a dire ha con Π un contatto del secondo ordine.

In ciò che precede si è tacitamente ammesso che gli iperpiani (2) e i punti (4) sono linearmente indipendenti. Noi anzi, *in tutto ciò che segue,* ammettiamo che ciascuna delle due matrici

$$\left\| x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} \right\|, \quad \left\| \xi, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \right\|$$

sia di caratteristica $n+1$, cioè che Π è proprio una ipersuperficie sia come luogo di punti, sia come inviluppo d'iperpiani. Questa supposizione si può esprimere introducendo la *forma quadratica differenziale*, di importanza fondamentale per il seguito,

$$F_2 = -S\, d x\, d \xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, d u_k, \tag{8}$$

la quale, per le (1), si può anche scrivere

$$F_2 = S\, \xi\, d^2 x = S\, x\, d^2 \xi, \tag{8 bis}$$

sicchè

$$\Delta_{ik} = S\, \xi \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_k} = -S \frac{\partial \xi}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} = S\, x \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\, \partial u_k}. \tag{9}$$

Invero si riconosce subito che la supposizione fatta equivale all'altra

$$\nabla = |\, \Delta_{ik}\, | \neq 0. \tag{10}$$

Accanto alla forma F_2 uguale importanza ha per noi la forma differenziale cubica

$$\Lambda_3 = S\, (d x\, d^2 \xi - d \xi\, d^2 x) = 2 \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l, \tag{11}$$

dove i differenziali secondi delle u non entrano che in apparenza. Si ha

$$\Lambda_3 = \sum_{ikl} \left(\frac{\partial x}{\partial u_l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\, \partial u_k} - \frac{\partial \xi}{\partial u_l} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_k} \right) d u_i\, d u_k\, d u_l$$

e da ciò semplicemente

$$2\, D_{ikl} = \frac{\partial x}{\partial u_l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\, \partial u_k} - \frac{\partial \xi}{\partial u_l} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_k}, \tag{12}$$

perchè, definendo D_{ikl} dalle equazioni (12) e derivando le (9) si trova subito che

$$D_{ikl} = D_{ilk}.$$

Ora, derivando le (9), si ottiene

$$\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} = -\frac{\partial}{\partial u_k} S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial \xi}{\partial u_l} = -S \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_k} \frac{\partial \xi}{\partial u_l} - S \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_k\, \partial u_l} \frac{\partial x}{\partial u_i},$$

$$\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} = -\frac{\partial}{\partial u_i} S \frac{\partial x}{\partial u_l} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} = -S \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_l} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} - S \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\, \partial u_k} \frac{\partial x}{\partial u_l},$$

$$-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l} = \frac{\partial}{\partial u_l} S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} = S \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_l} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} + S \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_k\, \partial u_l} \frac{\partial x}{\partial u_i},$$

e sommando

$$\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l} = -S \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} \frac{\partial \xi}{\partial u_l} - S \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k} \frac{\partial x}{\partial u_l}.$$

Questa equazione, confrontata con (12), ci dà

$$\left.\begin{aligned} & S \xi \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} = \Delta_{ik}, \\ & S \frac{\partial \xi}{\partial u_l} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} = -D_{ikl} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right], \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} & S x \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k} = \Delta_{ik}, \\ & S \frac{\partial x}{\partial u_l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k} = +D_{ikl} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Ora i punti x, $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}$, X essendo $n+2$ punti linearmente indipendenti, valgono necessariamente equazioni del tipo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} = \sum_l A_{ikl} \frac{\partial x}{\partial u_l} + C_{ik} X + b_{ik} x.$$

Ora sostituendo queste espressioni al posto di $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k}$ nelle equazioni (13), si ha, ricordando (1), (3) e (9),

$$C_{ik} = \Delta_{ik}, \quad \sum_r A_{ikr} \Delta_{lr} = D_{ikl} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right].$$

Indichiamo con ϑ_{ik} il complemento algebrico di Δ_{ik} in $\nabla = |\Delta_{ik}|$ diviso per ∇ stesso, sicchè

$$\sum_i \vartheta_{ik} \Delta_{il} = 1 \text{ o } 0 \tag{14}$$

rispettivamente se $k = l$ oppure $k \gtrless l$, e con $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ i simboli di Christoffel per la forma F_2

$$\left\{ {ik \atop r} \right\} = \frac{1}{2} \sum_l \vartheta_{lr} \left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right]$$

e otteniamo

$$A_{ikr} = \sum_l \vartheta_{lr} D_{ikl} + \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\}.$$

Così abbiamo trovate le *equazioni fondamentali per le coordinate* x:

$$x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} + \Delta_{ik} X + b_{ik} x. \tag{15}$$

Similmente dalle (13') si trovano le *equazioni fondamentali per le coordinate* ξ:

$$\xi_{ik} = - \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial \xi}{\partial u_s} + \Delta_{ik} \Xi + \beta_{ik} \xi. \tag{15 bis}$$

Qui x_{ik} e ξ_{ik} sono le derivate seconde covarianti costruite rispetto alla forma F_2,

$$x_{ik} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} - \sum_r \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_r} \text{ (e analoghe per le } \xi_{ik}).$$

Le equazioni fondamentali (15) e (15 bis) stesse mostrano che le forme differenziali

$$\sum_{ik} b_{ik} \, d u_i \, d u_k, \quad \sum_{ik} \beta_{ik} \, d u_i \, d u_k$$

sono forme covarianti della F_2. Possiamo usare queste forme, se vogliamo togliere l'indeterminazione che ci è restata per X e Ξ. Invero, sostituendo $X + \lambda x$ al posto di X, b_{ik} si muta in $b_{ik} + \lambda \Delta_{ik}$ e si può supporre

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} b_{ik} = 0,$$

relazione intrinseca, che determina X univocamente. Similmente, per fissare Ξ, si può supporre

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} \beta_{ik} = 0.$$

Inversamente si supponga l'ipersuperficie Π definita (a meno di collineazioni) dalle equazioni differenziali cui soddisfano le x. Introducendo un'incognita ausiliaria τ, queste equazioni saranno del tipo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} = \sum_r A_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_r} + \Delta_{ik} \tau + b_{ik} x. \tag{16}$$

Derivando si ricavano

$$\Delta_{ik} \frac{\partial \tau}{\partial u_l} - \Delta_{il} \frac{\partial \tau}{\partial u_k}$$

come forme lineari in x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$, τ. Ora se, come in tutta questa Memoria, si suppone che l'ipersuperficie Π abbia proprio ∞^n iperpiani tangenti distinti, il determinante $\nabla = |\Delta_{ik}|$ è diverso da zero, sicchè si trova in un modo ben determinato (le equazioni non possono essere contraddittorie)

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = a_i \tau + \cdots,$$

dove i termini trascurati sono forme lineari in x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$. Se si sceglie il fattore di proporzionalità delle ξ in modo che sia

$$S \tau \xi = 1, \tag{17}$$

si passa dalle equazioni (16) alle (15) ponendo

$$\tau = X + \sum_{ik} \vartheta_{ik} a_i \frac{\partial x}{\partial u_k}. \tag{18}$$

Invero le equazioni (3) si trovano essere soddisfatte. È dunque facile costruire le forme F_2 e Λ_3 per un'ipersuperficie definita dalle equazioni (16).

Quale è il significato geometrico delle equazioni $F_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$? È ben noto che $F_2 = 0$ dà il *cono delle tangenti all'intersezione di* Π *e* ξ. Similmente $\Lambda_3 = 0$ rappresenta il *cono delle tangenti all'intersezione di* Π *colla quadrica osculatrice* Q. Per dimostrare questa proposizione, calcoliamo le coordinate locali del punto

$$x + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \cdots$$

Si ha

$$d^2 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta^2 u_i + \sum_{ik} x_{ik} \, du_i \, du_k,$$

$$d^3 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta^3 u_i + 3 \sum_{ik} x_{ik} \, du_i \, \delta^2 u_k + \sum_{ikl} x_{ikl} \, du_i \, du_k \, du_l,$$

dove x_{ik} e x_{ikl} sono le derivate covarianti e

$$\delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\} d u_r\, d u_s\,, \quad \delta^3 u_i = d\,(\delta^2 u_i) + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\} d u_r\, \delta^2 u_s$$

sono i differenziali controvarianti (6).

Le (15) dànno subito

$$d^2 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta^2 u_i + \sum_{ikrs} \vartheta_{rs} D_{ikr}\, d u_i\, d u_k \frac{\partial x}{\partial u_s} + F_2 X + x \sum_{ik} b_{ik}\, d u_i\, d u_k\,,$$

e derivando covariantemente le (12) e ricordandoci che $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ è una combinazione lineare di x e $\frac{\partial x}{\partial u_i}$, troviamo per $d^3 x$ una forma lineare in x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ e X, nella quale il coefficiente di X vale

$$3 \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k + \sum_{iklrs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \Delta_{ls}\, d u_i\, d u_k\, d u_l = 3 \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k +$$
$$+ \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l\,.$$

Così si ottiene

$$x + d x + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \cdots = \lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu X,$$

dove

$$\lambda = 1 + \sum_{ik} b_{ik}\, d u_i\, d u_k + \cdots, \quad \lambda_i = d u_i + \frac{1}{2} \left(\delta^2 u_i + \sum_{krs} \vartheta_{ik} D_{krs}\, d u_r\, d u_s \right) + \cdots,$$

$$\mu = \frac{1}{2} F_2 + \frac{1}{2} \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k + \frac{1}{6} \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l + \cdots$$

Da ciò segue

$$\sum_{ik} \Delta_{ik} \lambda_i \lambda_k = F_2 + \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k + \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l + \cdots,$$

$$\frac{2\mu}{\lambda} - \sum_{ik} \Delta_{ik} \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{\lambda_k}{\lambda} = 2\mu - \sum_{ik} \Delta_{ik} \lambda_i \lambda_k + \cdots = -\frac{2}{3} \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l + \cdots,$$

da cui si vede l'esattezza della proposizione enunciata. (Il termine in μ^2 nel-

(6) Cf. G. Fubini, *I differenziali controvarianti*, Atti Acc. Torino, vol. 54, 17-11-1918.

l'equazione della Q appare trascurabile, perchè infinitesimo di ordine superiore).

La congruenza delle normali dipende, come sappiamo, dal fattore delle ξ; moltiplicando queste per σ, essa viene sostituita dalla congruenza delle rette $x\,Z$, dove Z soddisfa alle equazioni

$$S\,Z\,\frac{\partial}{\partial u_i}(\sigma\,\xi)=0$$

ossia

$$S\,Z\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)=0 \tag{19}$$

dove $\alpha_i=\frac{\partial \log \sigma}{\partial u_i}$ sicchè

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k}=\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i}. \tag{20}$$

Sia ora Z un punto soluzione delle equazioni (19), senza che siano necessariamente soddisfatte le condizioni (20) per una congruenza delle normali. Si supporrà $S\,Z\,\xi \neq 0$, che esprime che Z non sta nell'iperpiano ξ. Cerchiamo le *sviluppabili* della congruenza $x\,Z$, ossia le curve con tangenti appartenenti alla congruenza. Se

$$Z+\lambda\,x$$

è il punto di contatto della tangente $x\,Z$ di una tale curva, è possibile determinare $d\,u_i$ in guisa che sia

$$d\,(Z+\lambda\,x)=\mu\,(Z+\lambda\,x),$$

ciò che equivale alle equazioni

$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)d\,(Z+\lambda\,x)=0,$$

le quali, differenziando l'identità

$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)(Z+\lambda\,x)=0$$

che è conseguenza di (19), si possono scrivere anche

$$S\,(Z+\lambda\,x)\,d\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)=0.$$

Se si sviluppano queste condizioni tenendo conto di (9) e (19) si ottiene

$$\sum_k d u_k \left\{ \lambda \Delta_{ik} + S Z \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k} + \xi \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k} - \alpha_i \alpha_k \right) \right] \right\} = 0.$$

Ma i valori di $d u_1, \; d u_2, \ldots, \; d u_n$ soddisfacenti a queste equazioni danno quelle direzioni della stella $(d u_1, \; d u_2, \ldots, \; d u_n)$, alle quali corrispondono i medesimi spazî in tutte le correlazioni del fascio

$$\lambda \sum_{ik} \Delta_{ik} \, d u_i \, \delta u_k + \sum_{ik} S Z \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k} + \xi \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k} - \alpha_i \alpha_k \right) \right] d u_i \, \delta u_k = 0. \qquad (21)$$

Supponiamo, come avviene in generale, che il determinante caratteristico del fascio (21) abbia *n radici distinte.* In questa ipotesi esistono precisamente n direzioni cercate. Ora fra le correlazioni del fascio (21) ve ne è una simmetrica, la polarità rispetto a $F_2 = 0$; e, come è noto, e si dimostra facilmente, le nostre n direzioni formano un n — edro polare o coniugato rispetto a questa quadrica allora e allora soltanto che tutte le correlazioni del fascio sono simmetriche, ossia soltanto se sono soddisfatte le condizioni (20). Vediamo dunque che *condizione necessaria e sufficiente* [7] *affinchè una congruenza possa considerarsi come congruenza di normali è che tale congruenza sia coniugata all'ipersuperficie* Π *nel senso che le n direzioni su* Π *corrispondenti alle sviluppabili della congruenza formino un n — edro polare della quadrica delle direzioni asintotiche.*

Applicando l'equazione (21) in particolare alla congruenza $x X$ delle normali corrispondenti al fattore speciale delle ξ che si considera si trova ricordando (15 bis)

$$(\lambda + S X \Xi) \sum_{ik} \Delta_{ik} \, d u_i \, \delta u_k + \sum_{ik} \beta_{ik} \, d u_i \, \delta u_k = 0, \qquad (21 \text{ bis})$$

sicchè *le n direzioni su* Π *corrispondenti alla congruenza $x X$ delle normali formano l'n — edro polare comune delle due quadriche*

$$F_2 = 0, \; \sum_{ik} \beta_{ik} \, d u_i \, d u_k = 0$$

e sopra ogni normale, il gruppo dei fochi è proiettivo al gruppo delle quadriche speciali del fascio determinato da quelle due. Correlativamente dicasi per la forma $\sum_{ik} b_{ik} \, d u_i \, d u_k$ e la congruenza degli spazî pseudonormali.

---

(7) *Sotto l'ipotesi fatta sul determinante caratteristico del fascio* (21).

§ 2.

Moltiplichiamo ora le x per un fattore ρ e le ξ per un fattore σ. Dalle definizioni (8) e (11) delle forme F_2 e Λ_3 si vede immediatamente l'effetto di questa moltiplicazione sulle due forme:

$$F'_2 = \rho\,\sigma\,F_2\,, \quad \Lambda'_3 = \rho\,\sigma\left(\Lambda_3 + 3\,F_2\,d\log\frac{\rho}{\sigma}\right). \tag{22}$$

In particolare per $\rho = \sigma$ le equazioni $\Lambda_3 = 0$, $\Lambda'_3 = 0$ sono equivalenti, come devono essere secondo il loro significato geometrico. Ponendo

$$\tau_i = \frac{\partial}{\partial u_i}\log\frac{\rho}{\sigma}\,, \tag{23}$$

la forma Λ_3, al variare di ρ e σ, descrive il sistema lineare

$$\Lambda'_3 = \rho\,\sigma\,[\Lambda_3 + 3\,F_2\,(\tau_1\,d\,u_1 + \tau_2\,d\,u_2 + \cdots + \tau_n\,d\,u_n)]. \tag{24}$$

Per $u_1, \ldots, u_n$ *fisse*, è sempre possibile determinare ρ e σ in guisa che Λ'_3 coincida con una forma *generica* (il coefficiente di Λ_3 deve essere diverso da zero) del sistema lineare. Un tal sistema lineare rappresenta, come è noto, un'ipersuperficie cubica di uno spazio ad n dimensioni con un punto doppio corrispondente alla quadrica fondamentale $F_2 = 0$ del sistema lineare. A tali ipersuperficie ben determinate dello spazio ξ si arriva qui colla seguente considerazione geometrica: Essendo y un punto generico dell'iperpiano ξ, si seghi Π con tutti i piani passanti per la retta $x\,y$ e si costruiscano le rette polari del punto y rapporto alle coniche osculatrici (con contatto cinquepunto) di ognuna delle curve sezioni. Il luogo di queste rette, al variare del piano per la retta $x\,y$, è un iperpiano η della stella x (8); precisamente l'iperpiano polare di y rispetto ad una qualunque di quelle quadriche osculatrici per le quali il cono $\Lambda'_3 = 0$ contiene la tangente $x\,y$. Correlativamente si ritorna dall'iperpiano η al punto y. Così nasce una corrispondenza birazionale fra gli iperpiani η della stella x e i punti dell'i-

(8) Proveremo più oltre una proposizione più generale.

perpiano ξ, nella quale agli iperpiani passanti per una retta generica della stella x si vede corrispondere un' ipersuperficie cubica dello spazio ξ imagine del sistema lineare (24), con punto doppio in x, nel quale $F_2 = 0$ è il cono delle tangenti.

Se

$$\Lambda'_3 = 2 \sum_{ikl} D'_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l,$$

dalla (24) si ha

$$2 D'_{ikl} = \rho \sigma \left[2 D_{ikl} + \Delta_{kl} \tau_i + \Delta_{li} \tau_k + \Delta_{ik} \tau_l \right].$$

Da ciò si vede che è possibile, e in un sol modo, di determinare le τ_i così che la forma Λ'_3 sia *apolare* o coniugata alla reciproca della forma F_2, cioè secondo le condizioni

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} D'_{ikl} = 0.$$

Infatti queste equazioni dànno

$$\tau_r = -\frac{2}{n+2} \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr}. \tag{25}$$

Indichiamo con F_3 tale forma cubica, cioè poniamo

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{6}{n+2} F_2 \sum_{ikl} \vartheta_{ik} D_{ikl}\, d u_l = 2 \sum_{ikl} \Delta_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l, \tag{26}$$

$$\Delta_{ikl} = D_{ikl} - \frac{1}{n+2} \sum_{rs} \vartheta_{rs} (\Delta_{kl} D_{rsi} + \Delta_{li} D_{rsk} + \Delta_{ik} D_{rsl}), \quad \sum_{ik} \vartheta_{ik} \Delta_{ikl} \equiv 0. \tag{26 bis}$$

Si può fare la verifica che, moltiplicando x e ξ per ρ e σ rispettivamente, si ottiene

$$F'_3 = \rho \sigma F_3, \tag{27}$$

sicchè la forma differenziale fratta $\dfrac{F_3}{F_2}$ ha un valore unico.

È possibile determinare ρ e σ in guisa che sia $F'_3 = \Lambda'_3$? Formalmente si ha la condizione

$$\log \frac{\rho}{\sigma} = -\frac{2}{n+2} \int \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikl}\, d u_l, \tag{28}$$

ma bisogna vedere se la quantità sotto il segno $\int$ è un differenziale esatto.

È facile vedere che ciò infatti avviene sempre. Perciò si considerino i determinanti

$$\nabla_1 = \left| x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, X \right|, \quad \nabla_2 = \left| \xi, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial u_n}, \Xi \right|. \tag{29}$$

Per il calcolo pratico di questi determinanti si può osservare che ∇_1, ad esempio, non muta se al posto di X mettiamo un altro punto qualunque X' soddisfacente l'unica condizione

$$S\,X'\,\xi = 1.$$

Del resto si può dire, senza parlare del punto X, che ∇_1 è il rapporto dei determinanti della matrice

$$\left\| x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_n} \right\|$$

alle quantità ξ loro proporzionali; similmente per ∇_2. Calcoliamo le derivate logaritmiche di (29), facendo uso delle equazioni fondamentali (15) e (15 bis) e ricordandoci che $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ è combinazione lineare di x e $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ e similmente $\frac{\partial \Xi}{\partial u_i}$. Così si trova

$$\frac{\partial \log \nabla_1}{\partial u_k} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ i \end{matrix} \right\} + \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr}, \quad \frac{\partial \log \nabla_2}{\partial u_r} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ i \end{matrix} \right\} - \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr}$$

e sottraendo [9]

$$2 \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr} = \frac{\partial}{\partial u_r} \log \frac{\nabla_1}{\nabla_2}, \tag{30}$$

il che prova ciò che si era enunciato, e permette di scrivere (26) sotto la forma

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{3}{n+2} F_2\, d \log \frac{\nabla_1}{\nabla_2}. \tag{31}$$

Così siamo giunti al risultato che, *scelto comunque il fattore delle x, si*

---

(9) Invece sommando si ha la nota formola del calcolo assoluto $\frac{\partial \log \sqrt{\nabla}}{\partial u_r} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ i \end{matrix} \right\}$, essendo evidentemente $\nabla_1 \nabla_2 = (-1)^{n-1} \nabla$.

può determinare il fattore delle ξ (e in un modo solo, negligendo un fattore numerico) *in guisa che sia* $F_2 \equiv \Lambda_2$.

Interpretiamo in un altro modo l'uguaglianza $F_2 = \Lambda_2$ o, ciò che è lo stesso, le equazioni

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr} = 0. \tag{32}$$

Sia

$$\Delta_2 x = \sum_{ik} \vartheta_{ik} x_{ik} \tag{33}$$

il parametro differenziale secondo di x rispetto alla forma F_2. Dalle equazioni fondamentali (15) si ha

$$S\,\xi\,\Delta_2 x = \sum_{ik} \vartheta_{ik}\,\Delta_{ik} = n,$$

$$S\,\frac{\partial \xi}{\partial u_l}\,\Delta_2 x = -\sum_{ikrs} \vartheta_{ik}\,\vartheta_{rs}\,D_{ikr}\,\Delta_{ls} = -\sum_{ik} \vartheta_{ik}\,D_{ikl}$$

e ricordandoci (3) vediamo che allora e allora soltanto quando le (32) sono soddisfatte, si può scegliere

$$X = \frac{1}{n}\Delta_2 x, \quad \Xi = \frac{1}{n}\Delta_2 \xi. \tag{34}$$

E si vedono anche, con tale scelta di X e Ξ, soddisfatte le equazioni

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik}\,b_{ik} = \sum_{ik} \vartheta_{ik}\,\beta_{ik} = 0, \tag{35}$$

le quali abbiamo visto potersi assumere anche per fattori qualsiansi delle x e ξ.

Sotto queste condizioni, consideriamo ora la quadrica osculatrice Q, cioè quella ipersuperficie quadrica, rispetto alla quale l'iperpiano polare del punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu\,\Delta_2 x \tag{36}$$

è

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu\,\Delta_2 \xi, \tag{36'}$$

i fattori delle x e ξ essendo tali che siano soddisfatte le condizioni (32).

Si vede subito che questa quadrica è ben determinata dall'ipersuperficie Π e dal punto x di essa, giacchè la polarità (36), (36') non muta moltiplicando x e ξ per il medesimo fattore. Per $n=1$, si ha la *conica con contatto cinquepunto*, per $n=2$ la nota *quadrica di Lie*, la quale viene così generalizzata per uno spazio a un numero qualunque di dimensioni. Per il calcolo pratico si può osservare che in (36) e (36′) si potrebbe al posto di $\Delta_2 x$ e $\Delta_2 \xi$ mettere anche

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} \quad \text{e} \quad \sum_{ik} \vartheta_{ik} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k}.$$

Le quadriche di Lie godono della seguente proprietà:

Sia α uno spazio lineare a ν dimensioni ($1 \leqq \nu \leqq n$) passante per un punto O di Π e contenuto nell'iperpiano tangente; le quadriche di Lie (a ν dimensioni) delle sezioni di Π mediante tutti gli spazi $S_{\nu+1}$ a $\nu+1$ dimensioni passanti per α giacciono sopra una quadrica ad n dimensioni.

Le coordinate x dei punti e ξ degli iperpiani tangenti sono date funzioni di n variabili $u_1, u_2, \ldots u_n$, dalle quali si calcolino le due forme F_2 e Λ_3. Per ottenere le coordinate x' dei punti della sezione Π' di Π mediante uno spazio $S_{\nu+1}$ che si supponga dapprima fisso, bisogna porre

$$u_{\nu+1} = \varphi_1(u_1, \ldots, u_\nu), \ldots, u_n = \varphi_{n-\nu}(u_1, \ldots, u_\nu) \tag{37}$$

le φ essendo certe funzioni ben determinate di $u_1, \ldots, u_\nu$. Facendo la sostituzione (37) nelle ξ, si ottengono delle espressioni ξ'. Perchè l'S_n ξ' contiene l'S_ν tangente di Π' in x' [10], si calcolano le due forme F'_2, Λ'_3 di Π' semplicemente dalle equazioni

$$F'_2 = -S\, d x' \, d \xi', \quad \Lambda'_3 = S\,(d x' \, d^2 \xi' - d \xi' \, d^2 x'),$$

e dunque si ottengono F'_2 Λ'_3 eseguendo la sostituzione (37) nelle forme F_2, Λ_3. Ora si determini $\rho = \rho\,(u_1 \ldots u_\nu)$ dalle condizioni

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u_r} = -\frac{2}{\nu+2} \sum_{ik} \vartheta'_{ik} \, D'_{ikr} \qquad (i, k, r = 1, 2 \ldots \nu) \tag{37 bis}$$

dove ϑ'_{ik} e D'_{ikr} si riferiscono alle forme F'_2 e Λ'_3. La forma

$$\Lambda''_3 = \rho\, \Lambda'_3 + 3\, F'_2 \, d\rho$$

---

(10) Per veder chiaramente che le ξ' possono usarsi al posto delle coordinate (nello spazio $S_{\nu+1}$) degli S_ν tangenti di Π', si supponga p. es. che $S_{\nu+1}$ sia uno spazio fondamentale della piramide di riferimento in S_n. Il fatto enunciato risulta in tal caso evidente; ed esso sarà perciò vero generalmente, perchè tutte le nostre formole hanno significato indipendente dalla scelta della piramide fondamentale di riferimento.

è apolare alla reciproca della forma

$$F''_2 = \rho F'_2 .$$

Dal fatto che l'$S_n\ \xi'$ contiene l'S_ν tangente di Π' in x' concludiamo che l'S_n

$$\lambda \xi' + \lambda_1 \frac{\partial \xi'}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_\nu \frac{\partial \xi'}{\partial u_\nu} + \mu \sum_{ik} \frac{\vartheta'_{ik}}{\rho} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_i\, \partial u_k} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots \nu) \tag{38}$$

contiene l'S_ν polare del punto

$$\lambda \cdot \rho x + \lambda_1 \frac{\partial (\rho x')}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_\nu \frac{\partial (\rho x')}{\partial u_\nu} + \mu \sum_{ik} \frac{\vartheta'_{ik}}{\rho} \frac{\partial^2 (\rho x')}{\partial u_i\, \partial u_k} \tag{38'}$$

rispetto alla quadrica di Lie di Π' nel punto O (nelle (38) e (38') bisogna, dopo aver eseguito le derivazioni, sostituire quei valori di $u_1, \ldots, u_\nu$ che appartengono al punto O). Al variare delle λ, λ_i, μ il punto (38') descrive evidentemente lo spazio $S_{\nu+1}$.

La quadrica di Lie di Π' in O compare così come luogo di quei punti (38') che sono contenuti nell'iperpiano (38) corrispondente. Ora si faccia variare l'$S_{\nu+1}$ considerato così che contenga sempre lo spazio fisso α a ν dimensioni. Le funzioni φ nelle (37) dipenderanno oltre che dalle $u_1, \ldots, u_\nu$, da altri $n-\nu$ parametri

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_{n-\nu} \tag{39}$$

i quali determinano l'$S_{\nu+1}$. Dimostreremo che si possono scegliere questi parametri in guisa che i coefficienti di λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ ne siano indipendenti, mentre i coefficienti di μ siano polinomî lineari in essi ([11]). Le espressioni (38) e (38') saranno allora forme lineari nelle $n+2$ quantità indipendenti

$$\lambda, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_\nu, \quad \mu, \quad \mu a_1, \quad \mu a_2, \ldots, \quad \mu a_{n-\nu},$$

sicchè la corrispondenza fra i punti (38') e gli iperpiani (38) sarà una semplice *correlazione* dello spazio ambiente. La *quadrica dei punti d'incidenza* di questa correlazione, cioè la quadrica di quei punti che sono contenuti negli iperpiani corrispondenti, è evidentemente il luogo cercato delle quadriche di Lie delle sezioni.

([11]) Tutto ciò dopo aver sostituito per $u_1 \ldots u_\nu$ quei valori speciali che si riferiscono al punto O.

Per vedere che le quantità (39), convenientemente scelte, compaiono nelle espressioni (38) e (38′) nel modo asserito, supponiamo l'ipersuperficie Π definita dalle equazioni

$$x = (u_1, \quad u_2, \dots, \quad u_n, \quad w, \quad 1),$$

$$\xi = \left(\frac{\partial w}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial w}{\partial u_2}, \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial u_n}, \quad -1, \quad w - \sum_i u_i \frac{\partial w}{\partial u_i}\right),$$

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} u_i u_k + \frac{1}{6} \sum_{ikl} d_{ikl} u_i u_k u_l + \cdots; \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

nel punto O sia $u_1 = \cdots = u_n = 0$, e nei punti dell'S_ν α siano nulle la $(\nu+1)^{ma} \dots (n+1)^{ma}$ coordinata x. Per l'intersezione Π' di Π mediante l'$S_{\nu+1}$ generico passante per α sarà

$$u_{\nu+\lambda} = a_\lambda w \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-\nu).$$

Tutte queste supposizioni sono evidentemente lecite. Si trova dapprima

$$u_{\nu+\lambda} = \varphi_\lambda (u_1, u_2, \dots, u_\nu) = a_\lambda \frac{1}{2} \sum_{ik} c_{ik} u_i u_k + \cdots$$

$$i, k = 1, 2, \dots, \nu, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n-\nu,$$

e se ω è una funzione analitica di $u_1, u_2, \dots, u_n$, e ω' quella funzione di $u_1, u_2, \dots, u_\nu$, che ne sorge sostituendo $u_{\nu+\lambda} = \varphi_\lambda$, si ha

$$\omega = E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} E_{ik} u_i u_k + \cdots,$$

$$\omega' = E_0 + \sum_{i=1}^{\nu} E_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\nu} \left(E_{ik} + c_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n-\nu} E_{\nu+\lambda} a_\lambda\right) u_i u_k + \cdots,$$

sicchè per $u_1 = u_2 = \cdots = u_\nu = 0$

$$\omega' = E_0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial u_i} = E_i, \quad \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u_i \partial u_k} = E_{ik} + c_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n-\nu} E_{\nu+\lambda} a_\lambda .$$

Da ciò si vede che, in O, x', ξ', $\frac{\partial x'}{\partial u_i}$, $\frac{\partial \xi'}{\partial u_i}$ non dipendono dalle quantità (3), mentre $\frac{\partial^2 x'}{\partial u_i \partial u_k}$ sono polinomî lineari in esse. Essendo

$$\frac{\partial (\rho x')}{\partial u_i} = \rho \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \frac{\partial \rho}{\partial u_i} x', \quad \frac{\partial^2 (\rho x')}{\partial u_i \partial u_k} = \rho \frac{\partial^2 x'}{\partial u_i \partial u_k} + \frac{\partial \rho}{\partial u_i} \frac{\partial x'}{\partial u_k} + \frac{\partial \rho}{\partial u_k} \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k} x'$$

resta ancora a far vedere che anche ϑ'_{ik}, ρ, $\frac{\partial \rho}{\partial u_i}$, per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$ non dipendono dalle (3) e $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k}$ ne dipendono linearmente. Ora per arrivare dalle forme F_2, Λ_3 alle F'_2, Λ'_3; bisogna nei coefficienti di F_2 e Λ_3 eseguire la sostituzione $u_{\nu+\lambda} = \varphi_\lambda$ e inoltre porre

$$d u_{\nu+\lambda} = \sum_{i=1}^{\nu} d u_i \left(a_\lambda \sum_{k=1}^{\nu} c_{ik} u_k + \cdots \right)$$

e si vede subito che per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$, i coefficienti Δ'_{ik} e D'_{ikl} delle forme F'_2 e Λ'_3 non dipendono dalle quantità (39), mentre le derivate prime di questi coefficienti sono polinomî lineari in esse. Lo stesso vale allora per una funzione analitica qualunque di tali coefficienti, sicchè ϑ'_{ik} e il secondo membro di (37 bis), fatto $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$, non dipendono dalle (39). Derivando (37 bis) si vede che

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u_r \partial u_s}$$

per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$ sono lineari nelle (39). Ma si supponga, come è lecito,

$$\rho(0, 0, \ldots, 0) = 1$$

e si osservi che

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_i} = \rho \frac{\partial \log \rho}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k} = \rho \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u_i \partial u_k} + \rho \frac{\partial \log \rho}{\partial u_i} \frac{\partial \log \rho}{\partial u_k}$$

e si vede che, per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$, ρ e $\frac{\partial \rho}{\partial u_i}$ infatti non dipendono dalle (39) e $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k}$ ne dipendono linearmente. La dimostrazione del teorema enunciato è ora completa.

Dalle formole (30) si era rilevato che dato comunque il fattore di x, è possibile fissare il fattore di ξ *a meno di un fattore numerico* mediante la condizione $F_2 = \Lambda_3$. Ma la formola (30) permette di precisare la formola (28) ponendo

$$\frac{\rho}{\sigma} = \sqrt[n+2]{\frac{\nabla_2}{\nabla_1}}, \tag{40}$$

sicchè *date le x, è possibile normalizzare le ξ* (e viceversa) *a meno di un fattore radice $(n+2)^{ma}$ dell'unità.* Condizione necessaria e sufficiente affinchè le x, ξ siano così normalizzate è

$$\nabla_1 = \nabla_2 . \tag{41}$$

Per un momento, pensiamo invece della geometria proiettiva, alla geometria del gruppo *delle affinità unimodulari* ([12]). In questo caso si possono assumere come x le coordinate non omogenee, le quali nel passaggio ad una ipersuperficie equivalente nel gruppo subiscono una sostituzione a coefficienti numerici e a determinante unità. Ora per la nostra formola (10) ne deduciamo una normalizzazione delle ξ la quale gode la medesima proprietà. L'S_{n-1} pseudonormale è semplicemente l'intersezione di ξ coll'iperpiano all'infinito, sicchè la normale corrispondente, la *normale affine*, è il diametro della quadrica di LIE. Le forme F_2 e $\Lambda_3 \equiv F_3$ corrispondenti sono ben determinate dalla ipersuperficie a meno di un fattor comune radice $(n+2)^{ma}$ dell'unità, e determinano la ipersuperficie insieme alle sue equivalenti nel gruppo.

Ritorniamo alla geometria proiettiva. Qui l'equazione (41) non determina completamente le x, ξ, F_2 e $\Lambda_3 \equiv F_3$, essendo lecito moltiplicare le x e ξ per il medesimo fattore ρ qualunque, il che moltiplica F_2 e F_3 per ρ^2. In generale, cioè quando il discriminante $\mathbf{D}$ di F_3 è diverso da zero, possiamo porre

$$\rho = \frac{\mathbf{D}^{\frac{1}{n.2^{n-1}}}}{\nabla^{\frac{3}{2n}}} . \tag{42}$$

Infatti si riconosce subito che tale normalizzazione è intrinseca. Però per $n > 2$ si possono definire altre normalizzazioni analoghe, usando altri invarianti algebrici assoluti delle due forme F_2 e F_3. Per $n = 2$ invece, tale normalizzazione è unica in questo senso: per dedurre tali coordinate normali dalle coordinate omogenee x qualunque, si moltiplicano le x per una espressione formata dalle x e dalle loro derivate fino al terzo ordine. Per

([12]) SANNIA ha il merito di avere riconosciuto, nella Memoria che ho citato in principio, che alle formole fondamentali della geometria affine si può venire semplicemente considerando nelle formole della geometria proiettiva, come è stata edificata dal FUBINI, le coordinate non omogenee di punti invece di coordinate omogenee qualunque.

altre coordinate normali, che non ne differirebbero per un solo fattore numerico, sarebbe d'uopo far uso anche delle derivate delle x di ordine superiore ([13]).

Non è forse senza interesse questo fatto, che rileviamo esplicitamente: La normalizzazione delle x, delle ξ, delle forme F_2 e F_3, delle rette normali e gli S_{n-1} pseudonormali sono, a meno di fattori numerici, cose equivalenti. È chiaro che, per ipersuperficie generali, di tutti questi problemi, la normalizzazione delle forme facendo uso degli invarianti algebrici simultanei è molto più semplice di ogni altro procedimento. È anche probabilissimo, benchè non sia, almeno per $n > 2$, dimostrato in modo perfettamente rigoroso, che ogni altra normalizzazione intrinseca delle coordinate esigerebbe derivate di ordine superiore al terzo; ossia, che non esistono altre congruenze di rette, intrinsecamente definite da espressioni contenenti derivate delle x fino al quarto ordine, coniugate all'ipersuperficie Π nel senso qui usato. Però esistono altre tali congruenze di rette, le quali, pur non essendo coniugate a Π in generale, *lo diventano per particolari tipi di ipersuperficie.* E per lo studio di tali tipi può essere utile considerare una tale congruenza. Per fare un semplice esempio, si consideri il caso che le forme F_2, F_3, supposte scelte convenientemente le variabili indipendenti, siano del tipo

$$F_2 = \rho\, \varphi_2\,, \quad F_3 = \tau\, \varphi_3\,,$$

ρ e τ essendo funzioni delle u e φ_2 e φ_3 forme a coefficienti *numerici.* In questo caso possiamo prendere

$$F'_2 = \varphi_2\,, \quad F'_3 = \frac{\tau}{\rho}\, \varphi_3\,.$$

Per $n = 2$ si hanno le *superficie isotermo-asintotiche di Fubini.* Daremo in appresso una proprietà delle normali corrispondenti.

Ritorniamo al caso che i fattori delle x e ξ siano scelti comunque (senza che siano necessariamente soddisfatte le (32) e consideriamo, sopra Π, le *linee geodetiche* della forma $F_2 \equiv -S\, d\,x\, d\,\xi$. Le equazioni differenziali di

(13) Ciò viene dimostrato dal Sannia nella sua Memoria citata. Però i due fatti dimostrati dal Sannia indipendentemente l'uno dall'altro, cioè quello del testo e l'altro che la *normale* corrispondente è unica nel senso di essere intrinseca e di dipendere soltanto dalle derivate delle x fino al quarto ordine, sono, secondo le considerazioni fatte in questa Memoria, equivalenti.

queste linee sono

$$\delta^2 u_1 : \delta^2 u_2 : \cdots : \delta^2 u_n = d u_1 : d u_2 : \cdots : d u_n , \tag{43}$$

dove $\delta^2 u_i$ sono i differenziali secondi contravarianti

$$\delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\, s \\ i \end{matrix} \right\} d u_r \, d u_s ,$$

formati rispetto a F_2. Il piano osculatore di una linea qualunque di Π è determinato dai tre punti

$$x, \quad d x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} d u_i , \quad d^2 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_{ik} x_{ik} \, d u_i \, d u_k$$

dove x_{ik} sono derivate covarianti, e perciò, per una geodetica, dai punti

$$x, \quad d x, \quad \sum_{ik} x_{ik} \, d u_i \, d u_k . \tag{44}$$

Vogliamo determinare la direzione $d u_1 , \ldots , d u_n$ in guisa che il piano osculatore della geodetica contenga il punto X. Secondo le equazioni fondamentali (15) deve essere in questo caso

$$\sum_{ikrs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} d u_i \, d u_k = \lambda \sum_s \frac{\partial x}{\partial u_s} d u_s$$

ossia:

$$\sum_{ikr} \vartheta_{rs} D_{ikr} \, d u_i \, d u_k = \lambda \, d u_s . \tag{45}$$

Moltiplichiamo le (45) per $\Delta_{ls} \, \varepsilon_l$, dove le ε sono indeterminate, e sommiamo rispetto agli indici l e s. Così si ottiene l'equazione equivalente

$$\sum_{ikl} D_{ikl} \, d u_i \, d u_k \, \varepsilon_l = \lambda \sum_{ls} \Delta_{ls} \, \varepsilon_l \, d u_s .$$

Le direzioni cercate sono dunque quelle che hanno la stessa polare lineare rispetto alla quadrica $F_2 = 0$ e alla cubica $\Lambda_3 = 0$. Esse annullano la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \sum_{ik} D_{ik1} \, d u_i \, d u_k , \ldots , & \sum_{ik} D_{ikn} \, d u_i \, d u_k \\ \sum_s \Delta_{s1} \, d u_s \qquad , \ldots , & \sum_s \Delta_{sn} \, d u_s \end{matrix} \right\|$$

e perciò, *in generale*, il loro numero è $(2^n - 1)$.

Avendo così trovate le tangenti di quelle geodetiche della forma F_2 i cui piani osculatori contengono la normale xX corrispondente ai fattori dati di x e ξ, per arrivare allo studio, in un dato punto di Π, dell'insieme dei piani osculatori di tutte le geodetiche di F_2 che vi passano, cambiamo tali fattori in modo da non cambiare la forma F_2, cioè moltiplichiamo le ξ per un fattore qualunque σ e, simultaneamente, le x pel fattore reciproco σ^{-1}. Ora la normale xX era l'intersezione degli iperpiani $\frac{\partial \xi}{\partial u_i}$; dunque la nuova normale sarà l'intersezione degli iperpiani $\frac{\partial(\sigma\xi)}{\partial u_i}$ ossia degli iperpiani

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\frac{\partial \log \sigma}{\partial u_i}\xi;$$

similmente il nuovo S_{n-1} pseudonormale è lo spazio dei punti

$$\frac{\partial x}{\partial u_i}-\frac{\partial \log \sigma}{\partial u_i}x$$

e si vede che questo S_{n-1} corrisponde alla retta normale in quella proiettività fra l'iperpiano ξ e la stella x, nella quale al punto

$$\lambda x+\lambda_1\frac{\partial x}{\partial u_1}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial x}{\partial u_n}$$

corrisponde l'iperpiano

$$-\lambda\xi+\lambda_1\frac{\partial \xi}{\partial u_1}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial \xi}{\partial u_n}.$$

Associamo dunque ad ogni punto di Π e alla forma F_2, questa proiettività. Il cono $\Lambda_3=0$ era il cono delle tangenti all'intersezione di Π mediante quella quadrica osculatrice Q che corrisponde ai dati fattori di x e ξ; per vedere come muta tale quadrica eseguendo le moltiplicazioni per σ^{-1} e σ, si ricordi che la normale e lo spazio pseudonormale sono spazi polari rispetto alla quadrica osculatrice corrispondente.

Ora se per x tiriamo una retta qualunque r, per avere quei piani osculatori delle geodetiche di F_2 che la contengono, basta costruire l'S_{n-1} R corrispondente ad essa nella nostra proiettività e il cono $\Lambda_3=0$ delle tangenti in x alla varietà intersezione di Π con una qualunque di quelle ∞^1 quadriche osculatrici per le quali r ed R sono polari; le tangenti delle geodetiche cercate sono quelle che hanno la stessa polare lineare rispetto a $F_2=0$ e $\Lambda_3=0$.

In particolare abbiamo trovato che per una retta generica passante per x passano *in generale* (2^n-1) piani osculatori di geodetiche di F_2. Osserviamo anche che l' $S_{n-1}\,R$ compie l'ufficio correlativo di r per le stesse (2^n-1) geodetiche considerate come luogo di ∞^1 iperpiani. I nostri gruppi di (2^n-1) tangenti formano una involuzione ∞^2 di gruppi di (2^n-1) « punti » dello spazio $(d u_1, \ldots, d u_n)$, nel senso che per due « punti » generici di questo spazio ne passa uno e un solo gruppo. Anzi tale involuzione dipende soltanto dall'ipersuperficie Π e dal punto x di essa, e *non* dalla forma particolare F_2 scelta. Data la forma F_2 e il punto x, è specialmente importante considerare quella retta r della stella x, per la quale l' $S_{n-1}\,R$ che le corrisponde nella proiettività (45), (45') è il suo S_{n-1} polare rispetto alla quadrica di Lie. Questa retta si può chiamare *la normale della forma* F_2. Il corrispondente gruppo di (2^n-1) tangenti, cioè il gruppo di quelle direzioni le quali hanno la stessa polare lineare rispetto ai due coni apolari $F_2=0$ e $F_3=0$ costituisce la generalizzazione della terna delle *tangenti di Segre* del caso $n=2$, e le linee integrali delle equazioni differenziali corrispondenti generalizzano le *linee di Segre*. Per $n=2$ avevo dimostrato che, in ogni punto di Π, i piani osculatori delle tre curve di Segre passanti per esso contengono una medesima retta, la quale per le superficie isotermo-asintotiche descrive una congruenza coniugata a Π. Le considerazioni precedenti mostrano che, anche per $n>2$, in ogni punto di Π, e per ogni scelta di F_2, i piani osculatori delle geodetiche che toccano le linee di Segre generalizzate passano per la normale di F_2 (e correlativamente). Non sono finora riuscito ad estendere al caso generale la proposizione che avevo data per $n=2$. Osservo soltanto che per le ipersuperficie generalizzazione delle superficie isotermo-asintotiche che avevo definito poco fa, scelto $F_2=\varphi_2$, le linee di Segre generalizzate diventano geodetiche e la proprietà è evidente.

§ 3.

Siano ora x (ξ) le coordinate di punti (iperpiani) in uno spazio lineare S_{n+d+1} a $n+d+1$ $(d>0)$ dimensioni, e siano le x e ξ, come era per le ipersuperficie di S_{n+1}, funzioni di n parametri $u_1, \ldots, u_n$, soddisfacenti identicamente le condizioni

$$S\,x\,\xi = S\,x\,d\,\xi = S\,\xi\,d\,x = 0. \tag{1}$$

I punti x (gli iperpiani ξ) formano una varietà $V(W)$. Supponiamo che V e W siano proprio ad n dimensioni. Anzi facciamo l'ipotesi più restrittiva che il discriminante ∇ della forma differenziale quadratica

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\,du_i\,du_k$$

sia diverso da zero. L'insieme (V, W) delle due varietà V e W forma una *varietà di elementi* ad n dimensioni che possiamo dire *regolare* per esprimere l'ipotesi $\nabla \neq 0$. Come per le ipersuperficie, consideriamo, accanto a F_2, la forma cubica

$$\Lambda_3 = S(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 2\sum_{ikl} D_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l.$$

Chiamiamo *spazio caratteristico* di W lo spazio a d dimensioni intersezione degli iperpiani

$$\xi, \quad \frac{\partial\xi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial u_2}, \ldots, \quad \frac{\partial\xi}{\partial u_n}$$

e siano x, $X^{(1)}$, $X^{(2)}, \ldots$, $X^{(d)}$ $d+1$ punti linearmente indipendenti di questo spazio, sicchè valgono le identità:

$$S\xi X^{(\lambda)} = S\frac{\partial\xi}{\partial u_i}X^{(\lambda)} = 0.$$

X sia un punto (funzione delle u) soddisfacente alle equazioni

$$S\xi X = 1, \quad S\frac{\partial\xi}{\partial u_i}X = 0.$$

Significato correlativo abbiano gli iperpiani $\Xi^{(\lambda)}$, Ξ. Precisamente come per le ipersuperficie, si trovano equazioni fondamentali della forma

$$x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr}\frac{\partial x}{\partial u_s} + \Delta_{ik}X + b_{ik}x + \sum_{\lambda=1}^{d} c_{ik}^{(\lambda)} X^{(\lambda)}, \tag{46}$$

$$\xi_{ik} = -\sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr}\frac{\partial\xi}{\partial u_s} + \Delta_{ik}\Xi + \beta_{ik}\xi + \sum_{\lambda=1}^{d} \gamma_{ik}^{(\lambda)} \Xi^{(\lambda)}. \tag{46'}$$

Moltiplicando x per ρ e ξ per σ, le due forme F_2 e Λ_3 si mutano secondo le equazioni (22) e si può anche qui definire la forma cubica F_3 mediante l'equazione (26). Ciò permette di estendere diversi concetti della teoria delle ipersuperficie alle varietà di elementi. Però è importante di csservare una differenza essenziale, cioè che *non* è possibile, in generale, scegliere i fattori di x e ξ in modo che risulti $F_3 \equiv \Lambda_3$. Basta dare un esempio: Sia

$$x = \left[u_1,\ u_2,\ f_1(u_1),\ f_2(u_2),\ 1\right],$$

$$\xi = \left[-\varphi_1(u_1, u_2)\frac{d f_1}{d u_1},\ -\varphi_2(u_1, u_2)\frac{d f_2}{d u_2},\ \varphi_1(u_1, u_2),\right.$$

$$\left.\varphi_2(u_1, u_2),\ \varphi_1\left(u_1\frac{d f_1}{d u_1} - f_1\right) + \varphi_2\left(u_2\frac{d f_2}{d u_2} - f_2\right)\right].$$

Le condizioni (1) sono soddisfatte; però

$$\sum_{ikl} \vartheta_{ik} D_{ikl}\, d u_l = d \log \nabla - \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial u_1} d u_1 - \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial u_2} d u_2$$

non è in generale un differenziale esatto. Alla normalizzazione delle forme, insomma, qui non corrisponde una normalizzazione delle coordinate.

Contentiamoci di dare la dimostrazione di un teorema fondamentale. Per dati valori di $u_1 \dots u_n$, proiettiamo i piani osculatori delle curve di V passanti per x dallo spazio caratteristico della varietà W; se (V', W') è un'altra varietà di elementi in corrispondenza con la prima, facciamovi l'operazione analoga. Se, per ogni sistema di valori di $u_1 \dots u_n$, i due sistemi di spazi proiettanti sono *omografici*, diciamo, estendendo la locuzione del Fubini, che le due varietà di elementi sono *proiettivamente applicabili*. Il teorema che vogliamo dimostrare si enuncia così: *Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due varietà regolari di elementi è l'uguaglianza delle forme differenziali fratte* $\frac{F_3}{F_2}$. In tal caso, date comunque le $u_1 \dots u_n$, è possibile determinare i fattori ρ e σ in guisa che le forme F_2 siano identiche e le forme Λ_3 uguali per i dati valori di u.

Che la condizione sia sufficiente, mostrano immediatamente le equazioni fondamentali (46). Ma essa è anche necessaria. Indichiamo con y, η, $Y^{(\lambda)}$, Y le quantità analoghe alle x, ξ, $X^{(\lambda)}$, X per la seconda varietà e supponiamo, come è lecito, che le due varietà stiano in un medesimo spazio ambiente S_{n+d+1}. Modifichiamo il fattore delle η in guisa che, per dati valori delle u, i punti X, Y si corrispondano in un'omografia Ω dell'S_{n+d+1} in sè scelta fra quelle alle quali è subordinata l'omografia fra i due sistemi di spazi proiettanti. Le equazioni analoghe alle (46) per la seconda varietà siano

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_r \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\}' \frac{\partial y}{\partial u_r} = \sum_{rs} \vartheta'_{rs} D'_{ikr} \frac{\partial y}{\partial u_s} + \Delta'_{ik} Y + b'_{ik} y + \sum_{\lambda=1}^{d} c'^{(\lambda)}_{ik} Y^{(\lambda)}. \tag{47}$$

Alle y applichiamo una sostituzione lineare a coefficienti numerici tale che Ω diventi l'identità. Sarà allora *per i valori considerati di u (e ciò si intende anche per il seguito)*

$$X = Y$$

e i punti

$$\frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad y, \quad Y^{(\lambda)}$$

stanno in ξ. Ora vale necessariamente un'identità nelle $d\,u_i$ e $d^2 u_i$ della forma

$$d^2 y = \sum_i E_i \frac{\partial x}{\partial u_i} + G\,X + \sum_\lambda G^{(\lambda)} X^{(\lambda)} + E\,x,$$

dove E, E_i, G, G_λ sono somme di forme quadratiche nelle $d\,u_i$ e forme lineari nelle $d^2 u_i$. Ma siccome Ω è un'identità, la precedente sarà del tipo

$$d^2 y = a\,d^2 x + d\,x \sum_i \lambda_i\,d\,u_i + E\,x + \sum_\lambda G^{(\lambda)} X^{(\lambda)} \tag{48}$$

con a, λ_i numeriche. Confrontando con (46) e (47) si vede dapprima che $\Delta'_{ik} = a\,\Delta_{ik}$ e, il ragionamento valendo per ogni altro sistema di valori delle u, si può supporre che si fosse disposto del fattore delle y in modo che sia identicamente $F_2 \equiv F'_2$ (d'onde $a = 1$). In tale ipotesi si vede che

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} - \frac{\partial x}{\partial u_i}$$

è una combinazione lineare delle sole $X^{(\lambda)}$, x; altrimenti si otterrebbe dalle (46) e (47) come coefficiente di $\dfrac{\partial x}{\partial u_i}$ in $d^2 y$ un'espressione contenente anche i differenziali secondi delle u, in contraddizione colla (48). E in virtù di questo fatto tale coefficiente, calcolato secondo (46) e (47), sarà

$$\sum_{irs} \vartheta_{ik} (D'_{rst} - D_{rst})\,d\,u_r\,d\,u_s$$

il che, per la (48), deve essere identico a

$$d\,u_k\,.\sum_i \lambda_i\,d\,u_i\,.$$

Moltiplicando le due espressioni uguali per $\Delta_{kl}\,d\,u_l$ e sommando rispetto agli indici k, l si ha

$$\sum_{rsl}(D'_{rsl}-D_{rsl})\;d\,u_r\,d\,u_s\,d\,u_l=\sum_i \lambda_i\,d\,u_i\,.\sum_{kl}\Delta_{kl}\,d\,u_k\,d\,u_l\,,$$

e da questo si deduce ciò che si era asserito.

Una conseguenza ne è questa: *Se due varietà regolari di elementi sono proiettivamente applicabili, lo sono anche le varietà correlative.*

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XXXI della Serie III, pag. 251 e seguenti.

Tipo-Lit. Turati Lombardi e C.
Milano, 1923.