Eduard Čech

Moutardovy kvadriky

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 3 (1921), 17 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500840

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1921 ČÍS. 3

MOUTARDOVY KVADRIKY

(LES QUADRIQUES DE MOUTARD)

NAPSAL

DR. EDUARD ČECH

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 59.

MOUTARDOVY KVADRIKY.

PŘÍSPĚVEK KU PROJEKTIVNÍ DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII PLOCH.

(AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS.)

Ve druhé části své práce „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru“ * přiřadil jsem elementu plochy jisté biracionální transformace, jež jsem označil Σ_k, a ukázal jsem, že znalost těchto transformací stačí k řešení kterékoli úlohy, vztahující se k elementu třetího řádu plochy. Na základě vět tam odvozených provedu zde analysu elementu čtvrtého řádu plochy; omezuji se však na to, že ukáži, že nové prvky, jež zavedu, stačí pro seznání podmínek, jež plocha znamená pro elementy čtvrtého řádu křivek na ní ležících, ponechávaje na pozdější příležitost souvislost jejich s asymptotickými čarami, křivkami Darboux-Segreovými, Lieovou kvadrikou atd.

1. V pojednání „K diferenciální geometrii prostorových křivek“ ** dokázal jsem větu: Vedeme-li bodem O prostorové křivky c libovolnou přímku p a promítneme-li c se všech bodů na p do oskulační roviny ϱ v O, mají všecky projekce v O styk čtvrtého řádu a tedy společnou kuželosečku oskulační, kterou jsem tamtéž nazval kuželosečkou přidruženou přímce p vzhledem k elementu c. Nechť nyní čára c dotýká se v O plochy Π tak, že její tečna t v O není asymptotickou tečnou Π a buď t' tečna konjugovaná s t; pak platí: *nutná a postačující podmínka, aby styk c s Π byl aspoň čtvrtého řádu, jest, aby kuželosečka přidružená přímce t' vzhledem k elementu c byla oskulační kuželosečkou průseku Π s ϱ* ***. Při důkaze volme soustavu souřadnou tak, aby bylo $O\equiv(0,0,0,1)$, $t\equiv x_2=x_3=0$, $t'\equiv x_1=x_3=0$, tak že jest rovnice Π

$$\frac{x_1}{x_4}=\frac{mx_1^2+nx_2^2}{x_4^2}+\varphi_3\left(\frac{x_1}{x_4},\frac{x_2}{x_4}\right)+\varphi_4\left(\frac{x_1}{x_4},\frac{x_2}{x_4}\right)+\cdots,$$

kde φ_k jest forma k^{ho} stupně, a rovnice křivky c.

$$\frac{x_3}{x_4}=a_2\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2+a_3\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+a_4\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^4+\cdots,\quad \frac{x_2}{x_4}=b_3\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\cdots$$

Nalezneme okamžitě, že nutné a postačující podmínky pro žádaný styk jsou

$$a_2=m,\ a_3=\varphi_3(1,0),\ a_4=\varphi_4(1,0).$$

---

* V tisku v „Časopise pro pěst. mat. a fys.“. V dalším budu ji citovati krátce E_3 (na pr. $E_3 I1$ místo část I., odst. 1.).

** Rozpravy Čes. Akad. roč. XXX, čís. 15, odst. 1.

*** Srovn. analogickou větu v $E_3 II1$.

Tyto podmínky jsou jistě splněny, je-li c totožná s průsekem ϱ s Π. Poznamenáme-li tedy, že prvá z napsaných rovnic c jest rovnicí projekce c do ϱ s bodu $(0, 1, 0, 0)$ na t', jeví se zřejmou správnost tvrzení výše učiněného. Důsledek věty téměř bez počtu právě odvozené jest, že *při studiu elementů čtvrtého řádu všech křivek plošných v daném bodě plochy lze se beze všeho omeziti na křivky rovinné,* nehledíme-li na křivky dotýkající se asymptotických tečen.

2. Základem pro studium těchto rovinných křivek jest věta: Je-li t libovolná tečna plochy Π v O, pak oskulační kuželosečky v O průseků Π se všemi rovinami svazku t tvoří *kvadriku**, kterou nazveme s Wilczynskim *Moutardovou kvadrikou příslušnou tečně t.* Rovnice Π buď:

$$\frac{x_3}{x_4} = \varphi_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right) + \varphi_3\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right) + \varphi_4\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right) + \dots; \tag{1}$$

uvažovaný bod $(0, 0, 0, 1)$ plochy Π budeme *v dalším stále* značiti O, jeho tečnou rovinu $(x_3 = 0)$ ω. Rovnice Moutardovy kvadriky příslušné tečně

$$x_3 = x_2 - nx_1 = 0 \tag{2}$$

jest**

$$\begin{aligned}
&[x_3 x_4 - \varphi_2(x_1, x_2)]\,\varphi_2(1, n)^3 = x_1 x_3\,\varphi_3(1, n)\,[\varphi_2(1, n)]^2 + \\
&+ [\varphi_2(1, n)\,\varphi_4(1, n) - \{\varphi_3(1, n)\}^2]\,x_3^2 + \\
&+ x_3(x_2 - nx_1)\,\varphi_2(1, n)\left[\varphi_2(1, n)\frac{d}{dn}\varphi_3(1, n) - \varphi_3(1, n)\frac{d}{dn}\varphi_2(1, n)\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Moutardova kvadrika příslušná tečně t má v O styk druhého řádu s Π; ze tří tečen průseku obou ploch v O dvě splynou v t***.

Připomeňme především některé výsledky citované práce E_3. Přiřadíme-li každému bodu P v ω jeho polární rovinu π_1 vzhledem k Moutardově kvadrice příslušné tečně OP, je souvislost mezi P a π_1 biracionální transformace Σ_1, kterou jsem nazval polaritou vzhledem k elementu Π†. Přiřadíme-li však bodu P jeho polární rovinu vzhledem k Moutardově kvadrice příslušné tečně konjugované s OP, jest souvislost mezi P a π_{-3} biracionální transformace Σ_{-3}, po prvé uvažovaná Segrem, kterou jsem nazval reciprocitou vzhledem k elementu Π††. Je-li Π_0 taková rovina, že $(\omega\pi_0\pi_1\pi_{-3}) = -3$, je souvislost mezi P a π_0 projektivní transformace Σ_0†††. Existuje svazek kvadrik (Q), majících v O mezi sebou styk třetího a s Π druhého řádu, pro něž polární rovinou každého bodu

---

* V. Darboux, Sur le contact des courbes et des surfaces, Bull. des Sc. Math. et Astr., (2) 4, 1880.

** Darboux, l. c., str. 363, kdež je však tisková chyba.

*** Darboux, l. c., str. 365.

† $E_3 \Pi 3$.

†† $E_3 \Pi 4$.

††† $E_3 \Pi 5$.

P v ω je rovina π_0 příslušná mu v Σ_0*. Průsečná křivka kterékoli z kvadrik svazku (Q) s Π dotýká se v trojném svém bodě O tří důležitých *tečen Darboux-Segreových***. Určíme-li konečně rovinu π_k tak, aby $(\omega\pi_0\pi_1\pi_k) = k$, kde k je libovolná konstanta, obdržíme obecnější biracionální transformaci, kterou značím Σ_k***.

V dalším budu předpokládati, že dovedeme sestrojiti rovinu příslušnou bodu P v Σ_k a naopak†. V důsledku toho můžeme element třetího řádu kterékoli Moutardovy kvadriky považovati za známý.

Transformujeme-li Π korelativně, přejde Moutardova kvadrika μ příslušná tečně t v Moutardovu kvadriku příslušnou oné tečně transformované plochy, jež jest konjugována s tou, v niž přejde tečna t ††. Stačí ukázati, že oskulační kvadratický kužel γ_2 kužele γ opsaného ploše Π s kteréhokoli bodu P na tečně konjugované s t, dotýká se μ podél kuželosečky. Kužel γ dotýká se však Π podél křivky c, jejíž oskulační rovinou v O je rovina π_{-3} příslušná P v Σ_{-3}. Kužel γ, čili kužel promítající c s Π, má dle věty odvozené v odst. 1. této práce styk čtvrtého řádu s průsečnou křivkou Π s oskulační rovinou čáry c; oskulační kuželosečka této rovinné křivky leží však na μ; ježto pak π_{-3} jest polární rovinou P vzhledem k μ, je naše tvrzení dokázáno. Vidíme tedy nyní, že studium elementů čtvrtého řádu všech čar plošných i všech rozvinutelných ploše opsaných v daném místě plochy redukuje se na studium oskulačních kuželoseček, t. j. *na studium Moutardových kvadrik* †††.

3. Uvažujme *v přímkovém prostoru* biracionální transformaci Ω, takto definovanou: Obecná přímka p protíná jednu tečnu t plochy Π v O; reciproká polára p' přímky p vzhledem k Moutardově kvadrice příslušné tečně t odpovídá přímce p v Ω. V inversní transformaci Ω^{-1} odpovídá pak přímce p její reciproká polára $p^{(-1)}$ vzhledem k Moutardově kvadrice příslušné tečně konjugované s t, tak že Ω^{-1} jest korelativní k Ω. Je zřejmo, že stačí znáti Ω, abychom dovedli udati Moutardovu kvadriku příslušnou kterékoli tečně. Dvě vlastnosti transformace Ω jsou ihned patrny: Svazku přímek, jehož vrchol M je v ω, odpovídá transformací Ω

* $E_3 II 2$.

** $E_3 II 2$.

*** $E_3 II 5$.

† Viz $E_3 II 6$.

†† Od tohoto místa počínaje, *vylučuji parabolický bod.*

††† Moutardovy výsledky téměř neuveřejněné jsou z r. 1865; Darbouxovo znamenité pojednání, výše citované, z r. 1880. Z doby pozdější jediná práce, pokud mi je známo, zabývá se Moutardovými kvadrikami, totiž Wilczynski Projective differential geometry of curved surfaces, Fifth Memoir, Trans. Amer Math. Soc. 10 (1909), str. 279—296, kde však není v podstatě nic, co by nebylo již v Darbouxově práci. — Obsah této práce, ač je v leccem neúplná, je přec e tuším dobrým dokladem pro správnost mého mínění, že lze ve mnohých otázkách diferenciální geometrie s prospěchem užíti různých speciálních transformací geometrických, na což prvý příklad podal asi Em. Weyr svou transformací (1, 2) mezi středy křivostí normálních řezů a tečnami plochy.

svazek, jehož rovinou je polární rovina μ_1 bodu M vzhledem k elementu Π. Svazku přímek, jehož rovina ν obsahuje O, odpovídá v transformaci Ω svazek, jehož vrchol jest reciproký bod N_{-3} roviny ν vzhledem k elementu Π.

Přistoupíme k analytickému vyjádření Ω. Pro zjednodušení předpokládám od tohoto místa souřadnou soustavu volenu tak, že rovnice plochy Π jest

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_1 x_2}{x_4^2} + \frac{\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3}{6 x_4^3} + \varphi_4\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right) + \ldots * . \tag{4}$$

Obecně jest $a)$ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$, když totiž obě asymptotické tečny mají styk jen druhého řádu s Π. Rovnice

$$x_4 = \varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3 = 0 \tag{5}$$

znamenají pak trojici tečen Darboux-Segreových. Je-li však $b)$ na př. $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, má tečna $x_2 = x_3 = 0$ s Π styk aspoň třetího řádu a Darboux-Segreovy tečny splynou v $x_3 = x_2^3 = 0$. Je-li konečně $c)$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, mají obě asymptotické tečny s Π styk vyššího než druhého řádu a Darboux-Segreovy tečny jsou neurčité. V dalším nehledíme na případ $c)$, který jen pro kvadriky nastane identicky. Rovnice Σ_k jsou v naší soustavě souřadné **

$$\begin{aligned} &\varrho u_1 = 6 x_1 x_2^2, && \sigma x_1 = 6 u_1 u_2^2, \\ &\varrho u_2 = 6 x_1^2 x_2, && \sigma x_2 = 6 u_1^2 u_2, \\ &\varrho u_3 = k(\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3) - 6 x_1 x_2 x_4, && x_3 = 0, \\ &u_4 = 0, && \sigma x_4 = k(\varepsilon_2 u_1^3 + \varepsilon_1 u_2^3) - 6 u_1 u_2 u_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Rovnice Moutardovy kvadriky příslušné tečně (2) jest nyní

$$\begin{aligned} &[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 n^3)^2 - 36 n \varphi_4(1, n)]\, x_3^2 + 36 n^3 (x_3 x_4 - x_1 x_2) + \\ &+ 6 n^2 (\varepsilon_2 n^3 - 2\varepsilon_1) x_1 x_3 - 6 n (2 \varepsilon_2 n^3 - \varepsilon_1) x_2 x_3 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Za souřadnice přímky p spojující body x_i, y_i budeme bráti výrazy $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$. Reciproká polára $\bar{p}$ přímky p vzhledem ke kvadrice (7) má souřadnice (je účelno v dalším voliti vždy určitým způsobem faktory úměrnosti)

$$\begin{aligned} \bar{p}_{12} &= -6 n^2 [(2\varepsilon_2 n^3 - \varepsilon_1) p_{23} + n(\varepsilon_2 n^3 - 2\varepsilon_1) p_{31} + 6 n^2 p_{34}], \\ \bar{p}_{23} &= -36 n^4 p_{23}, \\ \bar{p}_{31} &= 36 n^4 p_{31}, \\ p_{14} &= 6 n^2 (2 \varepsilon_2 n^3 - \varepsilon_1)(p_{12} - p_{34}) - (2 \varepsilon_2 n^3 - \varepsilon_1)^2 p_{23} + \\ &\quad + 9 n^2 [\varepsilon_1 \varepsilon_2 n^2 - 8 \varphi_4(1, n)] p_{31} - 36 n^4 p_{14}, \\ \bar{p}_{24} &= -6 n^3 (\varepsilon_2 n^3 - 2 \varepsilon_1)(p_{12} + p_{34}) - n^2 (\varepsilon_2 n^3 - 2\varepsilon_1)^2 p_{31} + \\ &\quad + 9 n^2 [\varepsilon_1 \varepsilon_2 n^2 - 8 \varphi_4(1, n)] p_{23} + 36 n^4 p_{24}, \\ \bar{p}_{34} &= -6 n^2 [6 n^2 p_{12} - (2 \varepsilon_2 n^3 - \varepsilon_1) p_{23} + n (\varepsilon_2 n^3 - 2 \varepsilon_1) p_{31}]. \end{aligned} \tag{8}$$

---

* Co do významu této soustavy souřadné viz $E_3 \Pi 2$ a moje pojednání „Okolineárních a korelativních plochách, majících v jednom bodě styk třetího řádu“.

** E_3 II 5.

Ježto přímka p protne ω v bodě $(p_{31}, -p_{23}, 0, p_{34})$, obdržíme souřadnice přímky p', odpovídající přímce p v Ω, klademe-li v (8)

$$n = -\frac{p_{23}}{p_{31}},$$

a souřadnice přímky $p^{(-1)}$, odpovídající přímce p v Ω^{-1}, klademe-li tamtéž

$$n = +\frac{p_{23}}{p_{31}}.$$

Je tudíž

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
p'_{12} &= 6p_{23}^{2}p_{31}^{2}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3} - 6p_{23}p_{31}p_{34}),\\
p'_{23} &= -36p_{23}^{4}p_{31}^{3},\\
p'_{31} &= 36p_{23}^{3}p_{31}^{4},\\
p'_{14} &= -p_{31}[4\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - 5\varepsilon_1\varepsilon_2 p_{23}^{3}p_{31}^{3} + \varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + 72p_{23}p_{3}\varphi_{41}(p_{31}, -p_{23}) +\\
&\quad + 36p_{23}^{3}p_{31}^{2}p_{14} + 6p_{23}p_{31}(2\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} - p_{34})],\\
p'_{24} &= -p_{23}[\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - 5\varepsilon_1\varepsilon_2 p_{23}^{3}p_{31}^{3} + 4\varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + 72p_{23}p_{31}\varphi_4(p_{31}, -p_{23}) -\\
&\quad - 36p_{23}^{2}p_{31}^{3}p_{24} + 6p_{23}p_{31}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} + 2\varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} + p_{34})],\\
p'_{34} &= -18p_{23}^{2}p_{31}^{2}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3} + 2p_{23}p_{31}p_{12}),
\end{aligned}
$$

a

$$
(9')\quad
\begin{aligned}
p_{12}^{(-1)} &= -18p_{23}^{2}p_{31}^{2}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3} + 2p_{23}p_{31}p_{34}),\\
p_{23}^{(-1)} &= -36p_{23}^{4}p_{31}^{3},\\
p_{31}^{(-1)} &= 36p_{23}^{3}p_{31}^{4},\\
p_{14}^{(-1)} &= -p_{31}[4\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - 13\varepsilon_1\varepsilon_2 p_{23}^{3}p_{31}^{3} + \varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + 72p_{23}p_{31}\varphi_4(p_{31}, p_{23}) +\\
&\quad + 36p_{23}^{3}p_{31}^{2}p_{14} - 6p_{23}p_{31}(2\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} - p_{34})],\\
p_{24}^{(-1)} &= -p_{23}[\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - 13\varepsilon_1\varepsilon_2 p_{23}^{3}p_{31}^{3} + 4\varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + 72p_{23}p_{31}\varphi_4(p_{31}, p_{23}) -\\
&\quad - 36p_{23}^{2}p_{31}^{3}p_{24} + 6p_{23}p_{31}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} - 2\varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} + p_{34})],\\
p_{34}^{(-1)} &= 6p_{23}^{2}p_{31}^{2}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3} - 6p_{23}p_{31}p_{12}).
\end{aligned}
$$

V obecném případě *a*) odpovídá tedy obecnému svasku přímek v Ω přímková plocha sedmého stupně. Charakter transformace Ω je zdánlivě složitý; ukážeme však nyní, že lze snadno Ω nahraditi jednoduššími vztahy.

4. Kvadrika Q^λ

$$(10)\qquad 2(x_3x_4 - x_1x_2) - \lambda x_3^2 = 0,$$

kde konstanta λ jest libovolná, je obecná kvadrika svazku (Q), o němž byla řeč v odstavci 2. Souřadnice reciproké poláry $p^{(\lambda)}$ přímky p vzhledem ke Q^λ jsou

$$
\begin{gathered}
p_{12}^{(\lambda)} = p_{34},\quad p_{23}^{(\lambda)} = -p_{23},\quad p_{31}^{(\lambda)} = p_{31},\\
p_{14}^{(\lambda)} = -p_{14} - \lambda p_{31},\quad p_{24}^{(\lambda)} = p_{24} - \lambda p_{23},\quad p_{34}^{(\lambda)} = -p_{12}.
\end{gathered}
$$

Klademe-li

$$
\begin{aligned}
s'_{12} &= 6p_{23}^{2}p_{31}^{2}(\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3}),\\
s'_{23} &= s'_{31} = 0,\\
s'_{14} &= -p_{31}[4\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (5\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda)p_{23}^{3}p_{31}^{3} + \varepsilon_1^2 p_{31}^{6} +\\
&\quad + 72p_{23}p_{31}\varphi_4(p_{31}, -p_{23}) + 6p_{23}p_{31}(2\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} - p_{34})],
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
s'_{24} &= -p_{23}[\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (5\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + 4\varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 72 p_{23} p_{31} \varphi_4(p_{31}, -p_{23}) + 6 p_{23} p_{31} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} + 2\varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} + p_{34})], \\
s'_{34} &= -18 p_{23}^{2} p_{31}^{2} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3}), \\
s''_{12} &= -18 p_{23}^{2} p_{31}^{2} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3}), \\
s''_{23} &= s''_{31} = 0, \\
s''_{14} &= -p_{31}[4\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (13\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + \varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 72 p_{23} p_{31} \varphi_4(p_{31}, p_{23}) - 6 p_{23} p_{31} (2\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} - p_{34})], \\
s''_{24} &= -p_{23}[\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (13\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + 4\varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 72 p_{23} p_{31} \varphi_4(p_{31}, p_{23}) + 6 p_{23} p_{31} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} - 2\varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} + p_{34})], \\
s''_{34} &= 6 p_{23}^{2} p_{31}^{2} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3}),
\end{aligned}$$

bude

$$p'_{ik} = s'_{ik} + 36 p_{23}^{3} p_{31}^{3} p_{ik}^{(\lambda)}, \quad p_{ik}^{(-1)} = s''_{ik} + 36 p_{23}^{3} p_{31}^{3} p_{ik}^{(\lambda)}. \tag{11}$$

Ani s'_{ik}, ani s''_{ik} nejsou souřadnice přímek, leč v případě c). Klademe-li však

$$2s'_{ik} = -q'_{ik} + 3q''_{ik}, \quad 2s''_{ik} = 3q'_{ik} - q''_{ik}, \tag{12}$$

tak že jest

$$\begin{aligned}
q'_{12} &= -12 p_{23}^{2} p_{31}^{2} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3}), \\
q'_{14} &= -p_{31}[4\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (11\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + \varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 18 p_{23} p_{31} \{\varphi_4(p_{31}, -p_{23}) + 3\varphi_4(p_{31}, p_{23})\} - \\
&\quad - 6 p_{23} p_{31} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} - p_{34})], \\
q'_{24} &= -p_{23}[\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (11\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + 4\varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 18 p_{23} p_{31} \{\varphi_4(p_{31}, -p_{23}) + 3\varphi_4(p_{31}, p_{23})\} + \\
&\quad + 6 p_{23} p_{31} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} - \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} + p_{34})], \\
q'_{23} &= q'_{31} = q'_{34} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
q''_{12} &= q''_{23} = q''_{31} = 0, \\
q''_{14} &= -p_{31}[4\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (7\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + \varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 18 p_{23} p_{31} \{3\varphi_4(p_{31}, -p_{23}) + \varphi_4(p_{31}, p_{23})\} + \\
&\quad + 6 p_{23}^{3} p_{31} \varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3} (p_{12} - p_{34})], \\
q_{24}'' &= -p_{23}[\varepsilon_2^2 p_{23}^{6} - (7\varepsilon_1\varepsilon_2 + 36\lambda) p_{23}^{3} p_{31}^{3} + 4\varepsilon_1^2 p_{31}^{6} + \\
&\quad + 18 p_{23} p_{31} \{3\varphi_4(p_{31}, -p_{23}) + \varphi_4(p_{31}, p_{23})\} + \\
&\quad + 6 p_{23} p_{31} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3})(p_{12} + p_{34})], \\
q''_{34} &= -12 p_{23}^{2} p_{31}^{2} (\varepsilon_2 p_{23}^{3} + \varepsilon_1 p_{31}^{3}),
\end{aligned} \tag{14}$$

jsou q'_{ik} souřadnice přímky q' pole ω, a q''_{ik} souřadnice přímky q'' trsu O. Dle (11) a (12) jest pak

$$\begin{aligned}
2p'_{ik} &= -q'_{ik} + 3q''_{ik} + 72 p_{23}^{3} p_{31}^{3} p_{ik}^{(\lambda)}, \\
2p_{ik}^{(-1)} &= 3q'_{ik} - q''_{ik} + 72 p_{23}^{3} p_{31}^{3} p_{ik}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Zvolíme-li tudíž jakkoli p, jsou přímky p', $p^{(-1)}$, $p^{(\lambda)}$, q', q'' přímky prvé soustavy téhož hyperboloidu H_p^{λ}. Přímka

$$x_3 = p_{23} x_1 - p_{31} x_2 = 0 \tag{16}$$

je přímkou druhé soustavy na H_p^λ a protne ony přímky resp. v bodech

$$
\begin{aligned}
&(p')\ 2p_{23}p_{31}(p_{31}u_1+p_{23}u_2)-(\varepsilon_2 p_2{}^3_3+\varepsilon_1 p_3{}^3_1+2p_{23}p_{31}p_{12})\,u_4=0,\\
&p^{(-1)}6p_{23}p_{31}(p_{31}u_1+p_{23}u_2)+(\varepsilon_2 p_2{}^3_3+\varepsilon_1 p_3{}^3_1-6p_{23}p_{31}p_{12})\,u_4=0,\\
&(p^\lambda)\ p_{31}u_1+p_{23}u_2-p_{12}u_4=0,\\
&(q')\ 4p_{23}p_{31}(p_{31}u_1+p_{23}u_2)+(\varepsilon_2 p_2{}^3_3+\varepsilon_1 p_3{}^3_1-4p_{23}p_{31}p_{12})\,u_4=0,\\
&(q'')\ u_4=0.
\end{aligned}
$$

Jest tedy na H_p^λ

$$
(p^{(\lambda)}q'p'p^{(-1)})=-\tfrac{1}{3},\quad (p^{(\lambda)}q''p'p^{(-1)})=-3, \tag{17}
$$

což ovšem bez počtu plyne ze souvislosti Moutardových kvadrik a kvadrik Q^λ s transformacemi Σ_k. Měníme-li λ, mění se H_p^λ; z přímek prvé soustavy jsou p' a $p^{(-1)}$ pevné, z přímek druhé soustavy (16), podél níž mají H_p^λ styk. Při proměnném λ tvoří tedy H_p^λ svazek, ovšem projektivní se svazkem (Q).

Náš výsledek se lehce modifikuje, protíná-li p jednu z tečen Darboux-Segreových nebo z tečen konjugovaných. Protíná-li p na př. Darboux-Segreovu tečnu t, splývá q' s tečnou konjugovanou s t. Přímky p', $p^{(-1)}$, $p^{(\lambda)}$, q'' leží pak v jedné rovině, která také q' obsahuje. Těchto pět přímek určuje kuželosečku a měříme-li na ní dvojpoměry, trvají relace (17). Korelativní specialisace nastane, protíná-li p tečnu konjugovanou s tečnou Darboux-Segreovou.

Dosavadními výpočty převedli jsme úlohu, nalézti přímku p' příslušnou dané přímce p v Ω na stanovení přímek q', q''; neboť pak jsou p', $p^{(-1)}$ okamžitě určeny relacemi (17). Tato nová úloha jest jednodušší; v rovnicích (13) a (14) nevyskytují se totiž p_{14}, p_{24}, tak že *opisuje-li přímka p svazek, jehož vrchol P je v ω a jehož rovina π obsahuje 0, nemění se přímky q', q''.*

5. Stanovení přímek q', q'' dá se však znovu rozložiti v jednodušší úkony. Všimněme si nejprve přímky q' pole ω. Souřadnice jejího průsečíku y s přímkou

$$x_3=p_{23}x_1+p_{31}x_2=0,$$

t. j. s tečnou OP, buďte y_i; souřadnice průsečíku z přímky q' s přímkou

$$x_3=p_{23}x_1-p_{31}x_2=0,$$

t. j. s tečnou konjugovanou s OP, buďte z_i. Máme nejprve

$$
\begin{aligned}
y_1:y_2:y_3:y_4&=-p_{31}q'_{12}:p_{23}q'_{12}:0:(p_{23}q'_{14}+p_{31}q'_{24}),\\
z_1:z_2:z_3:z_4&=p_{31}q'_{12}:p_{23}q'_{12}:0:(p_{23}q'_{14}-p_{31}q'_{24}).
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li nyní z rovnic (13), dostáváme

$$
\begin{aligned}
y_1:y_2:y_4=&-12p_{23}p_3{}^2_1(\varepsilon_2 p_2{}^3_3-\varepsilon_1 p_3{}^3_1):12p_2{}^2_3p_{31}(\varepsilon_2 p_2{}^3_3-\varepsilon_1 p_3{}^3_1):\\
&:[5\varepsilon_2^2 p_2{}^6_3-2(11\varepsilon_1\varepsilon_2+36\lambda)p_2{}^3_3p_3{}^3_1+5\varepsilon_1^2 p_3{}^6_1+\\
&+36p_{23}p_{31}\{\varphi_4(p_{31},-p_{23})+3\varphi_4(p_{31},p_{23})\}+\\
&+12p_{23}p_{31}p_{34}(\varepsilon_2 p_2{}^3_3-\varepsilon_1 p_3{}^3_1)],
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
z_1:z_2:z_4)=4p_{23}p_3{}^2_1:4p_2{}^2_3p_{31}:(\varepsilon_2 p_2{}^3_3+\varepsilon_1 p_3{}^3_1-4p_{23}p_{31}p_{12}). \tag{19}
$$

V rovnicích (19) vypadlo také p_{34} a *poloha bodu z závisí pouze na rovině π* a ne také na bodu P; jsou-li u_i souřadnice π, jest

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = 4u_1 u_2^2 : 4u_1^2 u_2 : 0 : (\varepsilon_2 u_1^3 + \varepsilon_1 u_2^3 - 4u_1 u_2 u_3).$$

Tedy (rovn. (6)): *Bod z a rovina π odpovídají si v příbuznosti $\Sigma^3/_2$.*
V rovnicích (18) schází zase p_{12}. *Poloha bodu y závisí tedy pouze na bodu P*; jsou-li x_i souřadnice P, vychází

$$(20)\qquad \begin{aligned} \varrho y_1 &= 12x_1^2 x_2 (\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3),\\ \varrho y_2 &= 12x_1 x_2^2 (\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3),\\ y_3 &= 0\\ \varrho y_4 &= F_1(x_1, x_2) - 72\lambda x_1^3 x_2^3 - 12x_1 x_2 (\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3) x_4, \end{aligned}$$

kde

$$(20')\qquad \begin{aligned} F_1(x_1, x_2) = &-5\varepsilon_1^2 x_1^6 - 22\varepsilon_1\varepsilon_2 x_1^3 x_2^3 - 5\varepsilon_2^2 x_2^6 +\\ &+ 36x_1 x_2 [\varphi_4(x_1, x_2) + 3\varphi_4(x_1, -x_2)]. \end{aligned}$$

Místem bodů samodružných v transformaci (20) je křivka C^λ

$$(21)\qquad F_1(x_1, x_2) - 72\lambda x_1^3 x_2^3 - 24x_1 x_2 x_4 (\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3) = 0.$$

Křivkou C^λ je transformace (20) úplně určena. Shledáváme totiž okamžitě, že body P, y leží na přímce s bodem O a dělí harmonicky O a další (jediný) průsečík této přímky s C^λ. C^λ jest obecně šestého řádu s pětinásobným bodem v O, v němž jsou tečnami obě tečny asymptotické i tři tečny Darboux-Segreovy. Stupeň může se snížiti tím, že některá z těchto tečen náleží křivce. Pro tu větev C^λ, jež se v O dotýká asymptotické tečny $x_2 = x_3 = 0$, platí rozvoj

$$\frac{x_2}{x_4} = -\frac{5\varepsilon_1}{24}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \ldots.$$

Je tudíž* *křivost C^λ v této větvi rovna pěti šestinám křivosti dotýkající se jí asymptotické křivky*; stejně ovšem ve větvi, dotýkající se druhé asymptotické tečny.

K výsledkům zcela obdobným vede ovšem přímka q'' trsu O. Jsou-li v_i souřadnice roviny, spojující q'' s tečnou $x_3 = p_{23} x_1 + p_{31} x_2 = 0$ a n_i souřadnice roviny spojující q'' s tečnou konjugovanou, nalezneme stejnou cestou jako výše

$$(22)\qquad \begin{aligned} w_1 : w_2 : w_3 : w_4 &= 4x_1 x_2^2 : 4x_1^2 x_2 : (\varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3 - 4x_1 x_2 x_4) : 0,\\ \varrho v_1 &= 12u_1^2 u_2 (\varepsilon_2 u_1^3 + \varepsilon_1 u_2^3),\\ \varrho v_2 &= 12u_1 u_2^2 (\varepsilon_2 u_1^3 + \varepsilon_1 u_2^3),\\ \varrho v_3 &= F_2(u_1, u_2) + 72\lambda u_1^3 u_2^3 - 12u_1 u_2 (\varepsilon u_{2\,1}^{\;3} + \varepsilon_1 u_2^3) u_4,\\ v_4 &= 0, \end{aligned}$$

kde

$$(22')\qquad \begin{aligned} F_2(u_1, u_2) = &-5\varepsilon_2^2 u_1^6 + 14\varepsilon_1\varepsilon_2 u_1^3 u_2^3 - 5\varepsilon_1^2 u_2^6 -\\ &- 36u_1 u_2 [\varphi_4(u_2, u_1) + 3\varphi_4(u_2, -u_1)]. \end{aligned}$$

---

* E_3 II 9.

Souvislost mezi P a w jest opět $\Sigma_{\frac{3}{2}}$. Transformace (22) je stejně jako (20) určena kuželem Γ^λ samodružných rovin, jehož rovnice jest

$$F_2(u_1u_2) + 72\lambda u_1^3u_2^3 - 24u_1u_2(\varepsilon_2u_1^3 + \varepsilon_1u_2^3)u_4 = 0. \tag{23}$$

Celkem tedy stanovíme přímku p', příslušnou dané přímce p v Ω, známe-li Σ_k, Q^λ (tuto je voliti kdekoli ve svazku (Q)) a příslušné C^λ, Γ^λ: Přímka p protíná jednu tečnu t plochy Π v O; buď P průsečík $p\,.\,t$, π rovnice (pt). Dále buď $p^{(\lambda)}$ reciproká polára p vzhledem ke Q^λ, P' bod, jemuž přísluší π, a π' rovina, jež přísluší bodu P v $\Sigma_{\frac{3}{2}}$. Sestrojme průsečík R (různý od O) křivky C^λ s t, a tečnou rovinu ϱ (různou od ω) přímkou t ke Γ^λ. Stanovme bod P'' a rovinu π'', incidentní s t, tak, aby bylo

$$(ORPP'') = (\omega\varrho\pi\pi'') = -1.$$

Přímky $p^{(\lambda)}$, $P'P'' \equiv q'$, $(\pi'\pi'') \equiv q''$ určují sborcený svazek; hledaná přímka p' náleží tomuto a jest určena tím, že obsahuje bod, jemuž přísluší π v Σ_{-3}, nebo také tím, že leží v rovině, jež přísluší bodu P v Σ_1, nebo konečně dvojpoměrem

$$(q'q''p^\lambda p') = \tfrac{1}{3}. \tag{24}$$

6. V předchozím jsme poznali, jak lze sestrojiti Moutardovu kvadriku, známe-li Q^λ, Σ_k, C^λ, Γ^λ. Známe-li však Q^λ a C^λ, můžeme sestrojiti Σ_k i Γ^λ. O Σ_k je to ihned patrno: Svazku rovin, jehož osou jest obecná přímka r trsu O, přísluší (v obecném případě a)) křivka kubická, jež jest určena jednoznačně takto: Má v O bod dvojný, dotýká se zde obou vytvořujících přímek Q^λ (asymptotických tečen) a její křivosti zde jsou rovny $-\frac{4k}{5}$násobné křivosti dotýkajících se jich větví C^λ, a její tři body obratu leží na reciproké poláře přímky r vzhledem ke Q^λ. Ale také Γ^λ můžeme snadno určiti. Transformací Σ_k přejde totiž Γ^λ v křivku

$$\begin{aligned}(5+4k)\varepsilon_1^2x_1^6 - [(14-8k)\varepsilon_1\varepsilon_2 + 72\lambda]x_1^3x_2^3 + (5+4k)\varepsilon_2^2x_2^6 +\\ + 36x_1x_2[\varphi_4(x_1,x_2) + 3\varphi_4(x_1,-x_2)] - 24x_1x_2x_4(\varepsilon_1x_1^3 + \varepsilon_2x_2^3) = 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Je-li tudíž jedno z čísel ε_1, ε_2 rovno nule, přejde C^λ v Γ^λ prostě transformací $\Sigma_{-\frac{5}{2}}$. Je-li však $\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0$ (obecný případ a)), odečtěme (21) od (25); obdržíme

$$(5+2k)\varepsilon_1^2x_1^6 + 4(k+1)\varepsilon_1\varepsilon_2x_1^3x_2^3 + (5+2k)\varepsilon_2^2x_2^6 = 0. \tag{26}$$

Pro určité k znamená rovnice (26) šest přímek svazku (O, ω), z nichž každé obsahuje jeden (od O různý) průsečík křivek C^λ a (25). Při proměnném k znamená rovnice (26) jednomocnou involuci šestého řádu I_6 ve svazku (O, ω), projektivní se soustavou transformací Σ_k. I_6 i řečená projektivita stanoví se snadno: dvakrát počítaná trojice tečen Darboux-Segreových tvoří skupinu I_6, příslušnou hodnotě $k = \infty$, dvakráte počítaná trojice tečen s oněmi konjugovaných tvoří skupinu I_6, příslušnou hodnotě $k = -\frac{7}{4}$, konečně třikráte počítaná dvojice tečen asymptotických tvoří skupinu I_6, příslušnou hodnotě $k = -\frac{5}{2}$. Γ^λ sestrojíme pak takto: zvolme kteroukoli skupinu I_6 a stanovme průsečíky přímek této skupiny s C^λ; transformací Σ_k příslušnou zvolené skupině přejdou tyto průsečíky v šest rovin; provedeme-li to se všemi skupinami I_6, obalují vzniklé roviny Γ^λ. Z křivek soustavy (svazku) (25) jsou pozoruhodny dvě: křivka příslušná hodnotě $k = -\frac{5}{2}$, pro kterou všech 36 průsečíků s C^λ splyne v O a jež je totožna s $C^{\lambda + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{6}}$. Druhá jest křivka příslušná hodnotě $k = -\frac{5}{4}$; tato se rozpadá v $x_1x_2 = 0$ a ve křivku D^λ čtvrtého řádu:

$$
\begin{aligned}
(27) \qquad & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3\lambda)x_1^2x_2^2 - 3[\varphi_4(x_1x_2) + 3\varphi_4(x_1, -x_2)] + \\
& + 2(\varepsilon_1x_1^3 + \varepsilon_2x_2^3)x_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Korelativně přejde C^λ transformací $\Sigma_{-\frac{5}{4}}$ v kužel Δ^λ čtvrté třídy:

$$
(28) \quad (\varepsilon_2\varepsilon_2 + 6\lambda)u_1^2u_2^2 - 3[\varphi_4(u_2, u_1) + 3\varphi_4(u_2, -u_1)] + 2(\varepsilon_2u_1^3 + \varepsilon_1u_2^3)u_3 = 0.
$$

7. Promluvme krátce o úkolu: sestrojiti C^λ i Γ^λ, známe-li oskulační kuželosečky c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 v O pěti rovinných průseků plochy Π, jichž tečny t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 v O musí býti ovšem různé*. Předpokládejme, že jsme již určili transformace Σ_k i svazek kvadrik (Q) a v tomto zvolili Q^λ. Označme t'_i tečnu konjugovanou s t_i $(i = 1, 2 \ldots 5)$, zvolme na t_i bod L a jím veďme přímku p jakkoli; λ buď rovina $(t_i p)$. Moutardova kvadrika φ_i příslušná t_i jest určena tím, že má v O styk druhého řádu s Π a dotýká se podél c_i kužele, jehož vrcholu přísluší rovina $\bar{c}_i$ v Σ_{-3}. Naproti tomu pro Moutardovu kvadriku φ'_i příslušnou t'_i dovedeme pouze stanoviti polární rovinu (každého bodu na t_i i na t'_i a tedy) kteréhokoli bodu v ω, čímž φ'_i jest omezena na jistý svazek kvadrik Φ; buď φ''_i libovolná kvadrika z Φ. Sestrojme poláry p' $p^{(\lambda)}$ p'' přímky p resp. vzhledem ke kvadrikám φ_i, Q^λ, φ_i'', a ve sborceném svazku určeném těmito polárami stanovme přímku ω, ležící v a, i přímku a', obsahující O. Buď dále A průsečík $a \,.\, t_i$ a α rovina $(a' \, t_i)$. Na t_i určeme bod B a přímkou t_i rovinu β tak aby

$$(OBLA) = (\omega\beta\lambda\alpha) = -1.$$

Snadnou úvahou nahlédneme: opisuje-li φ''_i svazek Φ, jest jak řada bodů B na t_i, tak svazek rovin β o ose t_i projektivní s Φ. Specielně, je-li $\varphi''_i \equiv \omega \,.\, \omega$, jest $B \equiv O$, $\beta \equiv \omega$; je-li však $\varphi''_i \equiv \varphi'_i$ je bod B na C^λ a β dotýká se Γ^λ. Když nyní místo p zvolíme přímku, jež protíná t'_i a konstrukci právě popsanou opakujeme, dospějeme místo k B, β k řadě bodů B' na t'_i a ke svazku rovin β' o ose t'_i. Je-li $\varphi''_i \equiv \omega \,.\, \omega$, jest $B' \equiv O$, $\beta' \equiv \omega$; je-li však $\varphi''_i \equiv \varphi'_i$, jest B' na C^λ a β' dotýká se Γ^λ. Řady bodové B, B' jsou perspektivní, buď S_i střed perspektivity. Svazky rovin β, β' jsou perspektivní; buď σ_i rovina perspektivity. *Spojnice (od O různých) průsečíků C^λ s t_i, t'_i obsahuje S_i; průsečnice (od ω různých) tečných rovin Γ^λ obsahujících t_i, t'_i jest v σ_i.*

---

* Netřeba zdůrazňovati, že $c_1 \ldots c_5$ nejsou zcela libovolné, ježto plošný element prvého, druhého, třetího řádu jest určen resp. dvěma, třemi, čtyřmi z nich.

Křivka šestého řádu C^λ určena je těmito podmínkami: 1. má v O pětinásobný bod, 2. tečnami v O jsou tečny asymptotické a tečny Darboux-Segreovy, 3. v těch větvích, jež se dotýkají asymptotických tečen, jest její křivost rovna pěti šestinám křivosti příslušné asymptotické křivky, 4. spojnice průsečíků (od O různých) C^λ s t_i a s t'_i jde bodem S_i. Celkem $15+5+2+5=27$ lineárních podmínek, jak je pro křivku šestého řádu třeba. Korelativně pro Γ^λ.

8. Úloha, jak sestrojiti C^λ a Γ^λ z těchto podmínek, nepatří vlastně do rámce, jejž jsem si vytkl; přes to věnuji jí několik slov. Je možno s výhodou převésti ji transformací $\Sigma_{-\frac{5}{4}}$ na sestrojení D^λ a Δ^λ. Pro křivku čtvrtého řádu D^λ na př. máme tyto podmínky: 1. má v O bod trojný a dotýká se zde tečen Darboux-Segreových, 2. průsečíky D^λ s t_i a s t'_i leží na přímce s bodem S'_i, jemuž přísluší rovina σ_i v $\Sigma_{-\frac{5}{4}}$. Náleží tedy D^λ pětimocnému lineárnímu systému $(D)_5$ křivek čtvrtého řádu s pevným bodem trojným a pevnými tečnami v něm*. Buďte u, u' dvě libovolné přímky v ω neprocházející bodem O. Obě křivky rozpadající se v trojici tečen Darboux-Segreových a resp. v u, u', náležejí systému $(D)_5$. Uvažujme nyní pomocný lineární prostor S_5 o pěti dimensích a v něm dvě nadroviny (prostory o čtyřech dimensích) S_4 a S'_4. V průsečném prostoru těchto nadrovin zvolme tři nezávislé body L_1, L_2, L_3 a proložme jimi jakoukoli racionální normální křivku čtvrtého řádu k_4, náležející nadrovině S_4. Mezi řadou bodů na u a na k_4 stanovme projektivitu π, v níž průsečíkům u s tečnami Darboux-Segreovými příslušejí body L_1, L_2, L_3. Mimo obě nadroviny S_4, S'_4 zvolme v S_5 bod T a s něho promítněme k_4 kuželem ψ_4. Stanovme nyní biracionální korespondenci mezi a a φ_4 takto: Je-li M kterýkoli bod v ω, protne přímka OM přímky u, u' resp. v bodech N, N'. Bodu N přísluší v π jistý bod n na k_4. Přímka Tn protne S'_4 v bodě n'. Bod m na Tn, určený rovnicí $(OMNN')=(Tmnn')$ přiřadíme bodu M. Snadno nahlédneme, že opisuje-li M kteroukoli křivku systému $(D)_5$, opíše m nadrovinný průsek kužele ψ_4; nad to křivky systému $(D)_5$ a nadroviny prostoru S_5 tvoří dva projektivní systémy. Perspektivním řadám bodovým na t_i, t'_i, jichž střed je v S'_i, příslušejí patrně perspektivní řady bodové na dvou vytvořujících přímkách kužele ψ_4; buď s'_i střed této perspektivity. Křivka v ω, příslušná v naší korespondenci řezu kužele S_4 nadrovinou $(s'_1\, s'_2\, s'_3\, s'_4\, s'_5)$, je hledaná D^λ. Nehodlám se šířiti o detailech konstrukce, zejména o grafickém provedení, ať projekcí S_5 v prostory o méně dimensích či jinou realisací S_5. Je však, a to již vzhledem ku předešlému odstavci, podotknouti, že jest tyto úvahy modifikovati, jakmile některá z přímek $t_1 \ldots t_5$, $t'_1 \ldots t'_5$ je tečnou Darboux-Segreovou.

9. V tom případě zvláštním, kdy na př. $t_5 \equiv t'_4$, tedy tečny t_4 a t_5 jsou konjugované, dovedeme určiti obě Moutardovy kvadriky φ_4, φ'_4

---

* Řád čtyři křivek systému $(P)_5$ nelze dále snížiti Cremonovou transformací.

a tedy i průsečíky R_4, R_5 křivky D^λ s přímkami t_4, t_5. D^λ náleží nyní trojmocnému lineárnímu systému křivek čtvrtého řádu s trojným bodem v O, dotýkajících se zde tečen Darboux-Segreových a procházejících body R_4, R_5. Transformujeme-li tento systém inversí I vzhledem k některé kuželosečce, dotýkající se v R_4, R_5, resp. OR_4, OR_5, pro O jako pól inverse, obdržíme trojmocný lineární systém $(E)_3$ křivek třetího řádu s pevným dvojným bodem v O a třemi jednoduchými pevnými body v průsečících přímky R_4R_5 s tečnami Darboux-Segreovými*; křivka D^λ přejde v tu křivku E^λ systému $(E)_3$, pro kterou oba (od O různé) průsečíky s t_i, t_i' $(i=1,2,3)$ si odpovídají v projektivitě π_i', ve kterou přejde inversí I perspektiva o středu S'_i. Nyní postupujeme jako v případě obecném. Zvolme v $(E)_3$ libovolně *nerozpadlou* křivku E'. Dále zvolme pomocný lineární prostor S_3 o třech dimensích a v něm kuželosečku k_2; stanovme projektivitu π mezi svazkem (O,ω) a řadou bodů na k_2. Těmi dvěma body na k_2, jež příslušejí v π oběma tečnám E' v O, veďme v S_3 rovinu S_2' různou od roviny kuželosečky k_2, a mimo obě roviny zvolme v S_3 bod T. Promítněme k_2 s T kuželem ψ_2 a stanovme mezi ω a ψ_2 biracionální korespondenci takto: Je-li M kterýkoli bod v ω, protne přímka OM přímku R_4R_5 a křivku E' (mimo v O), resp. v bodech N, N'. Přímce OM přísluší v π bod n na k_2; přímka Tn protne S'_2 v bodě n'. Bod m přímky Tn, určený podmínkou $(OMNN') = (nmTn')$ přiřadíme bodu M. Snadno nahlédneme, že, opisuje-li M kteroukoli křivku systému $(E)_3$, opíše m kuželosečku na ψ_2; systém $(E)_3$ a systém rovin v S_3 jsou projektivní. Projektivitě π_i' mezi řadami bodů na t_i, t' $(i=1,2,3)$ přísluší perspektiva mezi dvěma vytvořujícími přímkami ψ_2, jejíž střed buď s_i. Rovina $(s_1 s_2 s_3)$ protne ψ_2 v kuželosečce, které přísluší hledaná E^λ.

Jestliže však konečně vedle t_4, t_5 také na př. t_2, t_3 jsou konjugované, známe pro křivku D^λ systému $(D)_5$ čtyři body R_2, R_3, R_4, R_5, čímž jest omezena na svazek $(D)_1$, jsouc určena tím, že její průsečíky s t_1, t'_1 leží na přímce se známým bodem S_1'. Ale křivky svazku $(D)_1$ protínají t_1, t'_1 ve dvou perspektivních řadách bodových; buď S_0 střed této perspektivity. Průsečíky přímky S'_1S_0 s t_1 a t'_1 náležejí křivce D^λ, čímž je stanovena.

---

* I. v systém kuželoseček bylo lze převésti $(D)_3$, ne však symetricky vzhledem k tečnám Darboux-Segreovým, ostatně není ani třeba užívati I, nýbrž mohli jsme zcela dobře uvažovati přímo $(D)_3$.

LES QUADRIQUES DE MOUTARD.

CONTRIBUTION À LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE INFINITÉSIMALE DES SURFACES.

PAR

EDOUARD ČECH.

(RÉSUMÉ DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT.)

Dans une lettre adressée en 1863 à Poncelet, Moutard a établi que les coniques osculatrices des différentes sections planes d'une surface quelconque menées par une tangente fixe à un point simple forment une quadrique. En 1880, Darboux a retrouvé la même quadrique* que nous appelerons, avec Wilczynski, *la quadrique de Moutard.*

Je ne connais aucun travail s'occupant de la liaison qui existe entre les quadriques de Moutard appartenant aux diverses tangentes d'un même point de la surface. C'est l'étude de cette liaison qui forme l'objet de mon mémoire. En supposant que le point O considéré soit le point (0, 0, 0, 1), et le plan tangent ω à la surface proposée Π en O ait l'équation $x_3 = 0$, j'écris l'équation de Π sous la forme

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} + \varepsilon_1\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \varepsilon_2\left(\frac{x_2}{x_4}\right)^3 + \varphi_4\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}\right) + \cdots,$$

qui met en évidence la terne $x_3 = \varepsilon_1 x_1^3 + \varepsilon_2 x_2^3 = 0$ des tangentes à osculation quadrique de Darboux**. L'équation (7) de mon mémoire donne alors la quadrique de Moutard appartenant à la tangente (2). Partant de cette équation, on peut d'abord former une certaine série de transformations birationnelles entre le plan tangent ω et l'étoile O, attachée à la surface, ce que j'ai déjà fait ailleurs. En premier lieu, on fera correspondre à un point P du plan ω le plan polaire π de ce point par rapport à la quadrique de Moutard appartenant à la droite OP; ce sera la transformation Σ_1. En second lieu, on prendra au lieu de π_1 le plan polaire π_{-3} de P par rapport à la quadrique de Moutard appartenant à la tangente conjuguée à OP; ce sera la transformation Σ_{-3}. Enfin, k étant une constante arbitraire, on construira le plan π_{-k} tel que le rapport anharmonique $(\omega\,\pi_1\,\pi_{-3}\,\pi_k) = \dfrac{1-k}{4}$; ce plan correspondra au point P dans la transformation générale Σ_k. En appelant u_i les coordonnées tangentielles, on trouve (6) comme les équations de Σ_k. La transformation Σ_0 est linéaire; elle fait correspondre à un point arbitraire P du plan ω son plan polaire par rapport à toutes

* Sur le contact des courbes et des surfaces, Bull. des Sc. math. et astr., 2e sér., t. IV.

** V. Darboux, l. c.

les quadriques d'un certain faisceau (Q), défini comme suit: chaque quadrique du faisceau a, en O, un contact du second ordre avec Π et leur courbe d'intersection touche en O toutes les trois tangentes à osculation quadrique. L'équation d'une quadrique arbitraire Q^λ du faisceau (Q) est (10). Pour $k \neq 0$, Σ_k est, en général, une transformation cubique. La transformation Σ_{-3} est identique avec celle qui avait été considérée par Segre*. Connaissant la Σ_k pour une valeur particulière $k\,(\neq 0)$, on obtiendra aisément toutes les autres à l'aide de la proposition suivante: A un faisceau arbitraire de plans de l'étoile O, correspond dans Σ_k une courbe cubique rationnelle avec un point double en O, touchant ici les deux tangentes asymptotiques, et dont les points d'inflexion se trouvent à l'intersection de la ponctuelle correspondante à ce faisceau dans la transformation Σ_0 avec les tangentes à osculation quadrique; la courbure de cette cubique dans une quelconque des deux branches en O est $-\frac{2k}{3}$ fois celle de la courbe asymptotique correspondante. Dans ce qui suit, on suppose connues les transformations Σ_k.

Ces préliminaires admis, appelons Ω la transformation suivante dans la variété de toutes les droites de l'espace: Une droite générale p coupe ω dans un point P; la droite p' correspondante à p dans Ω est sa polaire réciproque par rapport à la quadrique de Moutard appartenant à la tangente OP. Les coordonnées de p étant $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, celles de p' sont données par (9); celles de la droite $p^{(-1)}$ correspondante a p dons Ω^{-1} sont (9'). Il est évident que la construction de p', la droite p étant donnée, est entièrement équivalente au problème proposé. Cette modification de la question, il est vrai, ne paraît pas avantageuse, les expressions (9) étant des polynomes du septième degré en p_{ij}; cependant. il est facile de décomposer Ω en des éléments bien plus simples.

Une fois pour toutes, choisissons une quadrique arbitraire, mais fixe, Q^λ du faisceau (Q), donnée par l'équation (10). Soit $p^{(\lambda)}$ la polaire réciproque de p par rapport à Q^λ. Or les droites p', $p^{(-1)}$, $p^{(\lambda)}$ déterminent une série de génératrices rectilignes d'une quadrique réglée; soit q' (q'') celle génératrice de cette série qui appartient à ω (qui passe par O), Les coordonnées de q' et q'' sont respectivement (13) et (14). Les droites q', q'' étant connues, on construirait aisément p' et $p^{(-1)}$ à l'aide des relations anharmoniques

$$(p^{(\lambda)}\, q'\, p'\, p^{(-1)}) = -\tfrac{1}{3},\ (p^{(\lambda)}\, q''\, p'\, p^{(-1)}) = -3.$$

Voici une première réduction du problème; car, en variant la droite p dans un faisceau dont le centre P appartient à ω et dont le plan π passe par O, les droites q', q'' ne varient pas, comme le montrent tout de suite les équations (13) et (14).

* Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie. Rend Acc. Lincei 1908.

On peut pousser la réduction plus loin. Occupons nous d'abord de la droite q'. Soit, comme plus haut, P le point d'intersection de p avec ω, et π le plan $p\,O$; la droite q' du plan ω coupe OP en y et la tangente conjuguée en z. Nous avons déjà que ces deux points restent fixes, quand p décrit le faisceau $(P\pi)$; mais il y a de plus: le point z dépend seulement du plan π et non plus du point P; le point y, au contraire, ne dépend que du point P. C'est ce que montrent les formules (18) et (19). La relation entre π et z n'est rien d'autre que $\Sigma_{\frac{3}{2}}$, et ne dépend ainsi que de l'élément du troisième ordre de la surface Π. Quant à y, on l'obtient comm'il suit: dans le plan ω, l'équation (21) définit une courbe fixe C^λ qui, en dehors de O, coupe OP en un seul point R, et le point y est le conjugué harmonique de P par rapport au couple OR. La droite q'' conduit naturellement à un résultat corrélatif, la courbe C^λ étant rémplaçée par le cône Γ^λ donné par l'équation (23). La courbe C^λ est, en général, du sixième ordre, elle a en O un point quintuple dont les tangentes sont les deux tangentes asymptotiques et les trois tangentes à osculation quadrique; sa courboure dans les deux premières branches est égale à $+\frac{5}{6}$ de celle de la courbe asymptotique correspondante.

La quadrique Q^λ étant choisie et la courbe C^λ correspondante étant connue, les transformations Σ_k et le cône Γ^λ sont déjà déterminés; dans le texte, je donne la construction qui cependant, dans le cas général, n'est point simple.

A une autre occasion, je montrerai que l'on peut, à la place des éléments introduits, en substituer d'autres plus simples et qui ont une signification intrinsèque visible; dans le travail présent, je me borne a remarquer que la transformation $\Sigma_{-\frac{5}{4}}$ remplace Γ^λ par une courbe plus simple D^λ, donnée par l'équation (27). La courbe D^λ est, en général, du quatrième ordre; elle a un point triple en O, touchant ici les tangentes à osculation quadrique.

En terminant je cherche encore de construire Γ^λ et C^λ en supposant connues les coniques osculatrices de cinq sections planes de Π. Je donne une construction linéaire à l'aide d'un espace linéaire auxiliaire a cinq dimensions; dans le cas particulier où deux de ces sections touchent des tangentes conjuguées, la construction s'effectue tout entière dans l'espace ordinaire.