Eduard Čech

Propriétés projectives du contact. II

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 121 (1930), 21 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500835

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1930 Čís. 121

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DU CONTACT

II

PAR

EDOUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DU CONTACT.
II.

Ce Mémoire est divisé en deux chapitres. Dans le premier, je reviens encore sur la question déjà étudiée[1] de l'ordre du contact des projections de deux courbes ayant un contact d'ordre donné, le centre de projection étant le même pour les deux courbes. Seulement, il s'agit maintenant du contact *analytique* au sens de M. Fubini.

Dans le second chapitre, j'étudie l'ordre du contact des projections d'une courbe C de deux centres différents $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$.

Dans le cas très particulier où l'espace ambiant a trois dimensions et que l'on projette dans le plan osculateur à la courbe C, j'avais donné la solution déjà en 1921[2]: si la droite $(\overset{1}{Z}\overset{2}{Z})$ rencontre la tangente à C, l'ordre du contact est égal à *trois*; à *quatre* si la droite $(\overset{1}{Z}\overset{2}{Z})$ passe par le point étudié de C. Dans l'espace à plus dimensions, le résultat est (v. § 4) à peu près le même si les centres de projection $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ sont des *points*. Le résultat général se trouve au § 3. Le problème dépend essentiellement d'une homographie H qui ne dépend que des espaces $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ et de l'espace Ξ dans lequel on projette la courbe C. Cette homographie est étudiée au § 2. Au § 5, je traite le cas particulier où $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ sont des *droites*; au § 6, d'autres cas particuliers.

CHAPITRE I.

Sur l'ordre du contact analytique des projections de deux courbes ayant un contact analytique d'ordre donné.

§ 1. Définition du contact analytique.

Soit $(u_1, \ldots u_n)$ un système de coordonnées curvilignes dans un espace E_n à n dimensions. Considérons deux courbes[3] C_1, C_2 de l'espace E_n *rapportées au même paramètre* v.

Soient
$$u_i = \varphi_i(v); \quad u_i = \psi_i(v) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

[1] *Propriétés projectives du contact.* I. Ces Publications, année 1928, N° 91. Je citerai ce Mémoire par l'abréviation C I.

[2] *K diferenciální geometrii prostorových křivek.* Rozpravy české akademie, t. 30, 1921, N° 15. V. aussi mon livre *Projektivní diferenciální geometrie*, 1926, p. 153—155; c'est la méthode là employée dont je me sers au Mémoire présent.

[3] J'emploie ici le mot courbe dans le même sens comme C I, § 1.

les équations de C_1 et C_2. Le paramètre v définit une correspondance T entre C_1 et C_2. D'après M. Fubini[1], je dirai que C_1 et C_2 *ont pour* $v = \mathring{v}$ *un contact analytique d'ordre* $s-1$ $(s \geqq 1)$ *par rapport à la correspondance* T *si*

$$\left[\frac{d^\nu \psi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}} = \left[\frac{d^\nu \varphi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}$$
$$(1 \leqq i \leqq n;\quad 0 \leqq \nu \leqq s-1).$$

Dans ce qui suit, les deux courbes C_1 et C_2 seront toujours rapportées à un paramètre v donné, et je supprimerai par suite les mots »par rapport à la correspondance T«. Parfois je dirai aussi que $s-1$ est *l'ordre analytique* du contact entre C_1 et C_2.

Evidemment, la notion du contact analytique est invariante par rapport aux changements réguliers[2] des coordonnées curvilignes $(u_1 \ldots u_n)$ ainsi que par rapport aux changements du paramètre v obtenus en posant $v = F(w)$ avec $\frac{dF}{dw} \neq 0$; naturellement on doit changer le paramètre simultanément et de la même manière pour les deux courbes.

La notion ordinaire de contact se ramène immédiatement à celle, plus simple au fond, du contact analytique: les courbes C_1 et C_2 ont pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s-1$ si elles y ont un contact analytique de cet ordre par rapport à une correspondance T convenablement définie, et dans ce cas seulement.

§ 2. Cas des coordonnées homogènes.

Rapportons maintenant l'espace E_n à un système de $n+1$ coordonnées homogènes $x^{(0)}, x^{(1)} \ldots, x^{(n)}$. Les équations des courbes C_1 et C_2 soient

$$x^{(i)} = \varphi_i(v), \quad x^{(i)} = \psi_i(v). \qquad (0 \leqq i \leqq n)$$

Je supposerai que le point $v = \mathring{v}$ soit simple[2] pour les deux courbes. Nous savons[3] que cela signifie qu'un au moins des déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(\mathring{v}), & \psi_i(\mathring{v}) \\ \varphi_j(\mathring{v}), & \psi_j(\mathring{v}) \end{vmatrix} \qquad (0 \leqq i < j \leqq n)$$

est différent de zéro.

Evidemment, condition nécessaire et suffisante pour que le contact soit analytique d'ordre $s-1$ pour $v = \mathring{v}$ est que l'on puisse trouver une fonction[4] $\varrho(v)$ telle que

---

[1] Pour la première fois au Mémoire: *Applicabilità proiettiva di due superficie*, Rendiconti del. Circ. Mat. di Palermo, t. 41, 1916.

[2] V. C I, § 1.

[3] V. C I, § 3.

[4] Le mot „fonction“ a toujours les sens précisé en C I, § 1.

$$\left[\frac{d^\nu}{dv^\nu}\left(\varrho(v)\cdot\varphi_i(v)-\psi_i(v)\right)\right]_{v=\mathring{v}}=0.$$
$$(0\leqq i\leqq n;\quad 0\leqq \nu\leqq s-1)$$

On peut alors remplacer φ_i par $\varrho\varphi_i$; ensuite on a

$$\varphi_{i\nu}=\psi_{i\nu},\qquad (0\leqq i\leqq n;\ 0\leqq\nu\leqq s-1) \tag{1}$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\left[\frac{d^\nu\varphi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}=\varphi_{i\nu},\quad \left[\frac{d^\nu\psi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}=\psi_{i\nu}.$$
$$(\nu=0,1,2\ldots;\quad 0\leqq i\leqq n)$$

Les conditions (1) *étant vérifiées, les courbes* C_1 *et* C_2 *ont pour* $v=\mathring{v}$ *un contact analytique d'ordre* $s+\sigma-1$ $(1\leqq\sigma\leqq s)$ *lorsque et seulement lorsque on peut trouver des nombres* b_ν $(0\leqq\nu\leqq\sigma-1)$ *telsque*

$$\psi_{i,s+t}-\varphi_{i,s+t}=\sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu}b_{t-\nu}\,\varphi_{i\nu}. \tag{2}$$
$$(0\leqq i\leqq n;\quad 0\leqq t\leqq\sigma-1)$$

On obtient la démonstration en posant $F(v)=v$ dans la démonstration donnée en CI, § 3. Plus généralement, on voit que les équations

$$\psi_{i,s+t}-\varphi_{i,s+t}=\sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu}\left(a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1}+b_{t-\nu}\varphi_{i\nu}\right) \tag{3}$$
$$(0\leqq i\leqq n;\quad 0\leqq t\leqq\sigma-1)$$

avec

$$a_\nu=0\ \text{ pour }\ 0\leqq\nu\leqq\sigma'-1 \tag{3'}$$

soit les conditions nécessaires et suffisantes pour que, les équations (1) étant vérifiées, les courbes C_1 et C_2 aient pour $v=\mathring{v}$ un contact qui soit simultanément d'ordre $s+\sigma-1$ $(1\leqq\sigma\leqq s)$ et d'ordre analytique $s+\sigma'-1$ $(1\leqq\sigma'\leqq\sigma)$.

§ 3. Sur le contact analytique des projections de deux courbes.

Dorénavant, supposons que l'espace ambiant E_n soit un espace projectif à n dimensions rapporté à un système de $n+1$ coordonnées homogènes linéaires. Comme en C I, § 4, je désignerai simplement par $x(v)$, $y(v)$ l'ensemble des $n+1$ coordonnées homogènes du point mobile de C_1, C_2 et je poserai, pour abréger,

$$\left[\frac{d^\nu x(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}=x_\nu,\quad \left[\frac{d^\nu y(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}=y_\nu.$$
$$(\nu=0,1,2\ldots)$$

Je supposerai: 1° *que le point* $v = \mathring{v}$ *soit simple pour* C_1 *et* C_2, *c'est-à-dire que*[1]

$$(x_0 x_1) \neq 0, \quad (y_0 y_1) \neq 0;$$

2° *que* C_1 *et* C_2 *aient pour* $v = \mathring{v}$ *un contact analytique d'ordre précisément* $s - 1$ $(s \geqq 1)$; cela veut dire qu'il y un contact analytique d'ordre $s-1$, mais non d'ordre s. D'après la condition 2°, je puis supposer que

$$x_\nu = y_\nu \qquad (0 \leqq \nu \leqq s-1) \tag{4}$$

et j'aurai l'inégalité

$$(y_s - x_s, \quad x_0) \neq 0, \tag{5}$$

car autrement les conditions (2) (avec $\sigma = 1$) donneraient que les deux courbes ont pour $v = \mathring{v}$ un contact analytique d'ordre s.

Ceci étant, soit O un espace linéaire à $m\,(\geqq n-3)$ dimensions ne contenant pas le point $x_0\,(=y_0)$; soit Ω un espace linéaire à $n-m-1$ $(\geqq 2)$ dimensions sans point commun avec O. Je désignerai par C^*_1, C^*_2 les projections des courbes C_1, C_2 dans l'espace Ω, le centre de projection étant en O. Pour que la projection du point x_0 soit un point simple pour C^*_1 et C^*_2, je supposerai de plus que l'espace O n'ait aucun point commun avec les droites $(x_0 x_1)$ et $(y_0 y_1)$ (coïncidantes pour $s \geqq 2$).

Je vais étudier les conditions pour que les courbes C^*_1, C^*_2 *aient pour* $v = \mathring{v}$ *un contact analytique d'ordre* $s + \sigma - 1$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$. Ces conditions, sous forme analytique, se trouvent déjà implicitement en CI, § 4; d'après le paragraphe précédent, il suffit d'y poser $a_\nu = 0$. Donc condition nécèssaire et suffisante pour le contact demandé est que l'on puisse trouver des nombres b_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ tels que le centre de projection O contienne les points

$$y_{s+t} - x_{s+t} - \sum_{\nu=0}^{t} \binom{s+t}{\nu} b_{t-\nu} x_\nu. \tag{6}$$
$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

Il est facile d'interpréter cette condition. A cet effet, considérons la surface réglée R engendrée par les droites qui joignent les couples $x(v)$, $y(v)$ des points correspondants des deux courbes C_1, C_2.

Les génératrices de R peuvent s'écrire

$$[x(v), \quad z(v)],$$

où

$$z(v) = \frac{y(v) - x(v)}{(v - \mathring{v})^s}. \tag{7}$$

Cela suppose $v \neq \mathring{v}$; la génératrice de R correspondant à $v = \mathring{v}$ est naturellement indéterminée, car $x_0 = y_0$; mais en posant

$$z(\mathring{v}) = \frac{y_s - x_s}{s!}, \tag{7'}$$

[1] Pour la notation, v. CI, § 4.

on voit sans peine que les $n+1$ coordonnées homogènes du point $z(v)$ possèdent les dérivées de tous les ordres aussi pour $v = \mathring{v}$. Il est donc naturel de regarder la droite $(x_0, z(\mathring{v}))$ comme la génératrice de R correspondant à $v = \mathring{v}$. D'après (7) et (7'), les points (6) deviennent, comme on voit sans difficulté,

$$\frac{(s+t)!}{s!}\left[\frac{d^t}{dv^t}\left(z(v) - \varphi(v)\, x(v)\right)\right]_{v=\mathring{v}} \quad (0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

$\varphi(v)$ désignant une fonction telle que

$$\left(\frac{d^\nu \varphi}{d v^\nu}\right)_{v=\mathring{v}} = \frac{\nu!}{(s+\nu)!}\, b_\nu, \quad (0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$$

donc complètement arbitraire, les nombres b_ν étant à notre disposition. On en déduit sans peine: *Les courbes projetées $C_1{}^*$ et $C_2{}^*$ on pour $v = \mathring{v}$ un contact analytique d'ordre $s + \sigma - 1$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ si et seulement si le centre de projection O contient un espace O' construit de la manière suivante: On fera correspondre, point par point, à la courbe C_1 une autre courbe C' ne contenant pas le point x_0 et telle que, pour chaque valeur du paramètre v, le point correspondant de la courbe C' soit situe sur la droite qui joint les deux points correspondants de C_1 et C_2; l'espace O' est alors l'espace osculateur d'ordre $\sigma - 1$*[1] *à la courbe C' pour $v = \mathring{v}$.*

Il serait facile de déduire de ce théorème de nouveau le théorème donné en C I, § 9; mais je n'y insisterai plus.

CHAPITRE II.

Sur l'ordre du contact des projections d'une courbe de deux centres différents.

§ 1. Énoncé du problème. Notations.

Considérons une courbe C immergée dans un espace projectif E_n à n $(\geqq 3)$ dimensions. Soient $x(v)$ les $n+1$ coordonnées homogènes du point mobile de C exprimées en fonction d'un paramètre v. Le point $v = \mathring{v}$ soit simple pour la courbe C, c'est-à-dire soit $\left(x \frac{dv}{dx}\right) \neq 0$ pour $v = \mathring{v}$.

Dans ce qui suit, le symbole E_m $(-1 \leqq m \leqq n)$ signifiera chaque espace (linéaire) à m dimensions immergé dans l'espace ambiant E_n; E_{-1} est donc l'espace vide, E_0 est le symbole pour les points de E_n.

Soit $0 \leqq m \leqq n-3$. Soit Ξ un E_{n-m-1} donné; cet espace soit donné comme intersection de $m+1$ hyperplans linéairement indépendants $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$. Soit $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ deux *différents* E_m fixes sans point

[1] Dans le sens précisé en C I, § 9.

commun avec Ξ; l'espace $\overset{i}{Z}$ $(i = 1, 2)$ soit donné moyennant $m + 1$ points linéairement indépendants $\overset{i}{z}_0, \overset{i}{z}_1, \ldots, \overset{i}{z}_m$. Soit Z_0 l'intersection des deux espaces $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$; soit Z le plus petit espace linéaire contenant à la fois $\overset{1}{Z}$ et $\overset{2}{Z}$. L'espace Z_0 est un E_q avec $-1 \leqq q \leqq m - 1$; l'espace Z est un E_{2m-q}.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer: 1° $\overset{1}{z}_h = \overset{2}{z}_h$ pour $m - q \leqq h \leqq m$; 2°

$$S\,\xi_k\,\overset{1}{z}_j = S\,\xi_k\,\overset{2}{z}_j = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \neq j, \\ 1 \text{ pour } k = j, \end{cases} \qquad (0 \leqq k,\ j \leqq m) \tag{1}$$

le symbole S indiquant une sommation relative aux $n + 1$ coordonnées homogènes. L'espace Z_0 est alors évidemment déterminé par les points,

$$\overset{1}{z}_{m-q}, \ldots, \overset{1}{z}_m = \overset{2}{z}_{m-q}, \ldots, \overset{2}{z}_m;$$

l'espace Z est déterminé p. ex. par les points

$$\overset{1}{z}_0, \ldots, \overset{1}{z}_m, \overset{2}{z}_0, \ldots, \overset{2}{z}_{m-q-1}.$$

Désignons encore par Σ_0 l'intersection des deux espaces Ξ, Z et par Σ le plus petit espace linéaire contenant à la fois Ξ et Z_0. Des relations (1) on déduit sans difficulté: 1° l'espace Σ_0 est déterminé par les points

$$z_0, z_1, \ldots, z_{m-q-1},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$z_h = \overset{2}{z}_h - \overset{1}{z}_h; \quad (0 \leqq h \leqq m - q - 1) \tag{2}$$

c'est donc un E_{m-q-1}; 2° l'espace Σ est l'intersection des hyperplans

$$\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{m-q-1};$$

c'est donc un E_{n-m+q}.

Ceci étant projetons la courbe C deux fois dans l'espace Ξ, le premier centre de projection étant $\overset{1}{Z}$, le second $\overset{2}{Z}$. Supposons que les espaces $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ soient sans point commun avec la tangente à la courbe C au point $v = \mathring{v}$, pour que $v = \mathring{v}$ soit un point simple pour les projections. Selon les relations (1), les courbes projetées C_1, C_2 sont engendrées respectivement par les points $\overset{1}{X}(v)$, $\overset{2}{X}(v)$, où

$$\overset{i}{X}(v) = x(v) - \sum_{k=o}^{m} S\,\xi_k\, x(v) \,.\, \overset{i}{z}_k. \quad (i = 1, 2)$$

En posant $\overset{2}{X}(v) - \overset{1}{X}(v) = X(v)$, on a évidemment

$$X(v) = x(v) - \sum_{h=o}^{m-q-1} S\,\xi_h\, x(v) \,.\, z_h.$$

J'indiquerai par l'indice ν ($\nu=0,1,2,\ldots$) l'opération $\left(\frac{d^\nu}{dv^\nu}\right)_{v=\mathring{v}}$ de manière que

$$\overset{i}{X}_\nu = x_\nu - \sum_{k=o}^{m} S\xi_k x_\nu \,.\, z_k, \quad (i=1,2;\ \nu=0,1,2\ldots) \tag{3}$$

$$X_\nu = \sum_{h=o}^{m-q-1} S\xi_h x_\nu \,.\, z_h. \quad (\nu=0,1,2\ldots) \tag{4}$$

Je supposerai que *la courbe C ait pour $v=\hat{v}$ un contact d'ordre précisément $s-1$ ($s \geqq 1$) avec l'espace Σ*; cet espace contiendra donc les points x_ν ($0 \leqq \nu \leqq s-1$) mais non le point x_s; l'espace Σ étant l'intersection des hyperplans $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-q-1}$ on aura d'après (4)

$$X_\nu = 0 \text{ pour } 0 \leqq \nu \leqq s-1;\ X_s \neq 0. \tag{5}$$

D'après (5) on a $\overset{1}{X}_\nu = \overset{2}{X}_\nu$ pour ($0 \leqq \nu \leqq s-1$) de manière que *les courbes projetées C_1, C_2 ont toujours pour $v=\mathring{v}$ un contact analytique*[1] *d'ordre* $s-1$. Nous allons étudier les conditions pour que les courbes C_1, C_2 aient pour $v=\mathring{v}$ un contact d'ordre $s+\sigma-1$ ($\sigma \geqq 1$), *en posant la condition restrictive* $\sigma \leqq s$. D'après CI § 3 condition nécessaire et suffisante pour le contact demandé est que l'on puisse déterminer des nombres a_ν, b_ν ($0 \leqq \nu \leqq \sigma-1$) tels que

$$X_{\lambda+s} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{s+\lambda}{\nu} (a_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_{\nu+1} + b_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_\nu); \tag{6}$$
$$(0 \leqq \lambda \leqq \sigma-1)$$

de plus nous savons (Chap. I, § 2) que ce contact est d'ordre analytique $s+\sigma'-1$ ($1 \leqq \sigma' \leqq \sigma$) dans le cas où

$$a_\nu = 0 \text{ pour } 0 \leqq \nu \leqq \sigma'-1 \tag{7}$$

et dans ce cas seulement.

§ 2. L'homographie fondamentale.

J'appellerai *homographie fondamentale* l'homographie H portant le point arbitraire y dans la position

$$Y = Hy = \sum_{h=0}^{m-q-1} S\xi_h y \,.\, z_h. \tag{8}$$

Cette homographie est évidemment dégénérée, car si le point y appartient à l'espace Σ, on a $Y=0$; réciproquement, l'équation $Y=0$ entraîne que le point y appartient à Σ car les points z_h ($0 \leqq h \leqq m-q-1$) sont linéairement indépendants. Il en résulte que, lorsque le point y décrit tout

---

[1] Par rapport à la correspondance T définie par le paramètre v, ce qui sera toujours sous entendu. Les points de C_1, C_2 se correspondant dans T sont évidemment les deux projections du même point de la courbe C.

l'espace ambiant E_n, le lieu du point Y est un E_{m-q-1} (car Σ est un E_{n-m+q}); d'ailleurs, les équations (8) montrent immédiatement que cet E_{m-q-1} est l'espace Σ_0 déterminé par les points $z_0, z_1, \ldots z_{m-q-1}$.

Les espaces $\Xi, \overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ étant donnés (ce qui détermine aussi l'espace Σ), l'homographie H est bien déterminée. Pour la construire, on peut procéder de la manière suivante. Choisissons le point y arbitrairement, mais en dehors de Σ (car autrement $Y=0$). Projetons le point y du centre Ξ respectivement dans les deux espaces $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$; les projections y_1, y_2 sont bien déterminées (car Ξ est un E_{n-m-1} ne contenant pas y et $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ sont deux E_m sans point commun avec Ξ) et distinctes (autrement comme on voit sans peine, le point y appartiendrait à l'espace Σ); la droite qui joint y_1 et y_2 rencontre l'espace Ξ (car les points y_1, y_2 appartient à l'E_{n-m} déterminé par l'espace Ξ et par le point y et Ξ est un hyperplan de cet E_{n-m}) au point cherché Hy. En effet, on peut poser

$$y_i = \sum_{k=0}^{m} \lambda_{ik} \overset{i}{z}_k, \quad (i=1,\ 2)$$

λ_{ik} étant des constantes telles que le point $y_i - y$ soit situé dans l'espace $\Xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_m)$.

Ceci donne, selon les équations (1),

$$\lambda_{1k} = \lambda_{2k} = S\,\xi_k\, y; \qquad (0 \leqq k \leqq m)$$

l'intersection de la droite $(y_1,\ y_2)$ avec l'espace Ξ est évidemment

$$y_2 - y_1 = \sum_{k=0}^{m} S\,\xi_k\, y\ .\ (\overset{2}{z}_k - \overset{1}{z}_k) = \sum_{h=0}^{m-q-1} S\,\xi_h\, y\ .\ z_h = Hy,$$

c. q. f. d.

Si l'on a donné la position des espaces Ξ, Z_0, Z (ce qui détermine aussi les espaces Σ et Σ_0) et l'homographie H (telle que $Hy=0$ si et seulement si y appartient à Σ, et telle que Hy appartient à Σ_0 pour chaque position de y), on peut encore préscrire arbitrairement la position de $\overset{1}{Z}$ (sauf les conditions évidentes de contenir Z_0, d'être contenu dans Z et de ne pas rencontrer Ξ); *la position de l'espace $\overset{2}{Z}$ dépend alors encore d'un paramètre arbitraire.* En effet, on doit choisir les points $\overset{1}{z}_k$ $(0 \leqq k \leqq m)$ déterminant l'espace $\overset{1}{Z}$ de manière que les $q+1$ derniers d'entre eux appartiennent à Z_0; sauf cette condition, les points $\overset{1}{z}_k$ $(0 \leqq k \leqq m)$ peuvent être choisis arbitrairement. Les hyperplans ξ_k $(0 \leqq k \leqq m)$ dont l'intersection forme l'espace Ξ donné sont alors déterminés sans ambiguité par les relations (1). Quant aux points z_h $(0 \leqq h \leqq m-q-1)$, l'homographie H ne les détermine qu'à un facteur commun près, parce qu'en remplaçant z_h par $\lambda\, z_h$ le point Hy acquiert seulement le facteur inessentiel λ. Donc

$$\overset{2}{z}_h = \overset{1}{z}_h + \lambda z_h, \quad \overset{2}{z}_j = \overset{1}{z}_j,$$
$$(0 \leqq h \leqq m - q - 1, \quad m - q \leqq j \leqq m)$$

ce qui détermine l'espace $\overset{2}{Z}$ sauf la constante arbitraire $\lambda \neq 0$.

Géométriquement, l'espace $\overset{2}{Z}$ est caractérisé comme le lecteur vérifiera sans peine, par les propriétés suivantes: Soit $\overset{1}{z} = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k \overset{1}{z}_k$ un point arbitraire de l'espace $\overset{1}{Z}$; selon (1) et (8), le point qui correspond à $\overset{1}{z}$ dans l'homographie H est $z = \sum\limits_{h=0}^{m-q-1} c_h z_h$; l'espace $\overset{2}{Z}$ rencontre toutes les droites $(\overset{1}{z}\, z)$ que l'on obtient lorsque le point $\overset{1}{z}$ décrit l'espace $\overset{1}{Z}$; en outre, l'espace $\overset{2}{Z}$ passe par l'espace Z_0.

Afin de pouvoir (au § 3) expliquer d'une manière plus intuitive la solution géométrique du problème qui nous occupe, introduisons un espace auxiliaire A à $m - q - 1$ dimensions soumis à la seule condition de ne pas rencontrer l'espace Σ. Pour plus de clarté, choisissons le système de référence de manière que Σ soit le lieu des points dont les $m - q$ premières coordonnées homogènes sont nulles; alors on peut prendre pour A l'espace des points dont les $n - m + q + 1$ dernières coordonnées sont nulles. y étant un point arbitraire de l'espace ambiant E_n, désignons par $\{y\}$ sa projection dans l'espace A, le centre de projection étant Σ. Evidemment, les $m - q$ premières coordonnées homogènes du point $\{y\}$ coïncident avec celles de y, tandis que les autres coordonnées de $\{y\}$ sont nulles. On voit sans peine que l'homographie H transforme l'espace A biunivoquement dans la position Σ_0, et que l'on a

$$H y = H\{y\} \tag{9}$$

pour chaque position de y dans l'espace ambiant ($\{y\} = 0$ chaque fois que le point y appartient à l'espace Σ).

§ 3. Théorème général.

Des équations (4) et (8) il s'ensuit

$$X_\nu = H x_\nu. \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots) \tag{10}$$

On en voit déjà l'importance de l'homographie fondamentale pour le problème qui nous occupe. On en pourrait déduire sans peine que, si l'on a donné la courbe C et les espace $\overset{1}{Z}$, Ξ, Σ, la solution du problème dépend *uniquement* de l'homographie H. Mais il est inutile d'y insister, car cela est une conséquence immédiate du théorème plus complet que je donnerai dans ce paragraphe.

Commençons par projeter la courbe C du centre Σ dans l'espace A introduit à la fin du paragraphe précédent; désignons par C^* la courbe projetée. Pour $v \neq \mathring{v}$, le point de C^* correspondant au point $x(v)$ de la courbe C est $\{x(v)\}$; or les points x_ν $(0 \leqq \nu \leqq s-1)$ étant contenus dans l'espace Σ, toutes les coordonnées du point $\{x(v)\}$ s'annullent pour $v = \mathring{v}$, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres $\leqq s-1$ (mais non celles d'ordre s). On peut éviter toute difficulté en multipliant toutes les coordonnées homogènes du point $\{x(v)\}$ $(v \neq \mathring{v})$ par le facteur commun $(v-\mathring{v})^{-s}$. Posons donc

$$x^*(v) = \frac{\{x(v)\}}{(v-\mathring{v})^s} \quad \text{pour } v \neq \mathring{v},$$

$$x^*_0 = x^*(\mathring{v}) = \frac{\{x_s\}}{s!} \neq 0.$$

La courbe C^* est engendrée par le point $x^*(v)$, en convenant de regarder le point x^*_0 comme la projection du point $x_0 = x(\mathring{v})$. Les coordonnées de $x^*(v)$ sont infiniment dérivables aussi pour $v = \mathring{v}$; on trouve sans peine

$$x^*_\nu = \frac{(s+\nu)!}{s!}\{x_{\nu+s}\}, \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots) \tag{11}$$

le premier membre signifiant naturellement $\left(\dfrac{d^\nu x^*}{dv^\nu}\right)_{v=\mathring{v}}$.

Introduisons maintenant au lieu des nombres a_ν, b_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma-1)$ des nouveaux nombres α_ν, β_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma-1)$ moyennant les équations

$$\alpha_\nu = \frac{\nu!}{(s+\nu)!}\,a_\nu, \quad \beta_\nu = \frac{\nu!}{(s+\nu)!}\,b_\nu. \tag{12}$$

D'après (9), (10), (11), (12), les équations (6) exprimant le contact d'ordre $s+\sigma-1$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ des courbes C_1 et C_2 pour $v = \mathring{v}$ deviennent

$$Hx^*_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (\alpha_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_{\nu+1} + \beta_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_\nu), \tag{13}$$

$$(0 \leqq \lambda \leqq \sigma-1)$$

et les conditions (7) pour que l'ordre analytique de ce contact soit $s+\sigma'-1$ $(1 \leqq \sigma' \leqq \sigma)$ deviennent

$$\alpha_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \nu \leqq \sigma' \leqq 1. \tag{14}$$

Pour interpréter géométriquement ces équations, désignons par $\varphi(v)$, $\psi(v)$ des fonctions telles que

$$\left(\frac{d^\nu \varphi}{dv^\nu}\right)_{v=\mathring{v}} = \beta_\nu, \quad \left(\frac{d^\nu \psi}{dv^\nu}\right)_{v=\mathring{v}} = \alpha_\nu \qquad (0 \leqq \nu \leqq \sigma-1)$$

et posons

$$\varphi(v) \overset{1}{X}(v) + \psi(v) \frac{d\overset{1}{X}}{dv} = y(v);$$

en faisant varier v, le point $y(v)$ décrit une courbe Γ en correspondance biunivoque avec C; c'est évidemment une courbe arbitraire tracée sur la développable engendrée par les tangentes à la courbe C. Les équations (13) prennent la forme simple

$$Hx^*_\lambda = \left(\frac{d^\lambda y}{dv^\lambda}\right)_{v=\mathring{v}}; \tag{15}$$

elles expriment que *la courbe HC^* transformée de C^* a pour $v=\mathring{v}$ un contact analytique d'ordre $\sigma-1$ avec une courbe Γ convenablement choisie sur la développable engendrée par les tangentes à la courbe C.* Quant aux conditions (14), elles deviennent

$$\left(\frac{d^\nu \psi}{dv^\nu}\right)_{v=\mathring{v}} = 0; \qquad (0 \leqq \nu \leqq \sigma' - 1)$$

elles expriment que *la courbe Γ a pour $v=\mathring{v}$ un contact analytique d'ordre $\sigma'-1$ avec la courbe C.* En particulier, pour $\sigma'=\sigma$, c'est-à-dire si l'on demande un contact analytique d'ordre $s+\sigma-1$ entre C_1 et C_2, on peut prendre $\Gamma = C$.

Remarquons encore que l'interprétation donnée aux équations (13) et (14) montre qu'on peut y remplacer $x^*(v)$ par $\varrho(v)\,.\,x^*(v)$, $\varrho(v)$ étant une fonction telle que $\varrho(\mathring{v}) \neq 0$, mais d'ailleurs arbitraire.

§ 4. Le cas $m=0$.

Dans ce cas les centres de projection $\overset{1}{Z}$ et $\overset{2}{Z}$ sont des points; l'espace Ξ est un hyperplan; l'espace Σ coïncide avec Ξ et l'espace Σ_0 se réduit au point d'intersection de la droite $(\overset{1}{Z}\overset{2}{Z})$ avec l'hyperplan Ξ. L'homographie H fait correspondre à chaque point situé en dehors de Ξ le point Σ_0. La courbe HC^* se réduit au point Σ_0. En profitant de la remarque faite à la fin du paragraphe précédent, on reconnaît que l'on peut supposer

$$Hx^*_0 \neq 0; \quad Hx^*_\nu = 0 \text{ pour } \nu = 1, 2 \dots \tag{16}$$

Le point Hx^*_0 coïncide en position avec Σ_0.

Ceci étant, commençons par écrire la première des équations (13):

$$Hx^*_0 = \alpha_0 \overset{1}{X}_1 + \beta_0 \overset{1}{X}_0. \tag{17}$$

A droite figure un point arbitraire de la tangente $(\overset{1}{X}_0\overset{2}{X}_1)$ à la courbe C_1 au point $v=\mathring{v}$. Donc: *Pour que les courbes projetées C_1, C_2 aient pour $v=\mathring{v}$ un contact d'ordre s, il faut et il suffit que le point Σ_0 soit situé sur la tangente à la courbe C_1 au point $v=\mathring{v}$.* Le point $\overset{1}{Z}$ étant donné, on peut choisir $\overset{2}{Z}$ arbitrairement dans le plan $(\overset{1}{X}_0\overset{1}{X}_1 Z_1)$ (en dehors de la droite $(\overset{1}{X}_0\overset{1}{X}_1)$ et du point $\overset{1}{Z}$). *Ce contact est d'ordre analytique s si et seulement si le point Σ_0 coïncide avec* $\overset{1}{X}_0 = x_0$ (cette égalité résulte de ce que $s \leqq 1$). Le point $\overset{1}{Z}$ étant donné, on peut choisir $\overset{2}{Z}$ arbitrairement sur la droite $(\overset{1}{Z}x_0)$ (mais différent de $\overset{1}{Z}$ et de x_0).

Supposons $s \geqq 2$. De plus, *supposons pour un moment que le point* $v = \mathring{v}$ *ne soit pas point d'inflexion pour la courbe* C_1*;* cela est exprimé par l'inégalité

$$(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1 \overset{1}{X}_2) \neq 0. \tag{18}$$

La seconde équation (13) devient selon (16)

$$\alpha_0 \overset{1}{X}_2 + (\beta_0 + \alpha_1) \overset{1}{X}_1 + \beta_1 \overset{1}{X}_0 = 0. \tag{19}$$

Elle exige, d'après (18),

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -\beta_0, \quad \beta_1 = 0. \tag{20}$$

Donc: *Pour que les courbes projetées* C_1 *et* C_2 *aient pour* $v = \mathring{v}$ *un contact d'ordre* $s + 1$ $(s \geqq 2)$ *il faut et il suffit que le point* Σ_0 *coïncide avec* x_0. Ce contact ne peut être analytique de cet ordre, car cela exigerait $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, d'où $\beta_0 = 0$ d'après (20), de manière que (17) donnerait $Hx_0{}^* = 0$ contre (16).

En continuant à supposer vérifiée l'inégalité (18), écrivons encore la troisième équation (13) (et supposons donc qe $s \geqq 3$). D'après (16) et (20) cette équation devient

$$-\beta_0 \overset{1}{X}_2 + \alpha_2 \overset{1}{X}_1 + \beta_2 \overset{1}{X}_0 = 0;$$

or ceci exige que $\beta_0 = 0$ et cela est impossible si $\alpha_0 = 0$, comme nous venons de voir. Donc: *Les courbes projetées* C_1 *et* C_2 *ne peuvent avoir pour* $v = \mathring{v}$ *un contact d'ordre* $s + 2$ (sous les suppositions $s \geqq 3$ et (18)).

Soit maintenant $(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1 \overset{1}{X}_2) = 0$; la droite $(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1)$ a alors avec la courbe C_1 un contact d'ordre précisément $\tau - 1$, où $\tau \geqq 3$. Les points $\overset{1}{X}_\nu$ $(2 \leqq \nu \leqq \tau - 1)$ dépendent linéairement des deux points $\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1$, tandis que $\overset{1}{X}_\tau$ en est linéairement indépendant.

En particulier, on a une relation de la forme

$$\overset{1}{X}_2 = u_1 \overset{1}{X}_1 + u_0 \overset{1}{X}_0. \tag{21}$$

Celles des équations (13) dans lesquelles $1 \leqq \lambda \leqq \tau - 2$, ont la forme

$$0 = \alpha_\lambda \overset{1}{X}_1 + \beta_\lambda \overset{1}{X}_0 + (\ldots),$$

où $(\ldots)$ est une combinaison linéaire de $\overset{1}{X}_0$, $\overset{1}{X}_1$ dont les coefficients contiennent α_ν, β_ν pour $0 \leqq \nu \leqq \lambda - 1$. Il en résulte qu'on peut vérifier toutes les équations (13) avec $0 \leqq \lambda \leqq \tau - 2$, les nombres α_0, β_0 restant arbitraires, tandis que α_ν, β_ν $(1 \leqq \nu \leqq \tau - 1$ sont des fonctions bien déterminées de α_0, β_0. En particulier, l'équation (19) $(\lambda = 1)$ donne d'après (21)

$$\alpha_1 = -\beta_0 - \alpha_0 u_1, \quad \beta_1 = -\alpha_0 u_0. \tag{22}$$

Pour $\lambda = \tau - 1$ et pour $\lambda = \tau$, on a des équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 \overset{1}{X}_\tau + (\ldots), \\ 0 &= \alpha_0 \overset{1}{X}_{\tau+1} + (\beta_0 + \tau\alpha_1) \overset{1}{X}_\tau + (\ldots), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

où $(\ldots)$ sont des combinaisons linéaires de $\overset{1}{X}_0$ et $\overset{1}{X}_1$. Le point $\overset{1}{X}_\tau$ étant linéairement indépendant de $\overset{1}{X}_0$, $\overset{1}{X}_1$ équation (23_1) exige $\alpha_0 = 0$. Or si $\alpha_0 = 0$, l'équation (23_2) exige $\beta_0 + \tau\alpha_1 = 0$, ce qui donne, d'après (22) $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, ét nous savons déjà que ceci est impossible.

Cette considération conduit au théorème suivant qui comprend aussi les résultats démonstrés plus haut dans le cas (18):

Soit $\tau - 1$ l'ordre précis du contact de la courbe C_1 avec sa tangente T au point $v = \mathring{v}$ (donc $\tau \geqq 2$). Si le point Σ_0 n'appartient pas à T, les courbes C_1 et C_2 ont pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre précisément $s - 1$ ($s - 1$ étant l'ordre précis du contact de la courbe C avec l'hyperplan Ξ). *Si le point Σ_0 appartient à T, le courbes C_1 et C_2 ont pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s + \tau_0 - 2$, où $\tau_0 = \mathrm{Min.}\ (\tau,\ s + 1)$. Si le point Σ_0 ne coïncide pas avec x_0, l'ordre analytique du contact des courbes C_1 et C_2 pour $v = \mathring{v}$ est précisément égal à $s - 1$. Si le point Σ_0 appartient à T, sans coïncider avec x_0, et si de plus $\tau \leqq s$, l'ordre de contact des courbes C_1 et C_2 pour $v = \mathring{v}$ est précisément égal à $s + \tau - 1$. Si le point Σ_0 coïncide avec x_0, les courbes C_1 et C_2 ont pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s + \tau - 1$, où $\tau_1 = \mathrm{Min.}\ (\tau, s)$; l'ordre analytique de ce contact est égal à s, et cela précisément si $s \geqq 2$. Si le point Σ_0 coïncide avec x_0, et si $\tau \leqq s - 1$, l'ordre de contact des courbes C_1 et C_2 pour $v = \mathring{v}$ est précisément égal à $s + \tau - 1$.*

§ 5. Le cas $m = 1$.

Dans ce cas les centres de projection $\overset{1}{Z}$, $\overset{2}{Z}$ sont des droites et l'espace Ξ est un E_{n-2} (on a nécessairement $n \geqq 4$). *Deux cas sont à distinguer selon que les droites $\overset{1}{Z}$, $\overset{2}{Z}$ ont un point commun ou non. Dans le premier cas Z_0* est le point commun des deux droites $\overset{1}{Z}$, $\overset{2}{Z}$; Σ est l'hyperplan déterminé par l'espace Ξ et par le point Z_0; Σ_0 est le point d'intersection de l'espace Ξ avec le plan déterminé par les droites $\overset{1}{Z}$, $\overset{2}{Z}$. La courbe HC^* est réduite au point Σ_0. La discussion est presque la même comme pour $m = 0$; je me borne donc a énoncer le résultat à qui on arrive *si la courbe C_1 n'a pas une inflexion pour $v = \mathring{v}$: Si le point Σ_0 n'est pas situé sur la tangente T à la courbe C_1 au point $v = \mathring{v}$, l'ordre de contact de C_1 et C_2 est précisément égal à $s - 1$. Si le point Σ_0 appartient à T sans coïncider avec x_0, l'ordre de contact de C_1 et C_2 est égal à s (précisément si $s \geqq 2$); l'ordre analytique de ce contact est précisément $s - 1$. Si le point Σ_0 coïncide avec x_0 et si $s \geqq 2$, l'ordre de contact de C_1 et C_2 est égal à $s + 1$ (précisément si $s \geqq 3$); l'ordre analytique de ce contact et précisément s.*

Passons au cas où les droites $\overset{1}{Z}$ et $\overset{2}{Z}$ sont sans point commun. L'espace Σ coïncide avec l'E_{n-2} Ξ; Σ_0 est la *droite* d'intersection de l'espace Ξ avec l'E_3 déterminé par les droites $\overset{1}{Z}$ et $\overset{2}{Z}$. L'homographie H se réduit à une correspondance projective H_0 entre le faisceau d'hyperplans passant par Ξ et la ponctuelle Σ_0. L'ordre de contact de l'espace Ξ avec la courbe C (pour $v = \overset{\circ}{v}$) étant précisément $s-1$, l'espace Ξ contient les points

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ x_{s-1},$$

mais non le point x_s. Ce dernier point et l'espace Ξ déterminent un hyperplan que je désignerai par Ξ_1. Je me borne à étudier les conditions pour que le contact de C_1 et C_2 soit d'ordre s ou $s+1$.

Condition nécessaire et suffisante pour le contact d'ordre s est d'après (13)

$$Hx_0{}^* = \alpha_0 \overset{1}{X}_1 + \beta_0 \overset{1}{X}_0. \tag{24}$$

Le point à gauche est évidemment le point de la droite Σ_0 correspondant dans la projectivité H_0 à l'hyperplan Σ_1. A droite figure un point arbitraire de la droite $(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1)$. Désignons par $\overset{1}{z}, \overset{2}{z}$ les points d'intersection de l'hyperplan Σ_1 avec les droites $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$[1]: En se rappelant la construction géométrique de l'homographie H (§ 2) on voit que la droite $(\overset{1}{z}\overset{2}{z})$ doit recontrer la droite $(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1)$; autrement dit, le point $\overset{2}{z}$ doit appartenir au plan $(\overset{1}{z} \overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1)$; or, évidemment, la droite $(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1)$ est une projection de la droite $(x_0\, x_1)$ du centre $\overset{1}{z}$ (d'ailleurs $\overset{1}{X}_0 = x_0$ et, si $s \geqq 2$, aussi $\overset{1}{X}_1 = x_1$), d'où résulte que $(\overset{1}{z} \overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1) = (\overset{1}{z}\, x_0\, x_1)$. Donc: *Condition nécessaire et suffisante pour que les courbes projetées C_1 et C_2 aient pour $v = \overset{\circ}{v}$ un contact d'ordre s est que la droite $(\overset{1}{z}\overset{2}{z})$ joignant les intersections de l'hyperplan Σ_1 avec les droites $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ rencontre la tangente $(x_0\, x_1)$ à C en x_0.* La droite $\overset{1}{Z}$ étant donnée, ainsi que la courbe C et l'espace Ξ, le point $\overset{1}{z}$ a une position bien déterminée et la condition est que la droite $\overset{2}{Z}$ contienne un point du plan $(\overset{1}{z}\, x_0\, x_1)$; la position de $\overset{2}{Z}$ dépend donc de $n+1$ constantes arbitraires. *L'ordre analytique* du contact étudié est égal à s si et seulement si $\alpha_0 = 0$; cela signifie évidemment que *les trois points $\overset{1}{z}$, $\overset{2}{z}$, x_0 appartiennent à une droite.* La droite $\overset{1}{Z}$ étant donnée, la droite $\overset{2}{Z}$ dépend ici de n constantes arbitraires.

En supposant $s \geqq 2$ (d'où $\overset{1}{X}_0 = x_0$, $\overset{1}{X}_1 = x_1$) passons à l'étude des conditions pour que le contact de C_1 et C_2 en x_0 soit d'ordre $s+1$.

---

[1] On voit sans peine que les droites $\overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}$ sont situées en dehors de l'hyperplan Σ_1, car ces droites sont sans point commun avec Ξ. Les points $\overset{1}{z}, \overset{2}{z}$ ne sont donc pas indéterminés.

Pour abréger, *supposons que la courbe* C_1 *n'ait pas une inflexion en* x_0, donc

$$(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1 \overset{1}{X}_2) \neq 0. \tag{25}$$

Outre (24), on doit avoir encore

$$Hx_1^* = \alpha_0 \overset{1}{X}_2 + (\beta_0 + \alpha_1) \overset{1}{X}_1 + \beta_1 \overset{1}{X}_0 . \tag{26}$$

Commençons par le cas où *le point* x_{s+1} *n'est pas situé dans l'hyperplan* Σ_1. Alors on voit sans peine que les points x_0^*, x_1^*, et par suite aussi Hx_0^*, Hx_1^* sont linéairement indépendants. Les équations (24) et (26) expriment avant tout que *la droite* Σ_0 $[= (Hx_0^*, Hx_1^*)]$ *doit être située dans le plan* (25) *osculateur à* C_1 *en* x_0. Supposons que l'on ait donné la courbe C, l'espace Ξ et la droite $\overset{1}{Z}$; on voit sans peine que la position de la droite Σ_0 peut être choisie arbitrairement dans le plan $(\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1 \overset{1}{X}_2)$. Soit en premier lieu $\Sigma_0 \neq (x_0 x_1)$ $[= (\overset{1}{X}_0 \overset{1}{X}_1)]$. Le choix de la droite Σ_0 équivaut évidemment au choix des nombres $\alpha_0 \neq 0$, β_0, α_1, tandis que le nombre β_1 reste arbitraire. La projectivité H_0 dépend donc, le choix de Σ_0 étant fait, encore d'une constante arbitraire. En se rappelant la construction géométrique de l'homographie H (§ 2) on voit encore: Si l'on choisit (selon les équation (24) et (26), en y respectant la position donnée de la droite Σ_0) la projectivité H_0 entre le faisceau F d'hyperplans passant par l'E_{n-2} Ξ et la ponctuelle Σ_0, on obtient une projectivité P entre les ponctuelles $\overset{1}{Z}$ et Σ_0 en remplaçant chaque hyperplan du faisceau F par son intersection avec la droite $\overset{1}{Z}$. Les droites joignant les couples de points correspondants dans la projectivité P engendrent une demiquadrique Q_1; la demiquadrique complémentaire Q_2 est engendrée par les droites cherchées $\overset{2}{Z}$. Si l'on fait varier la projectivité H_0 (tout en laissant fixes la courbe C, l'espace Ξ et la droite $\overset{1}{Z}$, ainsi que la droite Σ_0), la quadrique Q contenant Q_1 et Q_2 engendre, comme on voit sans difficulté, un faisceau dont toutes les quadriques contiennent les droites $\overset{1}{Z}$, Σ_0 et $(x_0 \overset{1}{z})$, les plans tangents aux points de cette dernière droite étant fixes pour toutes les quadriques Q. On voit que, pour chaque position de $\overset{1}{Z}$ (la courbe C et l'espace Ξ étant données), *les droites* $\overset{2}{Z}$ *ainsi obtenues dépendent de quatre constantes arbitraires*[1]. L'ordre du contact entre C_1 et C_2 est $s+1$; *l'ordre analytique* de ce contact est précisément $s-1$, car $\alpha_0 \neq 0$.

Jusqu'ici nous avons supposé $\Sigma_0 \neq (x_0 x_1)$. Dans le cas contraire, on a $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, et les deux nombres α_1, β_1 restent arbitraires

---

[1] Pour chaque position de la droite Σ_0 les droites $\overset{2}{Z}$ forment une congruence linéaire spéciale dans l'E_3 contenant à la fois $\overset{1}{Z}$ et Σ_0.

à la condition $\beta_0 + \alpha_1 \neq 0$ près (car les points Hx_0^*, Hx_1^*) sont linéairement indépendants. On voit sans peine que, si l'on a donné la courbe C; l'espace Ξ et la droite $\overset{1}{Z}$, ce qui détermine aussi le point $\overset{1}{z}$ d'intersection de la droite $\overset{1}{Z}$ avec l'hyperplan Σ_1; les droites $\overset{2}{Z}$ (correspondant à $\Sigma_0 = (x_0 x_1)$) sont liées à la condition d'être contenues dans l'E_3 S contenant $\overset{1}{Z}$ et $(x_0 x_1)$ et à rencontrer la droite $(\overset{1}{z} x_0)$. *Ces droites $\overset{2}{Z}$ dépendent donc de trois constantes arbitraires* (elle forment dans S un complexe linéaire spéciale). L'ordre de contact entre C_1 et C_2 est égal à $s+1$; *l'ordre analytique* de ce contact est en général égal à s (car $\alpha_0 = 0$), mais il peut être égal à $s+1$ (car on peut avoir $\alpha_1 = 0$); on trouve sans difficulté que ceci arrive (la droite $\overset{1}{Z}$ étant donnée) si la droite $\overset{2}{Z}$ appartient à une certaine congruence linéaire spéciale de l'E_3 S, dont la directrice est $(\overset{1}{z} x_0)$.

Il nous reste à étudier le cas où *le point x_{s+1} est situé dans l'hyperplan Σ_1*. Dans ce cas le point x_1^* dépend linéairement de x_0^*; en profitant de la remarque faite à la fin du § 3, on voit que l'on peut supposer $x_1^* = 0$ d'où $Hx_1^* = 0$. L'équation (26) exige alors, selon (25), $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -\beta_0 (\neq 0)$, $\beta_1 = 0$. Il en résulte sans peine que le contact des courbes projetées C_1, C_2 est d'ordre $s+1$ si et seulement si la droite $\overset{2}{Z}$ rencontre la droite $(\overset{1}{z} x_0)$, $\overset{1}{z}$ étant toujours le point d'intersection de la droite $\overset{1}{Z}$ avec l'hyperplan Σ_1. Si l'on a donné la courbe C et l'espace Ξ, ainsi que la droite $\overset{1}{Z}$, la droite $\overset{2}{Z}$ dépend de n constantes arbitraires. L'ordre analytique du contact étudié est maintenant toujours précisément égal à s, car $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$.

§ 6. Autres cas particuliers.

Supposons que pour $v = \overset{0}{v}$ aucun espace osculateur à la courbe C ne soit stationnaire, ce qui est exprimé par l'inégalité

$$(x_0 x_1 \ldots x_n) \neq 0.$$

En outre, supposons que l'espace Ξ soit osculateur à la courbe C au point x_0, ce qui donne

$$s = n - m, \quad \Xi = (x_0 x_1 \ldots x_{s-1}).$$

Enfin supposons que les espaces $\overset{1}{Z}$ et $\overset{2}{Z}$ soient sans point commun; ceci donne $q = -1$, de manière que $\Sigma = \Xi$ et la dimension de Σ_0 est égale à $m - q - 1 = m$. L'espace Σ_0 à m dimensions étant contenu dans l'espace Ξ à $s-1$ dimensions, on peut poser

$$s - 1 = m + \Theta, \quad \Theta \geqq 0. \tag{27}$$

L'espace auxiliaire A ayant m dimensions, on déduit sans peine de nos hypothèses que les points

$$x_0^*,\ x_1^*,\ \ldots\ x_m \tag{28}$$

sont linéairement indépendants, tandis que

$$x^*_{m+1+k} = \sum_{\nu=0}^{m} c_{\nu k} x_\nu^*.\ (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{29}$$

Remarquons tout de suite que, l'homographie H étant une correspondance biunivoque entre A et Σ_0, on peut remplacer dans cet énoncé les points $x^*_\nu\ (\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ par $H x^*_\nu$. Pareillement, il s'ensuit des hypothèses faites que les points

$$\overset{1}{X}_0,\ \overset{1}{X}_1, \ldots,\ \overset{1}{X}_{s-1} \tag{30}$$

sont linéairement indépendants[1], tandis que

$$\overset{1}{X}_{s+k} = \sum_{\nu=0}^{s-1} d_{\nu k} \overset{1}{X}_\nu.\ (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{31}$$

Nous savons que le contact des courbes projetées C_1, C_2 en x_0 est d'ordre $s-1$, le même nombre étant aussi l'ordre analytique de ce contact. Nous allons étudier les cas où l'ordre du contact étudié est $s + \sigma - 1$ avec $1 \leqq \sigma \leqq s$. *Commençons par le cas* $\Theta = 0$, $s - 1 = m$. Dans les équations (13), tous les points $H x^*_\lambda$ qui y figurent à gauche sont linéairement indépendants, car $0 \leqq \lambda \leqq \sigma - 1 \leqq s - 1 = m$. Donc, pour qu'il existe une homographie H satisfaisant aux relations (13), il faut et il suffit de choisir les nombres α_ν, β_ν de manière que les seconds membres soient linéairement indépendants. En tenant compte de l'indépendance linéaire des points (30) on voit sans peine que ceci arrive: pour $\alpha_0 \neq 0$ si et seulement si $\sigma < s$; pour $\alpha_0 = 0$, si et seulement si $\lambda \alpha_1 + \beta_0 \neq 0$ pour $0 \leqq \lambda \leqq \sigma - 1$ $(\leqq s - 1)$. Donc *il est toujours possible de déterminer l'homographie H de manière que les courbes projetées C_1, C_2 aient pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s + \sigma - 1$, σ étant un nombre donné tel que* $1 \leqq \sigma \leqq s = m + 1$. On voit sans difficulté que l'homographie H dépend de $(m - \sigma + 1)\, m + 2\sigma - 1$ constantes arbitraires pour $1 \leqq \sigma \leqq m$ et de $2m$ constantes arbitraires pour $\sigma = m + 1$.[2] En particulier on peut toujours prendre $\alpha_\nu = 0$ pour $0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1$ et $\beta_0 \neq 0$; cela signifie que l'on peut choisir l'homographie H de manière que les courbes projetées C_1, C_2 aient pour $v = \mathring{v}$ un contact *analytique* d'ordre $s + \sigma - 1$ (si $1 \leqq \sigma \leqq m + 1$). L'homographie H dépend ici de $(m - \sigma + 1)\, m + \sigma - 1$ constantes arbitraires.

Passons au cas $\Theta = 1$, $s - 1 = m + 1$. Pour $1 \leqq \sigma \leqq m + 1$, les circonstances se présentent de la même manière comme pour $\Theta = 0$. On

---

[1] De plus, on voit aisément que ces points sont égaux à $x_0, x_1, \ldots x_{s-1}$.

[2] Rappelons (§ 2) que, la courbe C et les espaces Ξ et $\overset{1}{Z}$ étant donnés, à chaque homographie H correspondent ∞^1 positions de l'espace $\overset{2}{Z}$.

doit prendre: ou $\alpha_0 \neq 0$ et les autres α_ν, β_ν arbitrairement, ou bien $\alpha_0 = 0$, $\lambda \alpha_1 + \beta_0 \neq 0$ pour $0 \leqq \lambda \leqq \sigma - 1$ et les autres α_ν, β_ν arbitrairement. Donc on peut toujours déterminer H de manière que les courbes projetées C_1, C_2 aient pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s + \sigma - 1$ $(1 \leqq \sigma \leqq m + 1)$; l'homographie H dépend de $(m - \sigma + 1)\, m + 2\sigma - 1$ constantes arbitraires; si l'on demande que le contact de C_1, C_2 soit d'ordre analytique $s + \sigma - 1$, le nombre des constantes arbitraires diminue de σ unités. Soit maintenant $\sigma = m + 2\ (= s)$. Ici, on a une relation linéaire et une seule entre les premiers membres de (13), à savoir, selon (29),

$$H\, x^*_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{m} c_{\nu 0}\, x^*_\nu.$$

Donc on doit choisir les nombres α_ν, β_ν $(0 \leqq \nu \leqq m + 1)$ de manière que les points

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (\alpha_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_{\nu+1} + \beta_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_\nu) \quad (0 \leqq \lambda \leqq m) \tag{32}$$

soient linéairement indépendants, et que

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m+1}{\nu} (\alpha_{m+1-\nu} \overset{1}{X}_{\nu+1} + \beta_{m+1-\nu} \overset{1}{X}_\nu) = \\ &= \sum_{\lambda=0}^{m} c_{\lambda 0} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (\alpha_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_{\nu+1} + \beta_{\lambda-\nu} \overset{1}{X}_\nu). \end{aligned} \tag{33}$$

Ici figurent les points (30) (car $s - 1 = m + 1$) linéairement indépendants ainsi que le point $\overset{1}{X}_{m+2}$. En remplaçant ce dernier point par son expression tirée de (31) on obtient sans difficulté que l'équation (33) équivant aux relations suivantes entre les nombres α_ν, β_λ:

$$\alpha_0\, d_{m+1,0} + (m + 1)\, \alpha_1 + \beta_0 = c_{m,0}\, \alpha_0; \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_0\, d_{m-k+1,0} + \binom{m+1}{k+1} \alpha_{k+1} + \binom{m+1}{k} \beta_k = \\ &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{m-k+\nu}{\nu} c_{m-k+\nu,0}\, \alpha_\nu + \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{m-k+\nu+1}{\nu} c_{m-k+\nu+1,0}\, \beta_\nu; \\ &(1 \leqq k \leqq m) \end{aligned} \tag{35}$$

$$\alpha_0\, d_{00} + \beta_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{m} c_{\nu 0}\, \beta_\nu. \tag{36}$$

On voit que les nombres $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots \beta_m$ peuvent être choisis arbitrairement, ce qui détermine sans ambiguité les nombres $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{m+1}$, β_{m+1}. Quant à la condition que les points (32) soient linéairement indépendants, les points (30) étant tels, on déduit que cela exige seulement que $\alpha_0 \neq 0$ ou bien $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$. Il résulte donc que l'on peut déterminer l'homographie H de manière que les courbes C_1, C_2 aient pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $2s - 1 = 2m + 3$; l'homographie H dépend de $m + 2$ constantes arbitraires. L'ordre analytique de ce contact est en général égal à $s - 1$; il peut être égal à s (ce qui diminue d'une unité le nombres des constantes dont dépend H, car $\alpha_0 = 0$), mais il ne peut pas surpasser s, car cela exigerait $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, d'où $\beta_0 = 0$ d'après (34), et nous savons que pour $\alpha_0 = 0$ on doit avoir $\beta_0 \neq 0$.

Soit enfin $\Theta \geqq 2$, $s - 1 \geqq m + 2$. Pour $1 \leqq \sigma \leqq m + 1$ on doit, comme précédemment, prendre $\alpha_0 \neq 0$ ou bien $\alpha_0 = 0$, $\lambda \alpha_1 + \beta_0 \neq 0$ pour $0 \leqq \lambda \leqq \sigma - 1$. On peut choisir H de manière que les courbes C_1, C_2 aient pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s + \sigma - 1$; l'homographie H dépend de $(m - \sigma + 1) m + 2\sigma - 1$ constantes arbitraires; si l'on veut que l'ordre analytique du contact étudié soit $s + \sigma - 1$, on doit diminuer de σ unité le nombre des constantes arbitraires. Passons au cas $\sigma = m + 2$. On doit choisir les α_ν, β_ν de manière que les points (32) soient linéairement indépendants et que l'on ait la relation linéaire (33) entre les points

$$\overset{1}{X}_0, \ \overset{1}{X}_1, \ \ldots \ \overset{1}{X}_{m+2} . \tag{37}$$

Or ces derniers points sont linéairement indépendants, car $m + 2 \leqq s - 1$. Il en résulte que l'on doit avoir $\alpha_0 = 0$ ainsi que les relations (34), (35), (36) où l'on doit poser $\alpha_0 = 0$. Il en résulte que les nombres β_0, $\beta_1 \ldots \beta_m$ peuvent être choisies arbitrairement, pourvu que $\beta_0 \neq 0$ (afin que les points (32) soient linéairement indépendants). On peut donc choisir H de manière que C_1 et C_2 aient pour $v = \mathring{v}$ un contact d'ordre $s + m + 1$; H dépend de $m + 1$ constantes arbitraires. L'ordre analytique du contact étudié est alors précisément s, car $\alpha_0 = 0$, mais $\alpha_1 \neq 0$ (autrement (34) donnerait $\beta_0 = 0$). Enfin, soit $\sigma \geqq m + 3$. Les conditions (13) ne peuvent pas être vérifiées, car les points Hx^*_{m+1}, Hx^*_{m+2} dépendent linéairement de Hx^*_λ $(0 \leqq \lambda \leqq m)$, de manière que les points y_{m+1}, y_{m+2}, où

$$y_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (\alpha_\nu \overset{1}{X}_{\nu+1} + \beta_\nu \overset{1}{X}_\nu) ,$$

devraient dépendre linéairement des points y_λ $(0 \leqq \lambda \leqq m)$; or les points (37) étant linéairement indépendants, ceci exigerait $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ce qui est impossible car la première équation (13) donnerait $Hx_0^* = 0$. Donc (pour $\Theta \geqq 2$) l'ordre du contact des courbes projetées C_1, C_2 en x_0 ne peut pas surpasser $s + m + 1$.
