Vojtěch Jarník
Něco o problémech a metodách moderní matematiky

Publikace Dvacáté století : co dalo lidstvu : výsledky práce lidstva 20. věku. Díl 3, Z říše hmot a sil, Nakl. Vladimíra Orla, Praha 1931, 12--46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500817

DR. VOJTĚCH JARNÍK

PROFESOR KARLOVY UNIVERSITY

NĚCO O PROBLÉMECH A METODÁCH MODERNÍ MATEMATIKY

1. *Úvod.*

V článku prof. Bydžovského mohl čtenář získati představu o celkovém charakteru moderní matematiky; v tomto článku chci čtenáři na několika příkladech podrobněji ukázati, jaké problémy si matematika klade, jakých metod používá k jejich zkoumání, k jakým výsledkům dospívá. Vedle toho měl bych vlastně pojednati ještě o dvou věcech: jednak o aplikacích matematiky, jednak o základech, na nichž veškerá matematika spočívá. Těmito otázkami nebudu se však zabývati z důvodů, jež se pokusím naznačiti.

Chci-li nějakou nauku aplikovati, musím ji napřed dokonale ovládati; musil bych tudíž napsati dříve široce založenou učebnici matematiky, než bych mohl něco hlubšího říci o jejích aplikacích. Ostatně v článcích tohoto díla, jež se zabývají teoretickou fysikou, bude jistě na příslušných místech o aplikacích matematiky učiněna zmínka.

Také základy matematiky dají se sotva populárně vyložiti. Jako každá věda, tak i matematika musí vycházeti z několika základních předpokladů, na nichž staví a jež přijímá bez důkazu. Půvab a vnitřní dokonalost matematiky spočívá z velké části v tom, že tyto předpoklady jsou velmi jednoduché a vnucují se nám téměř neodolatelně; přes to nejsou nikterak samozřejmé a jejich kritické zkoumání tvoří důležitý obor vědní, v němž matematika se stýká s filosofií. Tyto předpoklady leží v tajemných hlubinách samotných základů lidského myšlení a není proto snadno k nim proniknouti; jen matematik hluboce odborně vzdělaný a k tomu silně filosoficky založený může se s úspěchem věnovati studiu těchto otázek.

Zůstanu tedy v tomto článku u problémů, metod a výsledků matematiky. Při tom nemohu se ovšem zabývati oněmi obory, jež by od čtenáře vyžadovaly hlubšího odborného vzdělání; a tímto omezením vylučuji již aspoň 99 procent veškeré matematiky. Proto podá tento článek čtenáři pouze několik vzorků, několik ukázek matematických problémů, metod a pouček. Při tom omezím se na dva typy problémů, jež se týkají pojmů, laikovi velmi snadno srozumitelných: v odst. 3, 4, 5, 6 mluvím o vlastnostech celých kladných čísel (t. j. čísel 1, 2, 3, 4,...), v odst. 8. vykládám základy teorie množství.[1]) Oba typy problémů předpokládají tak nepatrnou znalost matematiky (vlastně téměř nic), že budu v odstavci 3. a 8. moci prováděti i důkazy; čtenář bude tedy moci prodělati dvě ukázky matematiky zcela podrobně, tak jako matematik-odborník. Pouze formu výkladu volím ovšem daleko obšírnější, než bych učinil v knize, určené odborníkům.[2]) Čtenář se nemusí obávati, že budu od něho požadovati odborných vědomostí: zapomněl-li, co to jsou prvočísla, periodické desetinné zlomky, pravoúhlé souřadnice, doví se to podrobně v odst. 3, 7, 8. Prosím laskavého čtenáře, aby se v odst. 2, 3, 7, 8 držel co nejvíce tekstu a nepouštěl příliš uzdy své fantasii; mohl by zabloudit. Problémy a metody, o nichž mluvím v odst. 3. a 8, jsou tak esteticky dokonalé, že ani neobratný výklad jich nemůže zcela pokaziti; snad se v nich čtenáři alespoň něco zalíbí.

Okolnost, že jsem vybral z celé matematiky jen dva malé úseky (lépe řečeno: malé ukázky ze dvou větších úseků), má ovšem jednu nevýhodu: ony úseky budou se čtenáři jeviti jako dva osamělé ostrůvky. Nebudu tedy bohužel moci ukázati čtenáři bohaté a často překvapující souvislosti mezi nejrůznějšími obory matematiky, jež tvoří podstatný rys jejího charakteru, jež přispívají neobyčejnou měrou k její estetické dokonalosti a zároveň znmohonásobují význam jednotlivých metod a pouček.

Ve veřejnosti setkáváme se leckdy s předsudky, týkajícími se matematiky; některé z nich vznikají z přeceňování, jiné z podceňování matematiky, jiné z neznalosti jejích metod; na příslušných místech tohoto článku snažil jsem se jim čeliti drobnými poznámkami.[3])

Prosím čtenáře, aby se se mnou laskavě pustil do slíbených ukázek matematiky; snažil jsem se, aby se tento článek co nejméně podobal hodině matematiky ve škole.

2. *Matematik a počtář.* Většina lidí představuje si práci matematikovu takto: matematik počítá. Leckterý matematik ovšem leckdy počítá; ale matematik daleko více *uvažuje.* Mezi vynikajícím matematikem a t. zv. zá-

[1]) Co je to »množství«, pozná čtenář podle »definice« a příkladů v odst. 8.

[2]) V odst. 4, 5, 6 probírám některé velmi elementárně vypadající problémy, jejichž řešení je však nesmírně obtížné; proto nemohu v těchto odstavcích mluviti o metodách, nýbrž mohu pouze referovati o výsledcích. Čtenář, kterého by odst. 4, 5, 6 nezajímaly, může je pročísti jen zběžně.

[3]) O jedné věci chtěl bych se ještě zmíniti. Matematika nejedná o předmětech hmotného světa, nýbrž pouze o jakýchsi (byť velmi vhodně a přirozeně sestrojených) abstrakcích. Užíváme-li tedy matematiky na jevy hmotného světa (jak to často činíme v astronomii, ve fysice atd.), neprovádíme tím již čistou, ryzí matematiku, nýbrž *aplikaci* matematiky. A úspěch či neúspěch této aplikace nedokazuje správnost či nesprávnost příslušné matematické úvahy, nýbrž pouze ukazuje, zda byla matematika aplikována vhodně. Z nedbání této okolnosti často vzniká — podle osobního založení — buď nezasloužené přeceňování nebo nezasloužené podceňování matematiky. Nesmíme si mysliti, že veškeré přírodní a duševní dění dá se matematicky formulovati a zvládnouti; na druhé straně nesmíme odsuzovati matematiku, jestliže při nevhodné aplikaci nám dá výsledek neshodující se se skutečností. V některých vědách (na př. v některých částech astronomie a fysiky) vede aplikace matematiky k výsledkům prakticky naprosto spolehlivým; jinde (na př. v technických vědách, kde často, abychom problém mohli matematicky zvládnouti, musíme činiti zjednodušující předpoklady, jež ve skutečnosti jsou splněny jen přibližně) vede matematika k cenným, v celku správným výsledkům, jež však nevystihují obyčejně všech podrobností a možných odchylek; konečně v jiných vědách (na př. ve filosofii, v psychologii, v estetice a pod.) se matematika téměř nedá aplikovati: užijeme-li jí přes to, dostaneme výsledky, jež většinou mohou míti nejvýše cenu orientační, nikoliv však průkaznou.

zračným počtářem je tedy zásadní rozdíl; mnoho zázračných počtářů bylo zcela bez matematického nadání a mnozí vynikající matematikové byli jen průměrnými nebo i podprůměrnými počtáři (ovšem velmi často vynikající matematikové bývají i výbornými počtáři). Abych vám tento rozdíl zřetelněji vytkl, povím vám jednu velmi otřepanou, ale pro náš účel, jak se mi zdá, vhodnou matematickou anekdotu.

Když byl geniální matematik Gauss[1]) žákem obecné školy, chtěl míti pan učitel jednou na chvíli pokoj a dal proto žákům tento úkol: sečtěte všechna čísla od 1 až do 100; t. j. vypočtěte součet $1+2+3+\ldots+99+100$. Ostatní žáci se s tím dlouho hmoždili, ale Gauss byl brzo hotov. Pomohl si totiž touto úvahou: sečtu-li první a poslední člen, $1+100$, dostanu 101; sečtu-li druhý a předposlední člen, $2+99$, dostanu opět 101; sečtu-li třetí člen od začátku a třetí člen od konce, $3+98$, dostanu opět 101; atd. Tím jsem těch sto sčítanců rozdělil na 50 párů; každý ten pár dává součet 101, celý součet tedy jest $50\times101=5050$. Touto úvahou projevil Gauss své *matematické* (nikoliv *počtářské)* nadání.

Kdyby byl býval ve třídě tehdy nějaký zvláště zručný počtář, možná, že by byl svůj výpočet provedl dříve, než Gauss si promyslil svou úvahu; přes to však postup Gaussův byl by zůstal nesrovnatelně cennější. Neboť, kdyby byl dán na příklad úkol, sečísti všechna celá čísla od 1 až do 1,000.000, byl by jistě i nejzručnější počtář potřeboval velmi dlouhou dobu; Gauss by však byl klidně uvažoval zcela tak, jako před tím: ten milion sčítanců rozdělím na 500.000 párů, z nichž každý dá součet 1,000.001:

$$1+1{,}000.000;\ 2+999.999;\ 3+999.998;\ 4+999.997 \text{ atd.}$$

Celkový součet tedy jest:

$$500.000\times1{,}000.001=500.000{,}500.000.$$

Krátce řečeno, Gauss odvodil svou úvahou vlastně obecný vzorec, podle kterého lze počítat součet všech celých čísel od 1 až do libovolného čísla *n*:[2])

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

(na příklad $1+2+3+\ldots+100=\frac{100\times101}{2}=5050$).

Tento (ovšem zcela triviální) příklad sice ukazuje, že pro mnohé účely je matematická úvaha výhodnější než pouhé mechanické počítání. Ale přes to nevystihuje tento příklad plně významu matematických úvah; takový součet, na příklad $1+2+3+\ldots+100$, dá se sice nejvýhodněji počítati pomocí vzorce (1), mohli bychom jej však také počítat bez jakékoliv úvahy prostě mechanickým sčítáním. V tomto případě nám tedy matematická úvaha pouze

[1]) K. B. Gauss (1777—1855), německý matematik; nechybím asi, nazvu-li ho největším matematikem novověku; dovršitel staršího období a základní sloup moderní matematiky; krajně všestranný a jedinečně hluboký; velkolepý v koncepci a dokonalý v provedení.

[2]) Je-li číslo *n* sudé, dokáže se tento vzorec obecně přesně tak, jak bylo vylíčeno; je-li číslo *n* liché, je zapotřebí malé změny v důkazu, na kterou čtenář — baví-li ho to — bez velké námahy sám přijde. Ovšem že matematikové znali tento vzorec již před Gaussem.

usnadnila výpočet, který bychom i bez té úvahy byli mohli provésti — byť mnohem namáhavěji. V matematice se však vyskytují i takové problémy, kterých vůbec není možno řešit pouhým počítáním, které jest *nutno* řešiti matematickou úvahou; a takových problémů je dokonce v matematice převážná většina a jsou to právě otázky nejdůležitější. Abychom poznali, jak takové problémy vypadají a jak se řeší, položíme si a zodpovíme v následujícím odstavci tuto otázku: Kolik je prvočísel?[1]) Je jich konečný počet, nebo jich je nekonečně mnoho? Prozradím již teď, že odpověď zní: jest nekonečně mnoho prvočísel.

Vidíme, že tento problém patří mezi ty problémy, které vůbec není možno řešit pouhým počítáním bez matematických úvah; trpělivý počtář snadno najde deset prvočísel, sto prvočísel a — má-li dosti času — třeba tisíc prvočísel: ale nikdy nemůže pouhým počítáním nalézti nekonečně mnoho prvočísel.

3. *Prvočísla.* Základem matematiky — pokud jedná o číslech[2]) (v obvyklém smyslu) — jsou celá kladná čísla

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots \text{ atd.}$$

Této řadě říkává se přirozená řada číselná. Tato řada jest nekonečná; to znamená: žádný člen této řady není posledním členem; ať si vezmu jakékoliv číslo celé kladné, existují vždy čísla (celá kladná), jež jsou větší než toto číslo (t. j., jež v přirozené řadě číselné leží za tím číslem). Dvě taková celá kladná čísla můžeme děliti, a tu může nastati dvojí případ: buď to dělení »vyjde« beze zbytku, t. j. podíl je celé číslo (příklady: $6:3=2$, $10:2=5$, $2:1=2$, $3:3=1$), nebo to dělení nevyjde beze zbytku, podíl je číslo lomené (příklady $12:5=2+{}^2/_5$, $17:8=2+{}^1/_8$, $1:3=1/3$). Jestliže dělení dvou celých kladných čísel $a:b$ vyjde beze zbytku (t. j. jestliže podíl je číslo celé), říkáme, že číslo a je dělitelno číslem b (na příklad šest je dělitelno třemi, deset je dělitelno dvěma, dvě je dělitelno jedničkou, tři je dělitelno třemi). Každé číslo celé kladné je samozřejmě dělitelno jedničkou a sebou samým. Číslo (celé kladné a větší než 1), které už není dělitelno žádným jiným číslem (než jedničkou a sebou samým), nazývá se *prvočíslo*.[3]) Nejmenší prvočísla, jak čtenář snadno zjistí, jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 atd.; číslo 18 na př. není prvočíslem, neboť je dělitelno na př. dvěma (a také třemi, šesti, devíti).

Je vám asi známo ze střední školy (a není-li vám to známo, prosím, abyste mi to věřili), že každé číslo (celé kladné a větší než 1), které samo není prvočíslem, dá se rozložiti na součin prvočísel; na př.:

$$6=2\times3;\ 210=2\times3\times5\times7,\ 36=2\times2\times3\times3,\ 8=2\times2\times2$$

[1]) Čtenář, který snad pozapomněl, co to jsou prvočísla, nemusí se lekat: v příštím odstavci budu o nich obšírně mluvit.

[2]) Copak vůbec matematika jedná také ještě o něčem jiném než o číslech? Zajisté; my se sice budeme v tomto článku zabývati hlavně čísly, v moderní matematice je však mnoho oborů, jež nespočívají přímo na pojmu čísla.

[3]) Jednička se tedy nepočítá mezi prvočísla; to je účelné z mnoha důvodů.

(při čemž ovšem některá prvočísla se v tom součinu mohou vyskytovati i vícekráte než jednou, jako na př. u čísla 8 nebo 36). Z toho je vidět, že *každé číslo* (celé kladné, větší než 1) *je dělitelno alespoň jedním prvočíslem;* neboť buď to číslo je samo prvočíslem a tedy dělitelno samo sebou (7 je dělitelno sedmi), nebo to číslo není prvočíslem a potom je dělitelno každým prvočíslem, jež se vyskytuje v tom součinu (na př. $24=2\times2\times2\times3$, tedy 24 je dělitelno dvěma — a také ovšem třemi).

Představte si nyní, že vezmete několik prvočísel, sestrojíte jejich součin a přičtete k němu jedničku; na př. $2\times5\times7\times11+1$ (čili 771); je jasno, že toto číslo není dělitelno žádným prvočíslem, které v tom součinu vystupuje, t. j. pro náš příklad čís. 771 není dělitelno ani dvěma ani pěti ani sedmi ani jedenácti; neboť dělím-li to číslo třeba pěti, potom dělení toho součinu $2\times5\times7\times11$ vyjde beze zbytku a na konec přistoupí zbytek 1. Této — skoro samozřejmé — poznámky za chvíli použijeme.

Budeme se nyní zabývati prvočíselnou řadou

(2) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73...

a rozřešíme otázku, kterou jsem nadhodil v předešlém odstavci: je tato prvočíselná řada konečná či nekonečná? Jinak řečeno: skončí se tato řada u některého prvočísla, či je možno za každým prvočíslem nalézti ještě další prvočíslo? Dokážeme, že řada prvočíselná jest nekonečná, t. j. dokážeme: za každým prvočíslem leží ještě další prvočíslo. To znamená (ježto ta řada (2) je seřazena podle velikosti): vezmu-li libovolné prvočíslo p, potom existuje prvočíslo, jež je větší než p.

Tento poslední výrok dokážeme. Vezměme nějaké prvočíslo (jakékoliv) a označme je písmenem p. Sestrojme součin všech prvočísel až do čísla p:

$$2\times3\times5\times7\times\ldots\times p$$

(t. j. sestrojíme součin všech prvočísel, která nejsou větší než p); přičtěme k tomu součinu jedničku; dostaneme číslo

$$2\times3\times5\times7\times\ldots\times p+1.$$

Toto číslo je celé kladné a větší než 1; tedy jest dělitelno aspoň jedním prvočíslem. Za druhé to číslo není dělitelno ani dvěma, ani třemi, ani pěti atd.; krátce, toto číslo není dělitelno žádným prvočíslem od 2 až do p; ježto však nějakým prvočíslem musí to číslo $2\times3\times5\times7\times\ldots\times p+1$ být dělitelno, musí být to číslo dělitelno nějakým prvočíslem, které je větší než p. Nějaké (aspoň jedno) prvočíslo větší než p musí tedy existovat. Tím je však žádaný důkaz proveden, neboť jsme dokázali: ať je p jakékoliv prvočíslo, vždy existuje prvočíslo větší než p.

Důkaz, který jsme právě podali, může nám sloužit jako typ matematických důkazů. Vidíte, že v tomto důkazu hlavní roli hraje nikoliv počítání (vždyť skoro žádné počítání v něm není), nýbrž jednoduchá, ale originální a esteticky velmi uspokojující úvaha.

Problém, který jsme zde rozřešili, je velmi starý; také řešení, které jsme podali, je velmi staré: bylo známo už Euklidovi.[1])

[1]) Okolo r. 300 před Kristem.

4. *Jiné problémy o prvočíslech.* Když už jsme se zastavili u prvočísel, zmíním se v tomto odstavci stručně o několika jiných otázkách, týkajících se prvočísel. Zrovna tak jako problém, vyšetřovaný v předešlém odstavci, jsou i tyto problémy hodně staré (ale přece jen o hodně mladší); kdežto však řešení problému, vyšetřovaného v předešlém odstavci, jest také velmi staré a velmi jednoduché, jest řešení problémů tohoto odstavce krajně obtížné: všechny tyto problémy jsou dosud řešeny pouze z části; a i toto částečné řešení jest dílem teprve několika posledních desítiletí; při tom vyžadují důkazy tolika odborných znalostí a jsou tak složité, že v tomto odstavci se budu musit omeziti pouze na formulaci těch problémů a na referování o výsledcích, jichž bylo dosaženo: o metodách, jichž se při tom užívá, nebudu se moci ani zmíniti.

A) *Prvočíselná dvojčata.* V prvočíselné řadě (2) vyskytují se dvojice prvočísel, jichž rozdíl se rovná dvěma: 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19, 29 a 31, 41 a 43, 59 a 61, 71 a 73 atd.; takovým dvojicím se říká prvočíselná dvojčata. Otázku, zda existuje nekonečně mnoho prvočísel, zodpověděli jsme velmi jednoduše v předešlém odstavci. Zato otázka, zda existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat, není dosud rozřešena; vrátím se ještě k této otázce několika slovy na konci tohoto odstavce.

B) *Goldbachův problém.* Pokusme se vyjadřovati sudá čísla větší než 2 pomocí součtu dvou prvočísel: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7=5+5$,

$$12=5+7,\quad 14=3+11=7+7,\quad 16=5+11=3+13,$$
$$18=5+13=7+11,\quad 20=3+17=7+13.$$

Vidíme, že až do dvacítky to jde[1]); a pokud sahají výpočty, nepřišlo se dosud na žádnou výjimku (na př. $130=59+71$). Jest tedy na snadě, položiti si otázku: dá se skutečně každé sudé číslo (větší než 2) vyjádřiti jako součet dvou prvočísel? Tuto otázku nadhodil již Goldbach (1742), nebyla však dosud rozřešena. Ještě před nedávnem nevěděli jsme v tomto směru vůbec nic bezpečného; teprve v posledních letech vnesly výzkumy Hardyho a Littlewooda[2]) (1921) a pojednání ruského matematika Šnirlmana (1930) více jasna do této otázky. Výsledky Hardyho a Littlewoodovy znějí příliš učeně; ale výsledek Šnirlmanův mohu uvésti. Šnirlman totiž dokázal: každé sudé číslo (větší než dvě) dá se vyjádřiti jako součet nejvýše jednoho milionu prvočísel. Milion je sice o hodně víc než dvě, tedy Šnirlman nerozřešil ten Goldbachův problém úplně; ale přece rozřešil podstatnou jeho část. Sudých čísel (větších než 2) je totiž nekonečně mnoho: 4, 6, 8, 10, 12 . . .; přes to však, chceme-li libovolné, sebe větší sudé číslo (třeba

1000000000000000 000000000000000 000000000000000 000000000000000 00000000000)

1) Každé číslo sudé od 4 až do 20 dá se tedy vyjádřiti jako součet dvou prvočísel; ovšem obě ta prvočísla mohou si být rovna (na př. $6 = 3+3$); v některých případech je možno takových vyjádření více než jedno, na př. $10 = 3+7 = 5+5$.

2) Hardy (profesor v Oxfordu) a Littlewood (profesor v Cambridgi) patří mezi nejznamenitější matematiky současné doby; mnoho prací napsali společně.

vyjádřiti jako součet prvočísel, nemusíme nikdy (v žádném z těch nekonečně mnoha případů) vzíti více než milion sčítanců.

Zde musím čtenáře poprosit za odpuštění; pro větší konkrétnost jsem řekl jen 99% pravdy. Stoprocentní pravda jest tato:[1] Šnirlman nedokázal, že vystačíme právě s milionem sčítanců, nýbrž dokázal, že vystačíme s jistým **pevným** počtem sčítanců (označme ten počet písmenem c). Hodnota toho čísla c by se s jakousi námahou dala podle metody Šnirlmanovy vypočítat; možná, že by vyšel milion, možná, že by vyšla třeba miliarda nebo něco jiného — ale na tom mnoho nezáleží; hlavní je, že takové číslo c vůbec existuje. Jistě by Šnirlmanovou metodou vyšla pro c značně velká hodnota, takže definitivního řešení (kterému by odpovídala hodnota $c=2$) sotva by se Šnirlmanovou metodou dalo dosáhnouti.

C) *Hustota prvočíselné řady.* Vezměme přirozenou řadu číselnou

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots ;$$

každé druhé číslo této řady je sudé; čili, abych tak řekl, řada sudých čísel

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

má »hustotu« rovnou $1/2$. Zrovna tak bychom mohli říci, že řada čísel dělitelných pěti

$$5, 10, 15, 20, 25, \ldots$$

má hustotu rovnou $1/5$; nebo že řada čísel, jež děleny jsouce desíti dávají zbytek rovný jedné

$$1, 11, 21, 31, 41, \ldots$$

má hustotu rovnou $1/10$ atd.

Podíváme-li se na řadu prvočísel

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots,$$

nevidíme na první pohled žádné zákonitosti: mezi prvočísly jsou mezery tu větší, tu menší. Přes to však, vezmeme-li hodně velký kus té prvočíselné řady, vyrovnávají se tyto nepravidelnosti do jisté míry, takže můžeme mluvit o jakési »střední hustotě prvočísel«; a vznikají tedy tyto dva problémy: 1. zjistit, že skutečně se tyto nepravidelnosti vyrovnávají do té míry, že lze mluviti o jakési střední hustotě prvočísel a stanoviti tuto střední hustotu; 2. zjistiti, jak veliké jsou odchylky skutečné (kolísavé) hustoty od oné střední hustoty.[2]

První z těchto problémů — ač byl již dávno položen — byl rozřešen teprve r. 1896 Hadamardem.[3] Ukázalo se při tom, že hustota prvočíselné řady je nesrovnatelně menší než na př. hustota řady sudých čísel nebo hustota řady čísel dělitelných pěti a pod. Druhý problém patří mezi největší a nejúporněji obléhané problémy dnešní matematiky — není však

[1]) Čtenář, který se nezajímá o podrobnosti, může tento odstavec vynechati.

[2]) Čtenář nechť laskavě promine, že mluvím na tomto místě příliš neurčitě; k přesné formulaci obou problémů potřeboval bych však pojmů příliš odborných; něco bližšího o tom najde čtenář, přeje-li si, o několik řádek později.

[3]) Současně s ním rozřešil tento problém též de la Vallée-Poussin. Hadamardovi však náleží zásluha, že v letech 1892—3 první dokázal řadu vět, jichž ke konečnému řešení bylo třeba.

dosud zcela rozřešen, ač jsou známy cenné částečné výsledky; definitivní řešení naráží však dosud na nepřekonatelné potíže a každý krůček ku předu je pozdravován nadšeným jásotem obléhajících matematiků.

[Jmenuji zde několik generálů: B. Riemann (1826—1866), geniální německý matematik, který vytýčil obecné základy obléhacího plánu; ze současných matematiků znamenitý francouzský matematik Hadamard, Angličané Hardy a Littlewood, Němci Landau a Mangoldt (zemřelý před několika léty), Belgičan de la Vallée-Poussin, Dán H. Bohr a jiní.]

Pro čtenáře, který by se chtěl dověděti něco bližšího, podotýkám ještě toto: v onom prvním problému (stanovení střední hustoty prvočísel) jde vlastně o tuto otázku: vezmu-li velký kus přirozené řady číselné, třeba všechna čísla od 1 až do 999, tu přibližně jedna polovina těch čísel bude sudých, přibližně jedna pětina jich bude dělitelna pěti a podobně; kladu si nyní obdobný problém pro prvočísla: vezmu všechna kladná celá čísla od 1 až do x a ptám se, kolik je mezi nimi prvočísel; počet těch prvočísel (od 1 až do x) označme znakem $\pi(x)$. Otázka tedy je: jak velký asi je ten počet $\pi(x)$ — hlavně když x je velké? Hadamardova odpověď zní asi takto: pro velké hodnoty x je $\pi(x)$ přibližně rovno výrazu $\frac{x}{\log x}$; to znamená: když x roste nade všechny meze, tu podíl $\pi(x) : \frac{x}{\log x}$ se neomezeně blíží jedničce. Tolik pro čtenáře, který chce být podrobněji informován.

Ještě malou poznámku o prvočíselných dvojčatech. Jak jsem již poznamenal, nevíme ani, je-li těch dvojčat konečný nebo nekonečný počet; ale i když snad jich je nekonečně mnoho (což je dosti pravděpodobné), je hustota těch dvojčat daleko menší než hustota prvočísel; zhruba řečeno, hustota prvočíselných dvojčat v poměru k hustotě všech prvočísel je nejvýše taková jako hustota řady prvočísel v poměru k hustotě přirozené řady číselné. Tento — tuším, dosud jediný — úplně dokázaný výsledek o dvojčatech pochází od norského matematika V. Bruna (1919).

5. *Waringův problém.* Otázky, kterými jsme se zabývali v předcházejícím odstavci, týkají se vlastností čísel celých; nauka, která se zabývá vlastnostmi čísel celých, nazývá se t e o r i e č í s e l. V tomto a v příštím odstavci chci se zmíniti ještě o dvou slavných problémech z teorie čísel. První z nich je t. zv. Waringův problém; vyložím jej napřed na jednoduchém speciálním případě.

Vezměme přirozenou řadu číselnou

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

a umocněme ta čísla na druhou; dostaneme řadu

$$\text{(II.)} \qquad 1, 4, 9, 16, \ldots;$$

čísla této řady budu nazývati »úplnými čtverci«. Číslo 25 je tedy úplným čtvercem; číslo 13 není sice úplným čtvercem, je však součtem dvou úplných čtverců: $13=4+9$; číslo 6 není ani úplným čtvercem ani se nedá psáti jako součet dvou úplných čtverců (jak čtenář snadno zjistí), dá se však psáti jako součet tří úplných čtverců: $6=4+1+1$; u čísla 7 (jak čtenář ihned zjistí) nestačí ještě ani tři úplné čtverce, stačí však čtyři úplné čtverce: $7=4+1+1+1$.

Podivuhodné je však, že u žádného čísla není zapotřebí více než čtyř sčítanců; platí totiž věta: Každé celé kladné číslo dá se vyjádřiti jako součet nejvýše čtyř úplných čtverců.[1])

Podobnou otázku můžeme si položiti pro řadu třetích mocnin

(III.) $$1, 8, 27, 64, \ldots;$$

dá se dokázati: každé celé kladné číslo dá se vyjádřiti jako součet nejvýše devíti třetích mocnin. (Čtenář si sám může přezkoumat, že číslo $23=8+8+1+1+1+1+1+1+1$ vyžaduje skutečně devíti sčítanců. Že těch sčítanců je zapotřebí více než u úplných čtverců, je pochopitelno, ježto řada (III) vykazuje daleko větší mezery než řada (II).) Waring (1770) položil si otázku: platí obdobná věta také pro čtvrté mocniny, páté mocniny atd.? Tento problém zůstal dlouho nerozřešen; teprve Hilbertovi (1909) podařilo se zodpověděti tuto otázku kladně. (Hilbert — který právem jest považován za největšího ze žijících matematiků — dokázal tedy toto: Budiž s libovolné celé kladné číslo; sestrojme řadu

$$(S) \qquad 1^s, 2^s, 3^s, 4^s, \ldots;$$

potom existuje číslo k takové, že každé celé kladné číslo dá se vyjádřiti jako součet nejvýše k sčítanců, vybraných z řady (S).)

Tím ovšem není celý problém ještě vyčerpán; viděli jsme, že u úplných čtverců stačí právě čtyři sčítanci (tři však ještě ne), u třetích mocnin stačí právě devět sčítanců (osm však ještě ne). Vzniká tedy další otázka: s kolika sčítanci vystačíme právě u čtvrtých mocnin, s kolika u pátých mocnin atd. Tato otázka není dosud zcela rozřešena; důležité příspěvky podali k ní Hardy a Littlewood ve svých pracích, jež náležejí k nejpozoruhodnějším, ale též k nejtěžším partiím moderní matematiky; též ruský matematik Vinogradov velmi podstatně přispěl k pokroku v této otázce. (Příslušné práce těchto tří matematiků vznikly vesměs v posledním desítiletí.)

6. *Fermatův problém.* Již v předešlém odstavci vyslovili jsme jméno Fermatovo; laikům je však toto jméno známější v souvislosti s jiným problémem, o kterém nyní se zmíním. Jest možno nalézti tři celá, kladná čísla x, y, z, jež splňují vztah $x^2+y^2=z^2$; stačí vzíti na př. $x=3$, $y=4$, $z=5$, neboť $3^2+4^2=5^2$ (rovněž bychom mohli vzíti $x=8$, $y=15$, $z=17$, neboť $8^2+15^2=17^2$ atd.). Naproti tomu dá se dokázati, že neexistují celá kladná čísla x, y, z, jež by splňovala vztah $x^3+y^3=z^3$; a obdobný výsledek platí pro mocnitel 4 (t. j. pro rovnici $x^4+y^4=z^4$). Fermat vyslovil domněnku, že tento výsledek platí obecně. Fermatova domněnka tedy zní: je-li n celé číslo větší než 2, potom neexistují celá kladná čísla x, y, z, jež by splňovala vztah $x^n+y^n=z^n$.

Tento slavný problém[2]) nebyl dosud rozřešen; pokoušelo se o něj mnoho diletantů (podnícených asi velkou cenou, která byla na řešení tohoto problému vypsána, a slávou, která řešitele očekává) a mnozí z nich se domnívali,

1) Tuto větu vyslovil geniální francouzský matematik Fermat (1601—1665).

2) T. j. otázka, zda tato domněnka je správná či nesprávná.

že problém rozřešili — všechny ty důkazy obsahují však omyly, které laik snadno přehlédne. Nejlepší z těchto diletantských důkazů obsahují obyčejně správné řešení některého již známého a rozřešeného případu a potom chybný pokus o obecný důkaz. Ale také vynikající matematikové zabývali se tímto problémem, který je lákal svou nepřístupností; nejpodstatnějšího úspěchu dobyl při tom německý matematik Kummer (1810—1893), který dokázal neřešitelnost rovnice $x^n+y^n=z^n$ (pomocí celých kladných čísel x, y, z) pro velmi rozsáhlou skupinu mocnitelů n; pro všechna celá čísla n větší než 2 se mu však nepodařilo neřešitelnost té rovnice dokázati; také četní jiní matematikové dosáhli v této otázce pozoruhodných výsledků, nikdo však nedosáhl dosud plného úspěchu.

Čtenář si snad řekne: proč se tolik matematiků zabývalo tímto tak těžkým problémem a proč nevěnovali své síly jiným, také důležitým a snad důležitějším problémům, kde naděje na konečný úspěch by byla větší? Myslím, že mohu s dobrým svědomím vzíti tyto matematiky v ochranu (pokud ovšem přistupovali k tomuto problému s dostatečnou odbornou přípravou). Především Fermatův problém je významný sám o sobě: jedná o jisté pozoruhodné vlastnosti čísel celých, a čísla celá tvoří přece základ pro většinu matematiky. Za druhé Fermatův problém je pro matematika lákavý, poněvadž je obtížný: právě tak jako pro horolezce je lákavější výstup na Matterhorn než výstup na Petřín. Za třetí (a to je snad hlavní) Fermatův problém je důležitý, proto, protože je obtížný. To zní snad trochu paradoxně, ale hned to vysvětlím. Vyšetřuji-li takový obtížný problém, na kterém již mnoho badatelů ztroskotalo a chci-li dosáhnouti jakéhosi úspěchu, musím přirozeně užíti nových myšlenek, vytvořiti nové metody, po případě zavésti nové pojmy; a může se státi, že tyto nové metody budou míti význam i v jiných oborech matematiky a že tím podstatně přispějí k pokroku matematiky. Tak tomu bylo i v případě Kummerově: aby mohl podniknouti útok na Fermatův problém, vytvořil si Kummer teorii tak zvaných ideálních čísel (co to je, nebudu zde vykládati), která později v zobecněné a zdokonalené formě jakožto »teorie ideálů« se stala jednou z nejdůležitějších částí moderní matematiky. Kummer tedy sice nerozřešil úplně Fermatova problému, založil však při té příležitosti teorii ideálů, která je pro dnešní matematiku mnohem důležitější než celý Fermatův problém.

Totéž, co jsem řekl o významu Fermatova problému, platí přirozeně více nebo méně i o problémech, projednávaných v odst. 4. a 5. I zde obtížnost problémů vedla k vytvoření důležitých nových metod.

Zdržel jsem se úmyslně trochu déle (snad až neúměrně dlouho) u některých problémů z teorie čísel, poněvadž tyto problémy dají se vysloviti tak, že jsou i laikovi srozumitelny; ovšem jejich důkazy (nehledíme-li k problému, řešenému v odst. 3.) jsou — pokud jsou vůbec známy — tak obtížné, že jsem jich nemohl ani naznačiti. To se stává v matematice často: jestliže nějaký problém se dá sice elementárně vysloviti, nikoliv však elementárně řešiti, bývá jeho řešení často velmi obtížné: neboť k řešení toho elementárního problému musíme potom použíti prostředků neelementárn í c h ; tedy musíme užíti jakýchsi cizích, nepřirozených prvků a je pochopitelno, že takový důkaz bývá pak často složitý, obtížný a zamotaný.

7. *Nekonečné desetinné zlomky. Čísla reálná.* Odstavec, k němuž přistupuji nyní, není asi zvlášť zábavný; potřebuji jej však nutně pro další odstavce, věnované t. zv. nauce o množstvích, která — jak doufám — může poskytnouti čtenáři zvláště hluboký pohled do duševní práce matematiků. Prosím tedy laskavého čtenáře, aby prominul, bude-li se chvíli nudit, a aby si přesto tento odstavec pročetl; jde mi hlavně o to, aby si čtenář osvěžil a po případě trochu usoustavnil své vědomosti o reálných číslech.

Dosud jsme mluvili o číslech celých kladných 1, 2, 3, ...; čtenář zná však ze školy ještě jiná čísla, totiž jednak nulu a čísla celá záporná —1, —2, —3, ..., jednak čísla (kladná i záporná), která nejsou celá; na př. $^{43}/_{20}$, $^{1}/_{3}$, $-^{2}/_{7}$, $\sqrt{2}$, π (Ludolfovo číslo). Prozatím se omezím na čísla kladná, k nimž přiberu ještě nulu (číslům kladným s nulou se říká »č í s l a n e z á p o r n á«); o záporných číslech se stručně zmíním později.

Na střední škole jste se učili, že každé číslo kladné se dá vyjádřiti desetinným zlomkem; na př.:

$^{43}/_{20} = 2{\cdot}15$ (konečný desetinný zlomek),
$^{1}/_{3} = 0{\cdot}333333\ldots$ (nekonečný desetinný zlomek periodický),
$\sqrt{2} = 1{\cdot}41421\ldots$ (nekonečný desetinný zlomek neperiodický).[1])

Pro naše úvahy by bylo trochu nepohodlné, že ty desetinné zlomky jsou částečně konečné, částečně nekonečné; proto se umluvíme, že i konečné zlomky budeme psát jako nekonečné a sice tak, že prostě k nim přivěsíme samé nuly; tak místo 2·15 budeme psáti 2·1500000...; a také celá čísla budeme tak psáti: místo 15 budeme psáti 15·000000...

Tedy každé nezáporné číslo dá se vyjádřiti nekonečným desetinným zlomkem (nekonečný zlomek pro nulu je ovšem 0·000000...); a naopak, každý nekonečný desetinný zlomek vyjadřuje nějaké číslo nezáporné.

Co to vlastně znamená, když řeknu, že nějaké číslo, třeba Ludolfovo číslo π, se rovná příslušnému nekonečnému zlomku (v našem případě tedy zlomku 3·1415926...)? To znamená, že »úseky« toho desetinného zlomku

3, 3·1, 3·14, 3·141, 3·1415, 3·14159...

se čím dále tím více blíží tomu číslu π: chci-li dostati číslo π s chybou menší než 1:1000, stačí vzíti úsek 3·141; chci-li dostati číslo π s chybou menší než 1:1,000.000, stačí vzíti úsek 3·141592 atd. Číslo vyjádřené nekonečným desetinným zlomkem je tedy prostě mezní hodnota (matematikové říkají »limita«)[2]), které se neomezeně, čím dále tím více, blíží »úseky« toho nekonečného zlomku.

[1]) O periodických a neperiodických zlomcích promluvím později.

[2]) Zavádí-li matematik takový nový pojem, jako je třeba právě »limita«, musí jej ovšem napřed důkladně proklepat, nemá-li nějakou vnitřní vadu; to si zde odpustíme, ježto celý tento odstavec (až na některá podrobněji provedená místa) má spíše náznakový ráz; kdybychom chtěli postavit celou teorii reálných čísel na zcela uspokojující základnu, stálo by nás to příliš mnoho času.

Je vidět, že dvěma různým číslům x, y odpovídají dva různé nekonečné desetinné zlomky: neboť úseky toho prvního zlomku se neomezeně blíží číslu x, úseky pak toho druhého zlomku se neomezeně blíží jinému číslu, totiž číslu y.

Ovšem je možno položiti si též opačnou otázku: odpovídají také dvěma různým nekonečným deset. zlomkům dvě různá čísla? T. j.: dá se každé číslo rozvinout v nekon. deset. zlomek jen jedním jediným způsobem, nebo existují snad čísla, jež se dají rozvinouti několikerým způsobem? Ve škole jste asi tuto otázku sotva podrobně rozebírali; ale v dalších úvahách bude pro nás důležito, zjednati si v této otázce jasno. Vezměme v úvahu nekon. deset. zlomek 0·9999... (samé devítky). Jaká je jeho hodnota? Jeho úseky jsou 0·9, 0·99, 0·999, 0·9999,... a liší se tedy od jedničky po řadě o 1:10, 1:100, 1:1000, 1:10000... Ty úseky se tedy neomezeně blíží jedničce, hodnota toho nekon. deset. zlomku je tedy rovna jedné:

$$1 = 0{\cdot}9999\ldots;$$

ale číslo 1 dá se vyjádřiti ještě jinak nek. deset. zlomkem:

$$1 = 1{\cdot}0000\ldots$$

Máme zde tedy příklad čísla, které se dá vyjádřit dvěma způsoby[1]) jako nekonečný desetinný zlomek.

Ovšem obdobně se ukáže, že $0{\cdot}1 = 0{\cdot}09999\ldots$, $0{\cdot}01 = 0.009999\ldots$ atd. A z toho snadno poznáme následující okolnost: každé kladné číslo, jež se dá psáti jako konečný desetinný zlomek, dá se vyjádřiti jako nekonečný desetinný zlomek dvěma způsoby: jednak se samými nulami na konci, jednak se samými devítkami na konci. Neboť na příklad číslo 0·278 se dá psáti buď ve tvaru 0·278000000... nebo ve tvaru 0·277999999... (zde jsme totiž jednu tisícinu ubrali a zato jsme přidali $0{\cdot}0009999\ldots = 0{\cdot}001$). A dá se ukázati, že tento případ je jediný: každé jiné kladné číslo (jež nelze psáti jako konečný desetinný zlomek) lze rozvinouti jen jedním způsobem v nekon. deset. zlomek, a sice ten zlomek nekončí ani samými nulami ani samými devítkami.

Tato výjimka, kterou jsme zjistili u čísel, vyjadřitelných dvěma způsoby, je ovšem nepříjemná: vyhneme se jí tím, že jeden z těch způsobů prostě zakážeme: vyloučíme ze svých úvah ony nekon. desetinné zlomky, které od jistého desetinného místa počínajíc obsahují samé devítky. Po této úmluvě ovšem každé číslo nezáporné dá se psáti jen jedním dovoleným způsobem ve tvaru nekon. deset. zlomku.

Dospěli jsme tedy celkem k tomuto výsledku (který si čtenář musí zapamatovati): Každé nezáporné číslo dá se vyjádřiti jedním jediným způsobem pomocí nekon. deset. zlomku a naopak každý nekon. deset. zlomek vyjadřuje zcela určité číslo nezáporné. Při tom (to je důležité!) vylučujeme ze svých úvah nekon. deset. zlomky, jež od nějakého desetinného místa počínajíc obsahují samé devítky.

1) A dá se též dokázati: ne více než dvěma způsoby.

Obr. 1. *Znázornění reálných čísel na ose číselné.*

Je vidět, že je lhostejné, mluvíme-li o nezáporných číslech nebo o nekon. deset. zlomcích (ovšem o těch dovolených); neboť každé nezáporné číslo rovná se jednomu jedinému takovému zlomku a také naopak.

Dosud jsme nemluvili o číslech záporných; čísla záporná dostanu, vezmu-li všechna čísla kladná (t. j. všechny nekon. deset. zlomky — vyjma zlomek 0·000000...) a napíši před ně znamení minus.

Všechna tato čísla, t. j. všechny nekon. deset. zlomky, opatřené znamením + nebo — (znamení + se ovšem obyčejně vynechává), nazývají se čísla reálná.[1]) K znázornění těchto čísel užívá se často t. zv. osy číselné. To jest přímka, na níž je zvolen bod 0 (»počátek«) a jednotka délky. Každý bod na té ose číselné má určitou vzdálenost od počátku, kterou budeme počítati kladně na pravo a záporně na levo od počátku. Na př. »bod 2« (t. j. bod, jenž má znázorniti číslo 2) dostanu, nanesu-li na pravo od počátku délku rovnou dvěma (měřeno ovšem v té zvolené jednotce délkové); bod $-{}^{3}/_{2}$ dostanu, nanesu-li na levo od počátku délku ${}^{3}/_{2}$ atd. (»bod nula« je ovšem počátek sám); viz obrázek, kde jsou nakresleny body 0, 1, 2, 3, —1, —2, $-{}^{3}/_{7}$, $-{}^{3}/_{2}$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, ${}^{5}/_{2}$, π. Každý bod na ose číselné zobrazuje určité číslo reálné a každé číslo reálné je zobrazeno jedním bodem na ose číselné.

K tomu malou poznámku: pojímáme-li osu číselnou smyslovým názorem, podává nám ovšem jen zcela hrubý a nepřesný obraz souhrnu reálných čísel; vždyť přímka, nakreslená jakýmkoliv nástrojem, je vlastně velmi složitý hmotný útvar, složený z úlomků křídy nebo tuhy a pod. Chceme-li, aby číselná osa nám dávala přesný obraz souhrnu reálných čísel, musíme ji pojmouti abstraktně; nejčastěji se to dělá tak, že se slovy »osa číselná« rozumí prostě souhrn všech reálných čísel. Potom to ovšem vlastně je tautologie: »bod na ose číselné« je pak prostě reálné číslo. Přes to však zavedení takové geometricky znějící terminologie bývá často účelné, ježto usnadňuje přehled.

Mezi čísly reálnými nejzákladnější jsou t. zv. čísla celá, t. j. čísla celá kladná (1, 2, 3, ...), nula a čísla celá záporná (—1, —2, —3, ...). Další důležitou třídou jsou čísla racionální: tak nazýváme čísla, která se dají psát jako podíl dvou čísel celých (na př. $\frac{1}{3}$, ${}^{7}/_{5}$, ${}^{4}/_{9}$, $-{}^{5}/_{3}$, $-{}^{2}/_{11}$ atd.; čísla celá patří ovšem také mezi čísla racionální, neboť na př. $1={}^{1}/_{1}$, $3={}^{3}/_{1}$ (nebo též $3={}^{6}/_{2}$ atd.), $-5=-{}^{5}/_{1}$, $0={}^{0}/_{1}$ atd.). Jak poznáme, zda nějaké číslo, dané nekon. deset. zlomkem, je racionální nebo ne? To se pozná podle této věty: Každé racionální číslo kladné má nekon. desetinný zlomek periodický; a naopak každý nekon. deset. zlomek periodický vyjadřuje racionální číslo.

[1]) O číslech komplexních, v nichž vystupuje t. zv. imaginární jednotka *i*, nebudeme zde vůbec mluvit.

Při tom periodickým zlomkem nazýváme takový nekon. deset. zlomek, v němž se nějaká cifra nebo nějaká (konečná) skupina cifer od jistého místa stále bez přerušení opakuje; takové periodické zlomky jsou na př.

0·33333... (samé trojky),
1·252525... (samé skupiny 25),
2·34121212... (od třetího místa samé skupiny 12).

Ta »periodicita« může tedy začínat buď hned za desetinnou tečkou (v prvních dvou příkladech) nebo až po několika desetinných místech (v posledním příkladě). Ovšem také zlomky 1·00000... nebo 2·350000... (samé nuly) jsou podle naší definice periodické (na stř. škole jste ovšem takovéto zlomky obyčejně nebrali v úvahu — ty »zbytečné« nuly jste vynechávali).

Dokažme, že skutečně každé racionální kladné číslo se dá rozvinout v periodický zlomek (čtenář, kterého by důkaz nezajímal a který jest ochoten věřiti tomuto tvrzení, může tento odstavec vynechati). Vezměme jako příklad číslo $^2/_7$ a rozviňme je; to se dělá dělením:

2:7 = 0·285714285...
20
60
40
50
10
30
20
60
40
5

Při každém kroku nám vyjde jakýsi zbytek (zde na př. po řadě 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...); ten zbytek je menší než dělitel, může míti tedy pouze tyto hodnoty: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — to je celkem 7 hodnot. Nejpozději při osmém kroku musí se tedy některý zbytek opakovat; jakmile se však některý zbytek opakuje, opakuje se zřejmě i celý další postup dělení, t. j. ta skupina cifer, která stojí mezi dvojím opakováním jednoho a téhož zbytku, se stále opakuje — dostaneme skutečně periodický zlomek. Důkaz byl proveden specielně pro číslo $^2/_7$, čtenář však zajisté vidí, že obdobně dá se důkaz provésti obecně, pro libovolné kladné racionální číslo. Druhá část té věty, že totiž každý periodický zlomek dává racionální číslo, dala by se rovněž snadno dokázati, nebudu se tím však zdržovat.

Má-li tedy nějaký nekon. deset. zlomek vyjadřovati racionální číslo, musí býti periodický; existují tedy čísla reálná, jež nejsou racionální; neboť existují nek. deset. zlomky, jež nejsou periodické; na př. zlomek

0·1010010001000010000001...

(v každé skupině vždy o jednu nulu více než v předcházející) zřejmě není periodický. Čísla reálná, jež *nejsou* racionální, nazývají se *iracionální*. Číslo 0·101001000... je tedy iracionální.

Číslo 0·101001000... není čtenáři asi příliš běžné; existují však též čísla velmi běžná, jež jsou iracionální. Jako příklad si dokážeme, že též číslo $\sqrt{2}$ je iracionální (čtenář, který se nechce důkazem zdržovati, může tento odstavec přeskočit). Dokažme vskutku, že neexistuje žádné racionální číslo, jehož druhá mocnina by se rovnala dvěma. Kdyby totiž existovalo racionální číslo (t. j. podíl dvou čísel celých) p/q, jehož druhá mocnina by se rovnala dvěma

$$\text{(t. j.}\quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{čili} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2),$$

potom bychom mohli především ten zlomek p/q uvést na zkrácený tvar (na př. $^8/_{12}$ má zkrácený tvar $^2/_3$, $^5/_{15} = \frac{1}{3}$ atd.); mysleme si, že zlomek p/q je už napsán ve zkráceném tvaru. Z rovnice

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{by plynulo} \quad p^2 = 2q^2,$$

tedy p^2 by bylo sudé, tedy p by bylo sudé (neboť kdyby p bylo liché, bylo by i p^2 liché, jak čtenář snadno zjistí); tedy by se dalo psáti $p = 2m$, kdež m je celé číslo; rovnice $p^2 = 2q^2$ by se dala psáti též $4m^2 = 2q^2$, čili po zkrácení $2m^2 = q^2$, tedy by i číslo q^2 bylo sudé a tedy q by bylo sudé. Obě čísla, p i q, by tedy byla sudá, zlomek p/q by se dal tedy zkrátiti dvěma; to je však nemožné, neboť zlomek p/q byl již napsán ve zkráceném tvaru. Tedy je viděti, že není možno, aby existovalo číslo racionální, jehož druhá mocnina by se rovnala dvěma; neboť z existence takového čísla by plynul nesmyslný výsledek, že zlomek úplně zkrácený se dá ještě dále krátit. Důkaz právě provedený je typem t. zv. nepřímého důkazu; při něm se dokazuje nějaká věta tak, že se ukáže: předpoklad, že věta je nesprávná, vede ke sporu.

Všimněme si ještě jedné vlastnosti čísel racionálních a iracionálních. Racionální čísla jsou, jak říkáme, »všude hustá« na ose číselné. To znamená: ať si vezmu jakoukoliv, sebe menší úsečku osy číselné, vždy leží na té úsečce nějaký »racionální bod«, t. j. bod, jehož vzdálenost od počátku je racionální číslo.[1]) To je bezprostředně patrno: vezmu-li na př. úsečku, omezenou body 0·435 a 0·436 (jejíž délka se tedy rovná 1:1000), najdu snadno racionální bod, jenž leží uvnitř té úsečky; na př. 0·4351 nebo 0·43563 atd. Ale také iracionální čísla jsou »všude hustá« na ose číselné; na př. mezi 0·435 a 0·436 leží číslo

0·4351010010001000001 ...,

které je dáno neperiodickým zlomkem a tedy je iracionální.

Populárně to můžeme říci takto: ať vezmu sebe ostřejší drobnohled, nikdy nemohu na ose číselné najíti úsečku, jež by neobsahovala žádný racionální bod; a touž vlastnost mají také iracionální body: každá sebe menší úsečka osy číselné obsahuje jak body racionální tak iracionální.

Z toho všeho je vidět, že na příklad »souhrn všech čísel racionálních« je pojem, matematicky sice velmi jednoduchý, ale smyslovému názoru naprosto

1) čili: bod, jenž zobrazuje racionální číslo.

nepřístupný: souhrn všech racionálních bodů je všude hustý na ose číselné a tedy, abych tak řekl, »pouhým okem« nerozeznatelný od celé osy číselné; a přece racionální body nevyplňují celou osu číselnou — naopak, ostatní body (iracionální) číselné osy jsou dokonce také všude husté na ose číselné. Již na tomto jednoduchém případě vidíte, že v matematice smyslový názor nepostačuje; z toho plyne dále nutnost, postupovati při matematických důkazech čistě deduktivně, bez odvolávání se k názoru. Přes to ovšem hraje názor v matematice důležitou roli: vždyť matematické pojmy a problémy vznikly z velké části abstrakcí z názoru; a proto názor nám často usnadňuje porozumění, dává podněty, ukazuje pravděpodobné výsledky a naznačuje cestu k nim; ale v definitivním důkazu musí názor být nahrazen dedukcí. Hraje zde trochu takovou roli jako linkovaná podložka, která nám usnadňuje psaní, ale kterou není a nesmí být vidět na definitivním rukopisu.

8. *Základy nauky o množstvích.* Dosud jsme se zabývali hlavně problémy z teorie čísel (v odst. 3. až 6.); problémy z nauky o množstvích jsou docela jiného rázu a mohou mi proto posloužiti k tomu, abych se obrátil proti jednomu nesprávnému mínění, které mezi laiky je velmi rozšířeno. Otázky o prvočíslech z odstavce 3. a 4. nabízejí se každému skoro samy sebou; vím-li jednou, co to jsou prvočísla, je zcela přirozeno zeptati se: je těch prvočísel konečný počet nebo nekonečně mnoho (odst. 3.)? Zjistím-li, že je jich nekonečně mnoho, je přirozeno se tázati: jak hustě ta prvočísla leží (odst. 4., problém C)? Na začátku řady prvočíselné vidíme několik dvojčat: je těch dvojčat nekonečně mnoho (odst. 4., problém A)? Každé číslo celé větší než jedna dá se rozložit v součin prvočísel; jak je tomu, chci-li rozkládat celá čísla v součet prvočísel (odst. 4., problém B)? Většina laiků si představuje, že takto vypadá celá matematika: podle jejich mínění skládá se matematika z řady otázek, které se samy sebou naskytají a každému jsou patrné; a úkolem matematiky jest pouze, tyto dané otázky řešiti. Otázky, kterými jsme se dosud zabývali, byly skutečně (více nebo méně) tohoto druhu; existují však též široké obory matematiky, v nichž velká (a často hlavní) úloha spočívá ve formulaci otázek. Kdežto u problémů dosud projednávaných bylo snadno ty otázky položiti a jediná potíž spočívala v tom, ty otázky zodpověděti, uvidíme v nauce o množstvích příklad takové nauky, kde často hlavní těžiště spočívá ve formulaci otázky; čtenář pozná v dalším, jak zvláštní a na první pohled nečekané, při bližším ohledání však velmi závažné a přirozené otázky tato nauka si klade; a s jakou překvapující snadností jest možno leckdy (ne ovšem vždy) tyto otázky řešit.

Nauka o množstvích byla založena a ve svých základních částech také do značné míry vybudována německým matematikem J. Cantorem (1845—1918); koncem minulého století a ještě více v tomto století se široce rozvinula a zasahuje dnes rozhodujícím způsobem do nejrůznějších oborů matematiky. Přistoupíme nyní k prvním základům této nauky; čtenář se nemusí obávati, že budu klásti na jeho matematické znalosti větší požadavky než dosud — spíše naopak; zato však bude čtenář musiti svou schopnost abstraktního usuzování napnouti daleko více než dosud.

Ale napřed si dovolím jeden terminologický poklesek. V českých pracích se dříve často místo slova »množství« užívalo slova »množina«. Terminologická komise zavrhla toto pojmenování a doporučila slovo »množství«. V tomto populárním článku si však dovolím úchylku a budu říkati »množina«. Ze dvou důvodů: především slovo »množství« má při skloňování skoro všechny pády stejné, a to by u laika — který se tak snadno neorientuje jako odborník — mohlo vést k omylům; a za druhé je laik pokaždé tím poněkud divným slovem »množina« upozorněn na to, že jde o matematický pojem a ne o běžnou představu každodenního života.

Tedy především co je to »množina«? Množina je prostě souhrn nějakých věcí (hmotných nebo pomyslných); ty jednotlivé věci nazýváme prvky čili elementy té množiny. (Čtenář ovšem může říci, že tato věta nedává vlastně definici, nýbrž pouhé ozřejmění, opsání, objasnění pojmu množina, a má docela pravdu; na základě následujících příkladů bude však, doufám, čtenáři pojem množiny pro naše úkoly dostatečně objasněn.)

Osvětlíme si nejlépe ten pojem na příkladech.

Příklad 1. Množina všech zrnek písku v Atlantickém oceánu dne 7. prosince 1930 v 12 hodin středoevropského času: prvky jsou tedy jednotlivá zrnka písku, jež v onom okamžiku byla v Atlantickém oceánu.[1]) Těch prvků je tedy konečný (ovšem ohromný) počet.

Příklad 2. Množina všech lidí, kteří dne 5. listopadu 1929 v 7 hod. středoevropského času měli československé státní občanství. Prvky jsou tedy všichni lidé (i ti, co od té doby zemřeli), kteří v onom okamžiku měli čsl. státní občanství. Zase je těch prvků konečný počet.

Příklad 3. Množina všech prvočísel, jež jsou menší než 30. Prvky té množiny jsou čísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29; ta množina se skládá opět z konečného počtu (totiž z desíti) prvků.

Příklad 4. Množina všech sudých čísel kladných: 2, 4, 6, 8, ...; prvky jsou tedy čísla, a sice sudá kladná čísla. Tato množina se skládá z nekonečně mnoha prvků.

Vidíme, že množina může obsahovati buď konečný počet prvků (pak jí říkáme konečná množina) nebo nekonečně mnoho prvků (pak jí říkáme nekonečná množina).

Příklad 5. Množina všech čísel kladných, jež jsou menší než 1. Také tato množina je zřejmě nekonečná (prvky jsou všechna čísla kladná, menší než 1).

V těchto příkladech byly prvky těch množin dány jakýmsi obecným zákonem; množinu je však možno dáti ještě jinými způsoby, na př. prostě vyjmenováním všech prvků:

Příklad 6. Množina, jejíž prvky jsou čísla 3, 5, $\sqrt{2}$. Tato množina je konečná, skládá se ze tří prvků.

[1]) Aby ta množina byla skutečně definována, musili bychom ovšem přesně vytknouti, co rozumíme slovy »zrnko písku« a »Atlantický oceán«.

Příklad 7. Množina, jejíž prvky jsou: číslo 1, polárka, Karel IV.; *také tato množina se skládá ze tří prvků, je tedy konečná; nic nevadí, že ty prvky jsou zcela různorodé. (My se ovšem budeme hlavně zabývati množinami, jejichž prvky jsou čísla nebo body.)*

Doufám, že čtenáři na základě těchto příkladů je pojem množiny jakož i rozlišení množin na konečné a nekonečné dostatečně jasné.

Poznali jsme dva typy množin: množiny konečné (t. j. ty, jež se skládají z konečného počtu prvků) a množiny nekonečné. Množiny k o n e č n é je ještě dále možno tříditi podle toho, z k o l i k a prvků se skládají: tak množina příkladu 3. se skládá z desíti prvků, množina příkladu 6. se skládá ze tří prvků, množina všech celých čísel od 1 až do 1000000 se skládá z jednoho milionu prvků atd. Bylo by jistě velmi zajímavo a důležito, kdyby i n e k o n e č n é množiny bylo možno nějakým obdobným způsobem ještě dále tříditi; a první velký výkon Cantorův v teorii množin byl, že skutečně takové třídění provedl; chci vám v tomto odstavci ukázati, jak to Cantor udělal. Aby však věc byla co možná přístupná, začnu hodně ze široka, a to napřed s k o n e č n ý m i množinami.

Mám-li dvě konečné množiny, mohou nastati dva různé případy: buď ty dvě množiny mají obě stejný počet prvků nebo jedna z nich má více prvků než druhá. Jak můžeme rozhodnout, který z těchto dvou případů nastává? Nejjednodušší způsob je ten, že spočtu napřed všechny prvky jedné množiny a potom všechny prvky druhé množiny a všimnu si, vyšel-li v obou případech týž počet nebo ne. Ale je možný ještě jiný způsob, který pro nás bude důležitější; vyložím jej na příkladě. Mysleme si, že vstoupíme do taneční síně, ve které je spousta tancechtivých dam a pánů; jak poznáme, je-li těch dam stejně mnoho jako pánů (t. j. jak poznáme, skládá-li se množina dam ze stejného počtu prvků jako množina pánů)? Jeden způsob jsem již vytkl: spočtu napřed všechny dámy a potom všechny pány; to mi dá ovšem hodně práce, je-li těch dam i pánů mnoho a jestliže ještě k tomu přecházejí po sále. Existuje však ještě druhý, jednodušší způsob: počkám, až zahraje hudba: páni a dámy se sdruží v tančící páry; je-li jich stejně mnoho, nezůstane nikdo sedět; není-li jich stejně mnoho, zůstanou sedět ti, kterých je více (buď dámy nebo páni).[1]) Je patrno, že i tento druhý způsob se dá provésti pro libovolné konečné množiny: mysleme si, že jsou dány dvě konečné množiny: množina M a množina N. Jestliže obě ty množiny mají stejný počet prvků, potom zřejmě je možno prvky těch dvou množin sdružiti v páry tak, že každý pár obsahuje jeden prvek množiny M a jeden prvek množiny N, při čemž žádný prvek (ani z množiny M ani z množiny N) nevyjde na prázdno. Nemají-li však ty dvě množiny stejný počet prvků, není takové sdružení v páry možné (pokusíme-li se o ně, zbudou nám buď prvky z množiny M nebo prvky z množiny N). To »sdružení v páry«, o němž jsme mluvili, dá se vysloviti také ještě trochu jinak:

[1]) Předpokládám ovšem, že všichni jsou tancechtiví: t. j., že nikdo nezůstane sedět, pokud má s kým tančit. Tento případ vzal jsem z knihy Rademacher-Toeplitz, Von Zahlen und Figuren (Berlín, J. Springer, 1930). Upozorňuji čtenáře vůbec na tuto pěknou knížku (určenou právě vzdělaným laikům), v níž lze nalézti zajímavé otázky, vybrané z nejrůznějších oborů matematiky.

Jestliže dvě konečné množiny M a N mají stejný počet prvků, potom lze prvky množiny N přiřadit prvkům množiny M tak, že každému prvku množiny M je přiřazen jeden jediný prvek množiny N a naopak, každý prvek množiny N je přiřazen jednomu jedinému prvku množiny M;[1]) nemají-li obě množiny stejný počet prvků, není takové přiřazení možné.

Poznali jsme celkem dva způsoby, které dovolují poznati, zda dvě konečné množiny mají stejný počet prvků nebo ne: první — primitivní — způsob spočívá v tom, že prostě ty prvky jedné i druhé množiny spočítáme; druhý — rafinovanější — způsob spočívá v tom, že vyšetříme, dají-li se prvky těch dvou množin sdružiti v páry (čili dají-li se prvkům jedné množiny přiřaditi prvky druhé množiny) tak, jak bylo obšírně vylíčeno.

Rádi bychom nyní přenesli některý z těchto způsobů také na nekonečné množiny. První postup (spočítání prvků) se nám nehodí: není nám (aspoň prozatím) jasno, jak by se daly »spočítat« prvky nekonečné množiny. Za to druhý postup (sdružování v páry) dá se beze všeho přenésti i na nekonečné množiny: také u dvou nekonečných množin můžeme si položiti otázku, zda se jejich prvky dají sdružiti v páry způsobem dříve vylíčeným. A poněvadž jde o vlastnost velmi důležitou, dáme jí zvláštní název: jestliže dvě množiny dají se takto spárovati, budeme říkat, že tyto množiny jsou ekvivalentní. Podrobná definice ekvivalence zní tedy takto:

O dvou množinách[2]) M a N říkáme, že jsou navzájem ekvivalentní, jestliže lze prvky množiny N přiřaditi prvkům množiny M tak, že každému prvku množiny M je přiřazen jeden jediný prvek množiny N, a naopak, každý prvek množiny N je přiřazen jednomu jedinému prvku množiny M. (Vlastně jsem v této definici vynechal ještě jednu finesu; učinil jsem to úmyslně, abych čtenáři neztěžoval porozumění; za chvíli se ještě k této scházející podrobnosti vrátím, aby i ten čtenář, který uvažuje dokonale matematicky, byl plně uspokojen.)

U konečných množin znamená »ekvivalence« totéž jako »stejnost počtu prvků«, jak víme. U nekonečných množin nám tedy ekvivalence dává jakousi přirozenou analogii té »stejnosti počtu prvků.« Ovšem že jde o zobecnění či přenesení jistého úkazu z množin konečných na nekonečné; může se tedy docela dobře státi, že se při ekvivalenci nekonečných množin setkáme se zjevy, jež při ekvivalenci konečných množin nemohou nastati. Ukážeme si to hned na příkladě. Vezměme nějakou konečnou množinu M a odstraňme z ní jeden prvek nebo několik prvků; prvky, které zbudou, tvoří nějakou množinu N (která je, jak se říká, »částí« množiny M) a je patrno, že množina N a množina M nejsou si navzájem ekvivalentní; neboť množina N obsahuje méně prvků než množina M. U nekonečných množin vypadá to však docela jinak, jak ukáži na příkladě. Vezměme za prvé množinu všech čísel celých kladných 1, 2, 3, 4, . . .; označme tuto

[1]) Každý prvek množiny M a jemu přiřazený prvek množiny N tvoří právě jeden takový »pár« podle předešlé formulace.

[2]) Konečných nebo nekonečných — to je jedno.

množinu písmenem *M*. Vezměme za druhé množinu všech čísel sudých kladných 2, 4, 6, 8, ...; označme tuto množinu písmenem *N*. Množina *N* vznikla z množiny *M* odstraněním všech čísel lichých kladných; přes to však obě tyto množiny *(M* a *N)* jsou navzájem ekvivalentní, což poznáme takto: mysleme si napsány prvky množiny *M* (t. j. celá kladná čísla) po řadě podle velikosti a pod ně mysleme si napsány prvky množiny *N* (t. j. sudá kladná čísla) též po řadě podle velikosti, tedy takto:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ldots; \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14\ldots; \end{array}$$

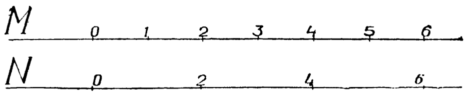
sdružím-li vždy dvě čísla nad sebou stojící v jeden pár, provedl jsem tím přiřazení ve smyslu naší definice: každému prvku množiny *M* (t. j. každému celému kladnému číslu) je přiřazen jeden jediný prvek množiny *N* (totiž dvojnásobek toho čísla) a každý prvek množiny *N* (t. j. každé sudé kladné číslo) jest přiřazen jednomu jedinému prvku množiny *M* (totiž polovině toho čísla). Množiny *M* a *N* jsou tedy skutečně navzájem ekvivalentní.

Čtenáři asi sotva vadila okolnost,[1]) že každé sudé kladné číslo vystupuje zde dvakrát, totiž jednou v množině *M* a jednou v množině *N*. Matematik ovšem ani takovou maličkost nenechává nevyslovenu, a proto matematikové definují ekvivalenci ještě trochu podrobněji, a sice takto: O dvou množinách *M* a *N* říkáme, že jsou navzájem ekvivalentní, jestliže existuje nějaká množina párů *(a, b)*, která má tyto tři vlastnosti: 1. první člen *a* v každém páru je prvkem množiny *M*, druhý člen *b* v každém páru je prvkem množiny *N*; 2. každý prvek množiny *M* je prvním členem jednoho jediného páru; 3. každý prvek množiny *N* je druhým členem jednoho jediného páru. Je vidět, že je to vlastně naše původní definice: každý pár *(a, b)* říká, který prvek *b* z množiny *N* je přiřazen prvku *a* z množiny *M;* vlastnost 2. říká, že každému prvku množiny *M* je přiřazen jeden jediný prvek množiny *N;* vlastnost 3. říká, že každý prvek množiny *N* je přiřazen jednomu jedinému prvku množiny *M*. Jenom je v této nové definici výslovně vyjádřeno, že je-li nějaký prvek současně prvkem obou množin, *M* i *N*, musí tento prvek vystupovati dvakrát: jednou jakožto prvek množiny *M*, t. j. jakožto první člen nějakého páru; po druhé, jakožto prvek množiny *N*, t. j. jako druhý člen nějakého páru. To je ta finesa, o které jsem mluvil při definici ekvivalence. Čtenář, kterému by se snad tato poznámka zdála příliš složitá, může ji, doufám, beze škody hned zase zapomenout.

Množina čísel 1, 2, 3, 4, ... a množina čísel 2, 4, 6, 8, ... vypadají, znázorníme-li je na ose číselné, velmi podobně: obě se skládají z osamělých bodů, jež běží směrem na pravo do nekonečna (viz obrázek) — je tedy dosti pochopitelné, že jsou si navzájem ekvivalentní. Vezmeme nyní množinu, která vypadá docela jinak: totiž množinu všech kladných čísel racionálních, kterou označím písmenem *A;* tato množina, jak víme (viz konec předešlého odstavce), je všude hustá na ose číselné na pravo od počátku.[2]) Čtenář

[1]) Tento odstavec je určen jen pro velmi náročného čtenáře.

[2]) Na levo od počátku ovšem ne, poněvadž záporná čísla racionální nebereme v úvahu.



Obr. 2. Množina M (t. j. množina všech čísel celých kladných 1, 2, 3, 4, . . .) a množina N (t. j. množina všech čísel sudých kladných 2, 4, 6, 8, . . .).

tedy asi očekává, že množina A, která se na pohled tolik liší od množiny M (písmenem M označuji množinu všech celých kladných čísel 1, 2, 3, . . .), nebude asi s množinou M ekvivalentní. A teď přijde první překvapení (mám jich ještě několik v zásobě); dokážeme totiž, že množina A a množina M jsou navzájem ekvivalentní.

Důkaz provedeme takto. Racionální kladné číslo je takové číslo, které se dá psáti jako podíl dvou celých kladných čísel, čili jako zlomek, jehož čitatel i jmenovatel jsou celá kladná čísla. Takový zlomek lze vždy převésti na t. zv. zkrácený tvar, ve kterém se už čitatel proti jmenovateli nedá krátit (na př. zlomek $^{36}/_{24}$ má zkrácený tvar $^{3}/_{2}$); abychom si úvahy zbytečně nekomplikovali, budeme si všechny zlomky mysliti už ve zkráceném tvaru. Množina A (t. j. množina všech kladných racionálních čísel) je tedy prostě množina všech zkrácených zlomků s kladným čitatelem i jmenovatelem. (Ovšem také celá čísla kladná budeme psáti ve tvaru zkrácených zlomků, t. j. ve tvaru zlomků se jmenovatelem 1; tedy místo 1, 2, 3, 4, . . . budeme psáti $^{1}/_{1}$, $^{2}/_{1}$, $^{3}/_{1}$, $^{4}/_{1}$, . . .).

Vezměme nějaký takový zlomek, třeba $^{4}/_{7}$, a sečtěme čitatele a jmenovatele: dostaneme $4+7=11$; tento součet čitatele a jmenovatele nazvu »hodností« zlomku; zlomek $^{4}/_{7}$ má tedy hodnost 11; zlomky $^{1}/_{1}$, $^{1}/_{3}$, $^{4}/_{5}$, $^{12}/_{13}$ mají po řadě hodnost 2, 4, 9, 25. Seřadíme si nyní všechny ty kladné zkrácené zlomky podle rostoucí hodnosti; zlomky pak, které mají touž hodnost, seřadíme podle rostoucího čitatele. Toto seřazení vypadá tedy takto: napřed přijde zlomek hodnosti 2, totiž $^{1}/_{1}$; potom zlomky hodnosti 3 v tomto pořadí: $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{1}$; potom zlomky hodnosti 4 v tomto pořadí: $^{1}/_{3}$, $^{3}/_{1}$ (zlomek $^{2}/_{2}$ jsme vynechali, ježto to není zkrácený zlomek); potom zlomky hodnosti 5 v tomto pořadí: $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{2}$, $^{4}/_{1}$; potom zlomky hodnosti 6 v tomto pořadí: $^{1}/_{5}$, $^{5}/_{1}$ (nezkrácené zlomky $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{3}$, $^{4}/_{2}$ jsme opět vynechali); atd. Tím dostávám tyto zlomky v následujícím uspořádání:

$$(3) \qquad \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{5}{1}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{6}{1}, \ldots$$

Tato řada (3) ovšem jde do nekonečna a je zřejmo, že obsahuje skutečně všechny kladné zkrácené zlomky a že každý takový zlomek je v té řadě napsán jenom jednou a to na docela určitém místě. Tím jsme však již skoro u cíle: napišme řadu čísel celých kladných podle velikosti a pod ni napišme řadu (3):

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \ldots \end{array}$$

A nyní sdružíme v páry vždy ty dva prvky, které stojí nad sebou, t. j.: číslu 1 přiřadíme zlomek $^{1}/_{1}$, číslu 2 přiřadíme zlomek $^{1}/_{2}$, číslu 3 přiřadíme zlomek $^{2}/_{1}$ atd.; na př. číslu 80 přiřadíme onen zlomek, jenž v řadě (3) stojí na osmdesátém místě, atd. Je vidět, že jsme tímto způsobem skutečně provedli žádané přiřazení: každému celému kladnému číslu je přiřazen jeden jediný kladný zkrácený zlomek (t. j. jedno jediné kladné racionální číslo); a také naopak každý kladný zkrácený zlomek (t. j. každé kladné racionální číslo) je přiřazen jednomu jedinému celému kladnému číslu. Tedy množina všech celých kladných čísel a množina všech kladných racionálních čísel jsou skutečně navzájem ekvivalentní, jak bylo dokázati.[1])

Podívejme se ještě na to, v čem spočívá podstata tohoto důkazu. Měli jsme množinu M (t. j. množinu čísel 1, 2, 3, 4, ...) a množinu A (t. j. množinu všech kladných racionálních čísel) a chtěli jsme dokázati, že tyto dvě množiny jsou navzájem ekvivalentní, t. j., že prvky množiny A jest možno sdružiti v páry s prvky množiny M, tak jak to bylo obšírně vyloženo v definici ekvivalence. K tomu cíli jsme postupovali tak, že jsme si našli řadu (3), jež má tyto vlastnosti: skládá se vesměs z prvků množiny A (t. j. z kladných racionálních čísel), a to ze všech prvků množiny A, a každý prvek množiny A (t. j. každé kladné racionální číslo) stojí na zcela určitém (prvním, druhém, ..., padesátém, ...) jediném místě té řady.[2]) Sestrojením této řady jest důkaz vlastně již proveden: stačí první člen té řady spárovati s číslem 1, druhý člen té řady spárovati s číslem 2 atd.

Je patrno, že tohoto postupu se dá užíti obecně: mysleme si, že máme nějakou množinu R, která je ekvivalentní s množinou M (t. j. s množinou čísel 1, 2, 3, 4, ...); co znamená ta ekvivalence? To znamená, že prvky množiny R je možno spárovati s čísly 1, 2, 3, 4, ...; označím-li onen prvek množiny R, jenž je spárován s číslem 1, znakem x_1, onen prvek množiny R, jenž je spárován s číslem 2, znakem x_2 atd., je patrno, že tím jsou prvky množiny R srovnány v řadu

(4) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$$

tak, že každý prvek množiny R leží na zcela určitém (prvním, druhém, ...) jediném místě té řady.

A naopak: lze-li prvky nějaké množiny R srovnati v takovou řadu (4), je jasno, že množina R je ekvivalentní s množinou čísel 1, 2, 3, 4, ...; neboť stačí, spárujeme-li prvek x_1 s číslem 1, prvek x_2 s číslem 2, prvek x_{30} s číslem 30 atd. Množiny, jež jsou ekvivalentní s množinou čísel 1, 2, 3, 4, ..., jsou tedy charakterisovány tím, že jejich prvky lze srovnati v takovou řadu

(4) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

tak, že každý prvek té množiny stojí na docela určitém, jediném místě této řady. Prvky takové množiny dají se tedy jaksi »odpočítati« pomocí čísel 1, 2, 3, 4, ... (mohu si to obrazně myslit třeba tak, že počítám: jedna,

1) Abychom to přiřazení mohli provést, musili jsme ovšem množinu racionálních kladných čísel pořádně zpřeházeti: v řadě (3) nejsou racionální kladná čísla seřazena podle velikosti, nýbrž podle docela jiného principu.

2) Na př.: na kolikátém místě stojí zlomek 4:7? (Pro úsporu místa píši zde místo zlomkové čáry dělítko.) Ten má hodnost $4 + 7 = 11$; napřed přijdou tedy *zkrácené* zlomky, jež mají hodnost menší než 11: 1:1, 1:2, 2:1, 1:3, 3:1, 1:4, 2:3, 3:2, 4:1, 1:5, 5:1, 1:6, 2:5, 3:4, 4:3, 5:2, 6:1, 1:7, 3:5, 5:3, 7:1, 1:8, 2:7, 4:5, 5:4, 7:2, 8:1, 1:9, 3:7, 7:3, 9:1 a potom zkrácené zlomky o hodnosti 11 v tomto pořadí: 1:10, 2:9, 3:8, 4:7, 5:6, 6:5, 7:4, 8:3, 9:2, 10:1. Zlomek 4:7 stojí tedy na pětatřicátém místě.

dvě, tři, ... a při tom si ukazuji prstem postupně na člen x_1, x_2, x_3, ...). Proto se takovým množinám říká »spočetné«. Spočetná množina je tedy taková množina, která je ekvivalentní s množinou čísel 1, 2, 3, 4, ...

Poznámka: Čtenář by snad na první pohled mohl mysliti, že každou nekonečnou množinu lze srovnati do takové řady x_1, x_2, x_3, ...; tomu však tak není, jak za chvíli ukážeme (zjistíme totiž, že množinu všech čísel nezáporných, menších než 1 nelze takto srovnati). Tu řadu x_1, x_2 ... nesmíme si myslit sestrojenu tak, že bychom napřed vybrali jeden prvek té množiny a označili jej x_1. potom druhý a označili jej x_2 atd.; to bychom na př. po 99 krocích ještě nevěděli, který bude stý člen té řady; ta řada by nikdy nebyla úplně určena a nemohli bychom nikdy zjistit, zda obsahuje skutečně všechny prvky té množiny. Ta celá nekonečná řada x_1. x_2 ... musí býti úplně dána, abych tak řekl, jedním rázem; zrovna tak jako byla v našem případě dána řada

(3) $$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots;$$

ta byla dána tímto předpisem: kladné zkrácené zlomky v ní následují po sobě podle rostoucí hodnosti a zlomky téže hodnosti následují po sobě podle rostoucího čitatele. Tímto předpisem je pořadí všech členů té řady úplně, jednoznačně určeno (na př. v předešlé poznámce jsme zjistili, že zlomek $^4/_7$ stojí na pětatřicátém místě; a podobně bychom mohli určiti o každém zkráceném kladném zlomku, na kolikátém místě té řady stojí, nebo naopak o každém místě té řady bychom mohli zjistiti, který zlomek na něm stojí).

Vyšetřovali jsme dosud tři množiny: množinu M, t. j. množinu všech čísel celých kladných; množinu N, t. j. množinu všech čísel sudých kladných; množinu A, t. j. množinu všech kladných čísel racionálních. Zjistili jsme, že množina N i množina A jsou ekvivalentní s množinou M, čili že jsou spočetné. Přirozeně se naskytá nyní otázka: nejsou snad všechny nekonečné množiny spočetné, t. j. ekvivalentní s množinou M (t. j. s množinou čísel 1, 2, 3, 4, ...)? Kdyby tomu tak bylo, byli bychom ovšem s teorií ekvivalence hotovi: všechny nekonečné množiny byly by ekvivalentní s množinou M a pojem »ekvivalence« neposkytoval by žádného jemnějšího dělítka pro nekonečné množiny.[1]) Na štěstí tomu tak není: budeme nyní vyšetřovati množinu všech nezáporných čísel, menších než 1, a dokážeme, že tato množina není spočetná, t. j., že není ekvivalentní s množinou všech čísel celých kladných.

K tomu malou poznámku: kdybychom vzali jen množinu všech racionálních čísel nezáporných a menších než 1, zjistili bychom snadno, že tato množina jest spočetná (důkaz si čtenář sám provede: jde o množinu všech nezáporných zkrácených zlomků, kde čitatel je menší než jmenovatel; tyto zlomky lze opět srovnati podle »hodnosti« v řadu takto:

[1]) Přejeme si ovšem, aby pojem ekvivalence poskytoval jakési dělítko pro nekonečné množiny: množiny *konečné* (o konečném počtu prvků) můžeme rozlišovat ještě dále podle toho, *kolik* prvků obsahují; a pojem ekvivalence jsme zavedli právě proto, abychom něco analogického dostali i pro množiny *nekonečné*.

$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \ldots$
z čehož spočetnost čili ekvivalence s množinou M jest patrna). Vezmu-li však množinu všech čísel nezáporných menších než 1, t. j., přidám-li k těm číslům racionálním ještě také čísla iracionální, dostanu množinu, která — jak dokážeme — není spočetná. Tím přidáním iracionálních čísel se tato množina — přibližně řečeno — tak podstatně zvětšila, že ekvivalence s množinou M zmizela; populárně, ovšem ne přesně, to můžeme vyjádřiti asi tak, že iracionálních čísel je »podstatně více« než racionálních čísel (přirozeně, že i tomuto zcela nepřesnému a neurčitému výroku lze dáti přesný tvar a přesný smysl pomocí vhodných definic — ale tím nebudu čtenáře zatěžovati).

Dokážeme nyní větu, kterou jsme před okamžikem vyslovili, t. j. tuto větu: Množina všech čísel nezáporných, menších než 1, není spočetná. Prohlédněme si blíže, co máme dokázati. Nezáporná čísla, jak víme, dají se vyjádřiti nekonečnými desetinnými zlomky, a sice každé nezáporné číslo dá se vyjádřiti jedním jediným způsobem jako nekonečný desetinný zlomek a každý nekonečný desetinný zlomek vyjadřuje naopak zcela určité nezáporné číslo (viz předešlý odstavec). Ovšem, abychom dosáhli té »jednoznačnosti«, musili jsme některé desetinné zlomky ze svých úvah vyloučit: totiž ty, které od jisté decimály obsahují samé devítky. Množina všech nezáporných čísel je tedy prostě množina všech (nevyloučených) nekonečných desetinných zlomků. My však máme vyšetřovati jen množinu všech nezáporných čísel menších než 1, t. j. máme z množiny všech nezáporných čísel čili z množiny všech (dovolených) nekonečných desetinných zlomků vybrat jen ty, jejichž hodnota je menší než 1. To je velmi snadné: vezmeme prostě jen ty nekon. desetinné zlomky, které před desetinnou tečkou mají nulu: tak na př. čísla 0·32147..., 0·0125..., 0·976.., jsou menší než 1, kdežto nekon. deset. zlomky, jež mají před desetinnou tečkou jiné číslo než nulu, nejsou menší než 1; na př. 1·023..., 2·571..., 10·320.., Tedy množina všech nezáporných čísel menších než 1 je prostě množina všech nekon. deset. zlomků, jež mají před desetinnou tečkou nulu (t. j. jež jsou tvaru $0 \cdot a_1, a_2, a_3 \ldots$, kde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jsou příslušné »decimály«, t. j. cifry od 0 do 9); označme tuto množinu písmenem *B;* máme dokázati, že množina B a množina M (t. j. množina všech čísel celých kladných 1, 2, 3, 4,...) nejsou navzájem ekvivalentní. To jest: máme dokázati, že není možno prvky množin M a B sdružiti v páry (čili přiřaditi prvky množiny B prvkům množiny *M)* tak, jak bylo podrobně v definici ekvivalence vylíčeno. Důkaz tohoto tvrzení provedeme t. zv. »nepřímým způsobem«[1]); to znamená: vyjdeme od předpokladu, že takové sdružení v páry jest možné (t. j. že množiny M a B jsou si navzájem ekvivalentní), a ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu (t. j. k nemožnému, nesmyslnému důsledku).

Mysleme si tedy, že takové přiřazení prvků těch množin M a B jest

1) V předešlém odstavci byl tímto nepřímým způsobem proveden důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální.

možné a že takové určité přiřazení jest provedeno. Pomocí toho přiřazení jest každému prvku množiny M (t. j. každému celému kladnému číslu) přiřazen určitý prvek množiny B. Onen prvek množiny B, jenž je přiřazen číslu 1, označme značkou x_1; onen prvek množiny B, jenž je přiřazen číslu 2, označme značkou x_2, atd.; na př. x_{50} je onen prvek množiny B, jenž je přiřazen číslu 50. Ježto pak podle předpokladu **každý** prvek množiny B je přiřazen nějakému celému kladnému číslu (t. j. nějakému prvku množiny M), tedy řada

$$(5) \qquad x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ldots$$

(která je ovšem nekonečná) obsahuje **všechny** prvky množiny B.[1]) A nyní ukážeme, že jest to nemožno: řada tvaru (5) **nemůže** úplně vyčerpati množinu B. Tím dojdeme k hledanému sporu a tím bude naše věta dokázána.

Řada $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se skládá z prvků množiny B, t. j. z nekoneč. deset. zlomků, jež mají před desetinnou tečkou nulu. Členy té řady jest tedy možno psáti ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0\cdot a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ldots \\ x_2 &= 0\cdot b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ldots \\ x_3 &= 0\cdot c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ldots \\ x_4 &= 0\cdot d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ldots \\ x_5 &= 0\cdot e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ldots \end{aligned}$$

(Při tom $a_1, a_2, a_3, \ldots$ značí decimály čísla x_1 atd.; kdyby na př. bylo $x_3 = 0\cdot71256\ldots$, bylo by $c_1=7$, $c_2=1$, $c_3=2$, $c_4=5$, $c_5=6$, atd. Čtenář, kterému by snad počítání s obecnými čísly $a_1, a_2, \ldots$ dělalo potíže, ať si laskavě představí nějaký konkrétní příklad; třeba si může myslit, že jest

$$\begin{aligned} x_1 &= 0\cdot34529\ldots \\ x_2 &= 0\cdot20031\ldots \\ x_3 &= 0\cdot71256\ldots \\ x_4 &= 0\cdot32510\ldots \\ x_5 &= 0\cdot12369\ldots; \end{aligned}$$

podstatné v našem důkazu ovšem jest, že naše úvahy platí **vždy**, ať jsou decimály $a_1, a_2 \ldots, b_1, b_2 \ldots$ jakékoliv.)

Máme nyní dokázati, že řada

$$(5) \qquad x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots$$

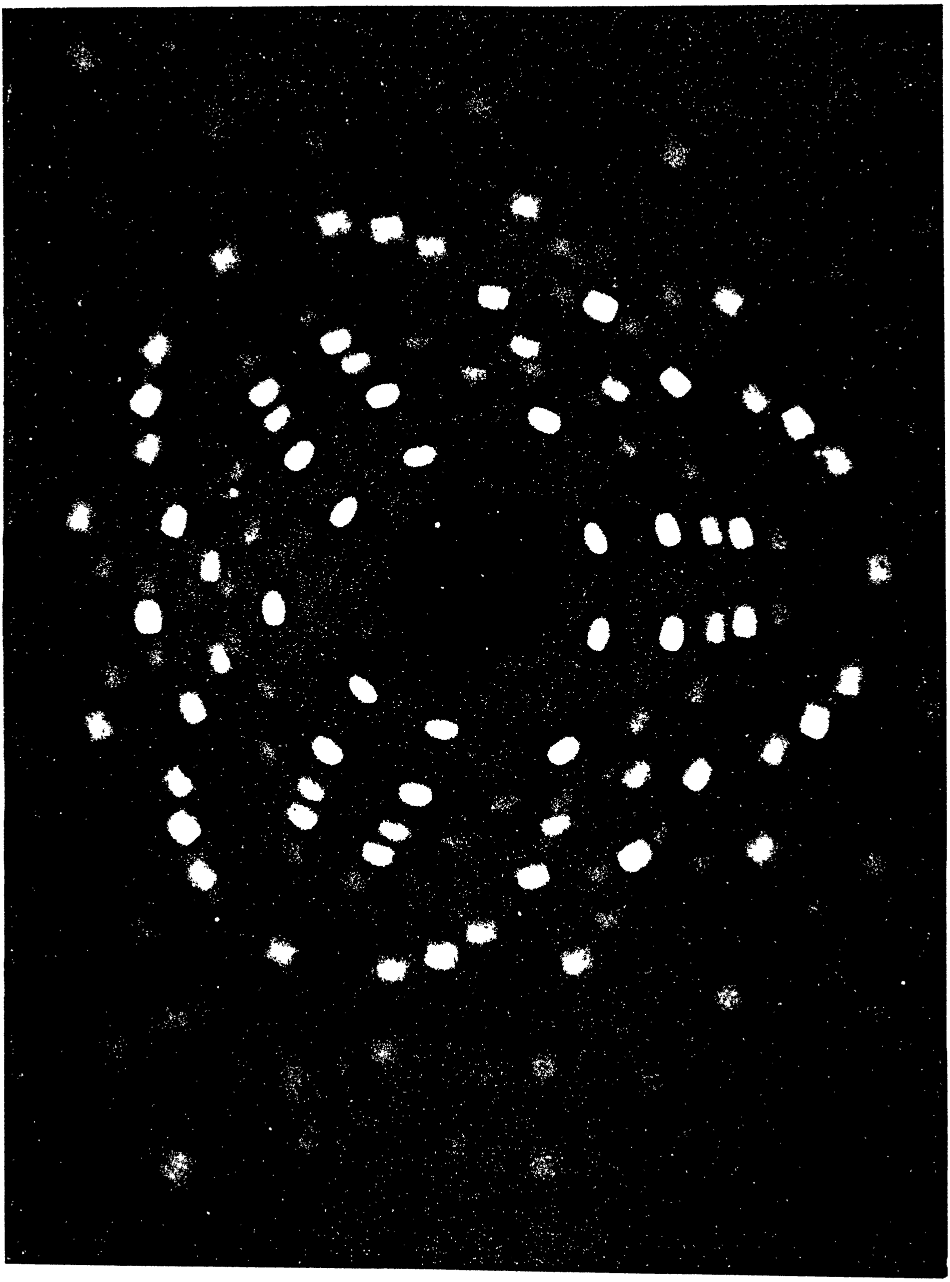
nevyčerpává celou množinu B. Důkaz bude patrně proveden, podaří-li se nám sestrojiti nekon. deset. zlomek

$$y = 0\cdot k_1 \ k_2 \ k_3 \ldots$$

($k_1, k_2, k_3, \ldots$ jsou decimály toho zlomku), který není roven ani číslu x_1, ani číslu x_2, ani číslu x_3 ani ... atd.[2]) Takový zlomek lze však snadno de-

[1]) Čtenář mi odpustí, že jsem vlastně ještě jednou zopakoval to, o čem jsem už mluvil při spočetných množinách.

[2]) Neboť potom číslo y, jakožto nekon. deset. zlomek s nulou před deset. tečkou, patří k množině B, není však obsaženo v řadě (5).



FOTOGRAM ZÍSKANÝ PRŮCHODEM RÖNTGENOVÝCH PAPRSKŮ KRYSTALEM KORUNDU.
(Foto docent Dr. Fr. Ulrich.)

finovati; zvolíme si totiž decimály $k_1, k_2, k_3, \dots$ tak, aby číslo y se lišilo od čísla x_1 v první decimále, aby číslo y se lišilo od čísla x_2 v druhé decimále, aby číslo y se lišilo od čísla x_3 v třetí decimále atd. Toho docílíme třeba tímto způsobem (jsou možny ovšem i jiné způsoby). Decimálu k_1 volím rovnu 1, jestliže a_1 (t. j. první decimála čísla x_1) je jiná číslice než 1; jestliže však jest $a_1=1$, volím $k_1=2$; tím je dosaženo, že první decimála čísla y je různá od první decimály čísla x_1. Obdobně decimálu k_2 volím rovnu 1, jestliže číslo b_2 (t. j. druhá decimála čísla x_2) je jiná číslice než 1; jestliže však jest $b_2=1$, volím $k_2=2$; tím je dosaženo, že druhá decimála čísla y je různá od druhé decimály čísla x_2. A obdobně volíme cifry $k_3, k_4, \dots$ Na př. číslice k_{30} je stanovena tímto předpisem: jestliže třicátá decimála čísla x_{30} je jiná číslice než 1, volím $k_{30}=1$; je-li však třicátá decimála čísla x_{30} rovna jedné, volíme $k_{30}=2$. (V našem číselně daném příkladě jsem ty »diagonální« cifry (t. j. první decimálu čísla x_1, druhou decimálu čísla x_2, třetí decimálu čísla x_3 atd.) napsal tučně; číslo y vypadá pak takto: $k_1=1$, $k_2=1$, $k_3=1$, $k_4=2$, $k_5=1$, ... atd., tedy $y=0{\cdot}11121\dots$). Tímto předpisem jsou tedy stanoveny všechny decimály $k_1, k_2, k_3, \dots$ a tedy i nekon. deset. zlomek

$$y=0{\cdot}\,k_1\;k_2\;k_3\dots$$

Tento zlomek patří do množiny B. (Zlomek $0{\cdot}\,k_1\,k_2\,k_3\dots$ nepatří jistě mezi »zakázané« zlomky; neboť na všech desetinných místech má samé jedničky a dvojky, takže potíže s devítkami jsou vyloučeny.). Není však roven číslu x_1 (neboť nekon. deset. zlomky pro čísla y a x_1 se liší na první decimále), ani není roven číslu x_2 (neboť y a x_2 se liší na druhé decimále); y není také rovno na př. číslu x_{50} (neboť y a x_{50} se liší na padesáté decimále) atd. Číslo y nerovná se tedy žádnému číslu z řady (5), řada (5) nevyčerpává tedy celou množinu B, a tím je důkaz proveden.

K větě, kterou jsme právě dokázali, připojím ještě dvě poznámky. První z nich týká se věty samotné. Dokázali jsme, že množina M a množina B nejsou navzájem ekvivalentní. To je fakt základní důležitosti; tak jako nejsou všechny konečné množiny navzájem ekvivalentní (na př. množina, složená ze dvou prvků, není ekvivalentní s množinou, složenou ze tří prvků), zrovna tak nejsou všechny nekonečné množiny navzájem ekvivalentní. Tímto poznatkem teprve nabývá teorie ekvivalence své plné důležitosti: tak jako je možno tříditi konečné množiny ještě dále pomocí ekvivalence a neekvivalence (t. j. pomocí stejnosti či různosti počtu prvků), zrovna tak je možno tříditi ještě dále pomocí ekvivalence a neekvivalence i množiny nekonečné.[1])

Druhá poznámka týká se důkazu té věty. Hlavní bod důkazu byl asi tento: napsali jsme ty zlomky

[1]) Věta, o které mluvíme, zní: Množiny M a B nejsou navzájem ekvivalentní, čili: *Nelze* prvky množin M a B sdružiti v páry tak, jak bylo vylíčeno v definici ekvivalence. Vidíte, že i poznatky, mající zdánlivě negativní ráz (»nelze«, »jest nemožno«, »neexistuje« a pod.), mohou míti v matematice velký *positivní* význam; nemusí býti nepříjemné a nežádoucí — mohou naopak býti důležitými sloupy naší vědy.

$$
\begin{aligned}
x_1&=0{\cdot}\mathbf{a}_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ldots\\
x_2&=0{\cdot}b_1\ \mathbf{b}_2\ b_3\ b_4\ b_5\ldots\\
x_3&=0{\cdot}c_1\ c_2\ \mathbf{c}_3\ c_4\ c_5\ldots\\
x_4&=0{\cdot}d_1\ d_2\ d_3\ \mathbf{d}_4\ d_5\ldots\\
x_5&=0{\cdot}e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ \mathbf{e}_5\ldots
\end{aligned}
$$

Potom jsme vzali ty tučně vysázené decimály (t. j. první decimálu čísla x_1, druhou decimálu čísla x_2, třetí decimálu čísla x_3 atd. — krátce ty decimály, jež leží jaksi v »úhlopříčně« toho schematu), ty jsme podle určitého pravidla vesměs pozměnili[1]) a těch změněných decimál jsme užili právě k sestrojení toho hledaného čísla y. Tato základní myšlenka důkazu (t. zv. »diagonální postup«), stejně jednoduchá jako duchaplná, nevyskytuje se jen v tomto důkazu: v přemnohých důkazech matematických, zbavíte-li je nejrůznějších obtížných podrobností a odborně-technických fines, objeví se vám jako jádro tato prajednoduchá a při tom svrchovaně plodná myšlenka Cantorova.

Množinu B je možno interpretovati také geometricky; reálná čísla jest totiž možno zobraziti na t. zv. ose číselné (viz předešlý odstavec). Při tom číslům nezáporným odpovídají body na pravo od »bodu nula« (t. j. na pravo od počátku, ovšem včetně počátku); číslům menším než 1 odpovídají body na levo od »bodu jedna«. Množině B (jež se skládá ze všech čísel nezáporných, menších než 1) odpovídá tedy množina všech bodů, ležících na pravo od bodu 0 a současně na levo od bodu 1 (bod nula inclusive, bod jedna exclusive). Jinými slovy: množinu B jest možno interpretovati také jako množinu všech bodů úsečky, omezené (na ose číselné) bodem 0 a bodem 1.[2]) Množina B je tedy — geometricky řečeno — množina všech bodů jistého »jednorozměrného« útvaru, totiž množina všech bodů na jisté úsečce.

Jako poslední příklad na teorii ekvivalence budeme vyšetřovati množinu bodů v jistém »dvojrozměrném« útvaru, totiž množinu všech bodů ve čtverci. Napřed však musíme si zopakovati, jak lze určovati body v rovině. Jak lze určovati body na přímce, víme z předešlého odstavce: zvolíme na té přímce bod, t. zv. »počátek«, a jednotku délky. Každý bod na té přímce má určitou vzdálenost od počátku, kterou bereme kladně na pravo a záporně na levo od počátku; tuto vzdálenost (branou s příslušným znamením) nazýváme také souřadnicí toho bodu. Dáti bod na přímce znamená tedy totéž, jako dáti číslo, totiž souřadnici toho bodu; množinu bodů na přímce mohu tedy interpretovati také jako množinu čísel (totiž jako množinu souřadnic těch bodů).

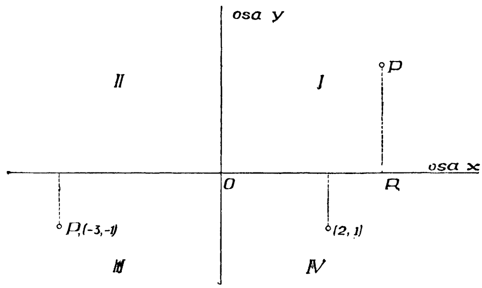
K určení bodu v rovině je třeba dvou obdobných souřadnic. Myslete si třeba rovinu tohoto papíru; abychom mohli určovati polohu bodů v této

1) Totiž místo decimál 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jsme psali jedničku, místo decimály 1 jsme psali dvojku.

2) Při tom levý koncový bod (bod *0*) počítáme k množině B, pravý koncový bod (bod *1*) nepočítáme k množině B. To jsme udělali jen pro pohodlí (aby totiž množina *B* byla právě množina všech nekon. deset. zlomků, jež mají nulu před desetinnou tečkou). Kdybychom učinili o koncových bodech té úsečky jinou úmluvu, dostali bychom týž výsledek.

Obr. 3. *Pravoúhlé souřadnice v rovině.*

Osy x, y rozdělují rovinu na čtyři kvadranty, označené číslicemi I, II, III, IV. Na obrázku jsou vedle bodu P zakresleny ještě dva body: bod o souřadnicích -3, -1 a bod o souřadnicích 2, -1. (U posléze uvedeného bodu je omylem na obrázku 1 místo správného -1.)



rovině, nakreslíme dvě kolmé přímky, kterým budeme říkati osa x (nebo také osa úseček) a osa y (nebo také osa pořadnic); jejich průsečík nazýváme počátkem (bod O; viz obrázek); zvolíme konečně také jednotku délky. Budiž nyní P nějaký bod v té rovině; spustíme z bodu *P* kolmici na osu x; ta prctne osu x v bodě, který označme *R;* vzdálenost *OR* (počítanou kladně, je-li bod *R* na pravo od počátku, a záporně, je-li bod *R* na levo od počátku) nazýváme x-ovou (čti iksovou) souřadnicí bodu *P* nebo také úsečkou bodu *P;* vzdálenost *PR* (počítanou kladně, je-li bod *P* nad osou x, a záporně, je-li bod *P* pod osou x) nazýváme y-ovou (čti: ypsilonovou) souřadnicí bodu *P* nebo také pořadnicí bodu *P.* Úsečka a pořadnice bodu *P* nazývají se dohromady souřadnicemi bodu *P.* Každý bod v rovině určuje tedy dvojici čísel, totiž svou úsečku a svou pořadnici. Naopak, každá dvojice čísel, bereme-li ta čísla jako úsečku a pořadnici nějakého bodu, určují jeden jediný, zcela určitý bod v rovině; na př. bod P_1, jenž má souřadnice —3 (úsečku) a —1 (pořadnici), dostaneme tak, že naneseme délku 3 na osu x na levo od počátku a potom sestoupíme o délku 1 pod osu x (viz obr. 3.). Abychom tento vztah mezi bodem a jeho souřadnicemi krátce vyznačili, připisujeme k označení bodu do závorky jeho souřadnice; tak na př. P_1 (—3, —1) značí obšírně: bod P_1, jenž má úsečku —3 a pořadnici —1; nebo dokonce, nemůže-li to vésti k omylům, vynecháváme zvláštní označení toho bodu a píšeme jen jeho souřadnice; na př. symbol (2, —1) znamená bod o úsečce 2 a o pořadnici —1.[1])

Souřadné osy (t. j. osa x a osa y) dělí rovinu na čtyři kvadranty (na obr. 3. označeny I, II, III, IV). Body v prvním kvadrantu (na pravo od osy y, nad osou x) mají obě souřadnice kladné; body v druhém kvadrantu (nad osou x, na levo od osy y) mají úsečku zápornou, pořadnici kladnou atd. Body na ose x mají ovšem pořadnici rovnou nule, body na ose y mají úsečku rovnou nule; počátek má obě souřadnice rovny nule.

Veďme nyní (viz obr. 4.) přímku *a* rovnoběžně s osou x ve výšce jednotkové nad osou x a přímku *b* rovnoběžně s osou y ve vzdálenosti jednotkové od osy y v pravo; osa x, osa y, přímka *a* a přímka *b* omezují vyšrafovaný čtverec; budeme se zabývati množinou bodů, jež leží uvnitř

[1]) Obdobného označení můžeme také užívat pro body na přímce (jež jsou ovšem dány *jedinou* souřadnicí): tak na př. P(2) značí bod P (na přímce), jenž má souřadnici 2 atd.

toho čtverce (bereme tedy v úvahu jen vnitřní body toho čtverce, nikoliv body na obvodě); tuto množinu označme písmenem *C*. Čtenář na první pohled vidí, že množina *C* je právě množina všech bodů, jejichž obě souřadnice jsou kladné a menší než 1.[1])

Písmenem *B* jsme označili — geometricky řečeno — množinu všech bodů na jisté úsečce, totiž množinu oněch bodů na ose číselné, jejichž souřadnice jest nezáporná a menší než 1. Množina *B* je tedy množina všech bodů na úsečce, jejíž koncové body jsou »bod 0« a »bod 1« (při čemž pravý koncový bod k množině *B* nepočítám). A nyní přijde překvapující věta: Věta 1. Množiny *B* a *C* jsou navzájem ekvivalentní.

To jest: body ve čtverci *C* dají se úplně, beze zbytku, sdružiti v páry s body úsečky *B*! Důkaz této věty není zvlášť obtížný; obsahuje však na jednom místě malou potíž početního rázu; proto nebudu zde větu 1. dokazovati, nýbrž dokáži jinou větu, která není o nic méně překvapující:

Věta 2. Množina *C* je ekvivalentní s jistou částí množiny *B*.[2])

To jest: Body ve čtverci *C* dají se sdružiti v páry s body úsečky *B* tak, že body čtverce *C* jsou všechny vyčerpány, kdežto z bodů úsečky *B* ještě některé zbudou!

Prosím čtenáře, aby laskavě na chvíli přestal vrtěti hlavou (za chvíli si ještě o této podivuhodné větě pohovoříme) a aby se mnou sledoval důkaz této věty 2. Důkaz probíhá velmi jednoduše. Každému bodu čtverce *C* přiřadíme prostě jeden zcela určitý bod úsečky *B*, a sice podle tohoto předpisu: Budiž $P\ (x,\ y)$ libovolný bod čtverce *C*, jehož souřadnice jsou čísla x a y; napišme tyto souřadnice ve tvaru nekon. deset. zlomků (ovšem v tom »dovoleném« tvaru).[3])

$$x=0\cdot a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$$
$$y=0\cdot b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \ldots$$

a přiřaďme tomuto bodu P onen bod Q úsečky *B*, jehož souřadnice jest

$$t=0\cdot a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3\ b_3 \ldots;$$

t. j., abychom dostali souřadnici bodu Q, sestrojíme nekon. deset. zlomek, který na první, třetí, páté, sedmé,... decimále má decimály čísla x a na druhé, čtvrté, šesté, osmé,... decimále má decimály čísla y. (Zlomek $0\cdot a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3\ b_3 \ldots$ jest zřejmě »dovolený« nekon. deset. zlomek; neboť kdyby byl »nedovolený«, byly by všechny jeho decimály od jisté počínajíc rovny devítce, a tedy také na př. všechny číslice $a_1, a_2, a_3, \ldots$ by od jistého místa byly rovny devítce, to znamená, že zlomek $0\cdot a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ by byl »ne-

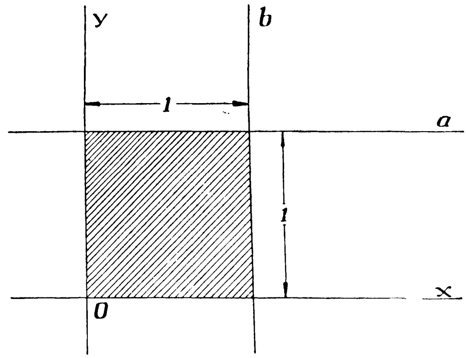
[1]) Neboť »úsečka kladná a menší než jedna« znamená, že příslušný bod leží mezi osou y a přímkou b; »pořadnice kladná a menší než jedna« znamená, že příslušný bod leží mezi osou x a přímkou a.

[2]) Okolnost, že množina *C* je podle vět 1. a 2. ekvivalentní jednak s množinou *B*, jednak s částí té množiny *B*, nemusí čtenáře příliš překvapit. Vždyť jsme již viděli, že nekonečná množina může být ekvivalentní se svou vlastní částí: na příklad množina všech celých kladných čísel je ekvivalentní s množinou všech sudých kladných čísel.

[3]) Ovšem, že před desetinou tečkou stojí nula, ježto čísla x, y jsou kladná a *menší než 1*.

Obr. 4. *Množina bodů, jejichž obě souřadnice jsou kladné a menší než 1.*

Vnitřek šrafovaného čtverce jest množina C, t. j. množina všech bodů, jejichž obě souřadnice jsou kladné a menší než 1. Přímka a je vedena rovnoběžně s osou x ve výšce jednotkové nad osou x. Přímka b je vedena rovnoběžně s osou y ve vzdálenosti jednotkové od osy y v pravo. Osa x, osa y, přímka a a přímka b omezují šrafovaný čtverec, jeho vnitřek jest množina C.



dovolený«, což je však vyloučeno, ježto jsme číslo x rozvinuli v zlomek »dovoleného« tvaru. Bod Q skutečně leží na úsečce B, ježto jeho souřadnice t je nezáporná a menší než 1.

Tak na př. bodu P o souřadnicích

$$x=0{\cdot}17432\ldots,\ y=0{\cdot}56097\ldots$$

je přiřazen bod Q o souřadnici

$$t=0{\cdot}1576403927\ldots$$

Tímto způsobem je tedy skutečně každému bodu čtverce C přiřazen jeden jediný bod úsečky B; ovšem nevíme dosud, zda při tom vyčerpáme celou množinu B čili nic (za chvíli ukážeme, že nevyčerpáme při tom celou množinu B, nýbrž jen jistou část té množiny); označme písmenem B_1 množinu oněch bodů úsečky B, které skutečně při tom přiřazení vystupují. Každému bodu čtverce C je tedy přiřazen určitý, jediný bod množiny B_1 a také naopak každý bod množiny B_1 je přiřazen nějakému bodu čtverce C (neboť B_1 je právě množina těch bodů úsečky B, které při tom přiřazení skutečně vystupují). Jenom se ještě přesvědčíme, že každý bod množiny B_1 je přiřazen j e d n o m u j e d i n é m u b o d u čtverce C. (Kdybychom to přiřazení provedli nějak nevhodně, mohlo by se ovšem státi, že by dvěma (nebo i více) různým bodům čtverce C byl přiřazen jeden a týž bod množiny B_1; t. j., že ten bod množiny B_1 by byl přiřazen několika různým bodům množiny C. Proto musíme zvlášť dokázati, že v našem případě tato možnost je vyloučena.). Chceme tedy dokázati, že žádný bod množiny B_1 není přiřazen dvěma (nebo více) různým bodům množiny C; čili chceme dokázati, že dvěma různým bodům množiny C nikdy není přiřazen jeden a týž bod množiny B_1; čili konečně: chceme dokázati, že dvěma různým bodům množiny C jsou přiřazeny vždy dva různé body množiny B_1. To ukážeme velmi snadno: Mysleme si nějaký bod $P\ (x, y)$ z čtverce C, jehož souřadnice nechť jsou

$$x=0{\cdot}\,a_1\ a_2\ a_3\ldots$$
$$y=0{\cdot}\,b_1\ b_2\ b_3\ldots$$

Bod Q z množiny B_1, jenž je přiřazen bodu P, má podle našeho předpisu souřadnici

$$t = 0{\cdot}\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots$$

Je vidět: změním-li buď souřadnici x nebo souřadnici y (nebo obě najednou), změní se aspoň jedna z číslic $a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$, t. j. změní se aspoň jedna decimála čísla t, t. j. změní se číslo t a tím i bod Q. Přejdu-li tedy od bodu P (x, y) k libovolnému jinému bodu P' (x', y') (který tedy má aspoň jednu souřadnici (po případě obě) jinou než bod P), změní se jistě i bod Q; dvěma různým bodům množiny C jsou tedy vskutku přiřazeny dva různé body množiny B_1.

Dospěli jsme tedy k tomuto výsledku: přiřadili jsme prvky množiny B_1 prvkům množiny C tak, že každému prvku (bodu) množiny C je přiřazen jeden jediný prvek množiny B_1, a naopak, každý prvek množiny B_1 je přiřazen jednomu jedinému prvku množiny C. Tím je však provedeno »spárování« množin C a B_1 ve smyslu naší definice ekvivalence: množiny C a B_1 jsou tedy navzájem ekvivalentní.

Ukážeme ještě, že množina B_1 nevyčerpává plně úsečku B; čili že množina B_1 je skutečně jen částí množiny B. Bodu P (x, y) o souřadnicích

$$x = 0{\cdot}\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$
$$y = 0{\cdot}\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$$

je přiřazen bod Q o souřadnici

$$t = 0{\cdot}\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots;$$

ježto $0{\cdot}\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ je »dovolený« zlomek, nemohou číslice $a_1, a_2, a_3, \ldots$ býti samé devítky; nemůže tedy číslo t míti na lichých desetinných místech samé devítky. Takové body množiny B, jejichž souřadnice má na všech lichých desetinných místech samé devítky, nevystupují tedy nikdy při tom přiřazení a nepatří tedy do množiny B_1. Na př. bod, jehož souřadnice jest 0·90909090... nebo bod, jehož souřadnice jest 0·919291929192..., nepatří do množiny B_1. Množina B_1 tedy vskutku neobsahuje všechny body úsečky B. (Ovšem nevyčerpali jsme tímto postupem všechny body úsečky B, jež scházejí v množině B_1. Snadnou úvahou by čtenář mohl úplně vyšetřiti, které body úsečky B scházejí v množině B_1.)

Tím je věta 2. úplně dokázána.

Věta 2. je hodně překvapující: množina C všech bodů ve čtverci dá se bod za bodem přiřaditi množině B_1, která ani nevyčerpává celou úsečku! Ať se namáháme jak chceme, nedovedeme si toto přiřazení nijak smyslově představit — a přece ten předpis byl tak jednoduchý! Ve skutečnosti ten předpis je jednoduchý jen formálně, početně, kdežto vnitřní struktura toho přiřazení je vskutku nesmírně složitá. Chtěl bych na několika řádcích tuto složitost trochu osvětliti. Vezměte tyto dva body čtverce C: bod P_1 (x_1, y_1) o souřadnicích

$$x_1 = 0{\cdot}100000000 \ldots \text{ (samé nuly)},$$
$$y_1 = 0{\cdot}100000000 \ldots \text{ (samé nuly)},$$

a bod P_2 (x_2, y_2) o souřadnicích

$$x_2=0{\cdot}099999000\ldots \text{ (samé nuly)}$$
$$y_2=0{\cdot}100000000\ldots \text{ (samé nuly).}$$

Bodu P_1 je přiřazen bod Q_1 o souřadnici

$$t_1=0{\cdot}110000000000\ldots$$

a bodu P_2 je přiřazen bod Q_2 o souřadnici

$$t_2=0{\cdot}0190909090900000000\ldots$$

Body P_1 a P_2 jsou si velmi blízko: jejich úsečky se liší jen o 0·000001, jejich pořadnice jsou dokonce stejné; ale body Q_1 a Q_2 se značně liší: neboť $t_1=0{\cdot}11$ a souřadnice t_2 je menší než 0·02; rozdíl těch souřadnic (t. j. vzdálenost bodu Q_1 od bodu Q_2) je tedy větší než 0·11—0·02=0·09. (Čtenář, kterému snad dělají poslední řádky potíže, nechť si laskavě nakreslí body Q_1 a Q_2 na osu číselnou.)

Dvěma velmi blízkým bodům ve čtverci C jsou tedy přiřazeny body značně vzdálené. A tento úkaz bychom mohli sledovat ještě dále: myslete si na př., že v souřadnici x_2 byste místo pěti devítek napsali milion devítek: vzdálenost bodů P_1 a P_2 by byla pak nesmírně malá; ale vzdálenost bodů Q_1 a Q_2 by zůstala větší než 0·09. [Neboť t_1 by se nezměnilo: $t_1=0{\cdot}11$ a číslo t_2 by zůstalo menší než 0·02; neboť t_2 by se rovnalo 0·01909090…, (kde ovšem těch skupin 90 by byl milion, a pak teprve by přišly samé nuly.)] Vidíte z toho, že dvěma nesmírně blízkým bodům čtverce C mohou býti přiřazeny dva značně od sebe vzdálené body množiny B_1; a také naopak snadno seznáte, že dvěma značně od sebe vzdáleným bodům čtverce C mohou býti přiřazeny dva nesmírně blízké body množiny B_1. [Na př. bodu P_3 (x_3, y_3) o souřadnicích

$$x_3=0{\cdot}099900\ldots \text{ (samé nuly)},\quad y_3=0{\cdot}999900\ldots \text{ (samé nuly)}$$

je přiřazen bod Q_3 (t_3) o souřadnici

$$t_3=0{\cdot}0999999900\ldots \text{ (samé nuly)}$$

a bodu P_4 (x_4, y_4) o souřadnicích

$$x_4=0{\cdot}100000\ldots \text{ (samé nuly)},\quad y_4=0{\cdot}000100\ldots \text{ (samé nuly)}$$

je přiřazen bod Q_4 (t_4) o souřadnici

$$t_4=0{\cdot}1000000100\ldots \text{ (samé nuly).}$$

Body P_3 a P_4 jsou od sebe značně vzdáleny (pořadnice se liší skoro o jedničku), kdežto vzdálenost bodů Q_3 a Q_4 činí jen 0·00000002.] To přiřazení je tedy skutečně velmi složité; kdybychom si chtěli toto přiřazení představit tak, že bychom každý bod čtverce C přenesli do příslušného (t. j. jemu přiřazeného) bodu množiny B_1, musili bychom ten čtverec roztrhat, rozbít do nejmenších částeček (t. j. jednotlivých bodů); některé velmi blízké body toho čtverce bychom musili daleko od sebe odtrhnout, jiné, značně od sebe vzdálené, bychom musili k sobě přitlačit atd. To je ostatně docela pochopitelné: čtverec je přece jen něco docela jiného než úsečka; a chceme-li tedy všechny body čtverce směstnati na úsečku (ba dokonce jen na část úsečky), musíme ten čtverec asi pořádně zohavit, roztrhat, zpřeházet, aby se nám na tu úsečku vešel.[1]) Snad těchto několik řádek pomohlo čtenáři, aby se mohl vnitřně vyrovnati s větou 2., jejíž důkaz si provedl a která přes to pouhému smyslovému názoru zůstává cizí a nepochopitelná. A k úplnému uspokojení čtenáře poznamenávám ještě toto: mohli bychom se pokusit, provésti přiřazení množin C a B_1 nějakým jiným způsobem: ale ať bychom se namáhali sebe více, nedostali bychom nikdy přiřazení o mnoho jednodušší. Dá se totiž dokázati, že není možno provésti přiřazení množin B_1 a C, které by bylo »plynulé«, které by nebylo tak zpřetrhané jako ono přiřazení, jež jsme provedli.[2])

Zdržel jsem se trochu déle u nauky o množstvích (a sice u teorie ekvivalence) a to z několika důvodů. Především začátky teorie množin týkají se pojmů tak obecných, tak základních a tak jednoduchých, že se musí v nich postupovati od začátku, bez používání nějakých složitých vět a poznatků z jiných oborů matematiky; a proto dají se tyto začátky i laikovi vyložiti. Za druhé setkali jsme se právě v těch příkladech, jež jsme probírali, s klasickými ukázkami ryzího a (aspoň podle mého vkusu) krásného uvažování matematického. A za třetí může mi teorie ekvivalence posloužiti k tomu, abych objasnil na příkladě to, co jsem řekl na samém počátku tohoto odstavce. *Viděli jste, jak definice ekvivalence* vede *téměř* bezprostředně k řadě *zajímavých výsledků; Cantor měl tedy velmi šťastnou* ruku, že ve svých úvahách vyšel právě od této definice: vidíte, jak důležitá byla v tomto případě právě formulace problému. A bylo skutečně zapotřebí geniality k tomu, aby Cantor pojem ekvivalence zavedl: vždyť tento pojem byl zásadně různý od pojmů, jež do té doby se v matematice vyskytovaly, a nebylo tedy nijak na snadě přijíti na myšlenku, že by zavedení nějakého takového pojmu mohlo podstatně přispěti k pokroku matematiky.

Důkazy, které jsme prováděli v tomto odstavci, byly poměrně jednoduché; v další výstavbě této teorie setkáváme se ovšem také s důkazy velmi složitými, ba i s problémy, jež dosud zůstaly nerozřešeny. O jednom takovém problému chci se ještě zmínit. Zabývali jsme se hlavně takovými množinami, jejichž prvky jsou čísla;[3]) takovým množinám budeme říkati množiny číselné. Množiny číselné jsou buď konečné (na př. množina všech prvočísel, jež jsou menší než padesát) nebo nekonečné. Zjistili jsme, že nejsou všechny nekonečné množiny číselné navzájem ekvivalentní; na př. množina M (t. j. množina všech celých kladných čísel) a množina B (t. j. množina všech čísel nezáporných menších než 1) nejsou navzájem ekvivalentní. Matematikové od doby Cantorovy vyšetřovali spoustu množin; ale všechny ne-

[1]) Takové »zpřeházení« množiny jsme už jednou musili provést. Množina kladných racionálních čísel je srovnána na ose číselné velmi hezky podle velikosti; ale když jsme chtěli dokázat, že tato množina je ekvivalentní s množinou všech celých kladných čísel, musili jsme racionální čísla sestavit v řadu (3), která proti původnímu pořadí podle velikosti je pořádně zpřeházena.

[2]) Matematik místo »plynulé« říká raději »spojité«; musí se ovšem napřed přesně definovati, co se rozumí slovem »spojitý.«

[3]) Vyjma ten poslední případ: prvky množiny C byly *body ve čtverci* (nebo, chceme-li, *dvojice* čísel — totiž páry souřadnic).

konečné množiny číselné, jež (co do ekvivalence) vyšetřili, byly ekvivalentní buď s množinou *M* nebo s množinou *B*. Naskytá se tedy problém (na nějž narazil již Cantor): jest skutečně každá nekonečná množina číselná ekvivalentní buď s množinou *M* nebo s množinou *B* či existuje snad nějaká — dosud neznámá — nekonečná množina číselná, která není ekvivalentní ani s množinou *M* ani s množinou *B*? Tento slavný problém (t. zv. problém kontinua) nebyl dosud rozřešen, ač patří mezi nejdůležitější problémy teorie množin.[1])

Teorie množin, jak snad již z uvedených začátků je patrno, je jistě sama o sobě závažná a zajímavá. Liší se však tolik od oněch oborů matematiky, jež čtenář asi zná ze školy, že mimoděk se čtenář zeptá: není tato nauka o množinách v matematice osamělá? Má vztahy i k jiným oborům matematiky? Mohu čtenáře ubezpečiti, že nauka o množinách vskutku pronikla nejrůznějšími obory matematiky; tak na př. v moderní nauce o funkcích (tedy v oboru svrchovaně důležitém jak pro ryzí matematiku, tak pro aplikace, hlavně pro fysiku a astronomii) umožnilo zasáhnutí nauky o množinách netušený rozvoj a neočekávané pokroky. Bohužel, nemohu se tím blíže zabývati: musil bych napsati celou obšírnou nauku o funkcích, kdybychom zde chtěli sledovati souvislost těchto oborů.

9. *Závěr.* Než skončím, chtěl bych se s čtenářem, který to až sem vydržel (a jemuž děkuji za jeho trpělivost), rozloučiti ještě několika slovy.

Z ohromné rozmanitosti problémů a metod, jež matematika poskytuje, mohl jsem vybrati jenom několik drobtů, ale i z těch snad čtenář mohl poznat, jak bezmezná a nevyčerpatelná matematika je. Na př. v předešlém odstavci čtenář viděl, jak pouhá vhodná definice pojmu »ekvivalence« vede ihned k dlouhé řadě zajímavých problémů (z nichž jsme ovšem jen nepatrnou část probrali); a tak to bývá v matematice často, ba snad ve většině případů: rozřešený problém vede často k novým problémům a novým pojmům, jež samy zase nutí k vytvoření nových partií matematiky. Kdyby všichni lidé na světě byli matematicky nadáni a pustili se do matematiky, měli by asi celý život co dělat; a na konci života by asi shledali, že počet neřešených problémů se jejich prací nezmenšil, nýbrž naopak zvětšil.

Ale teď mi čtenář může položiti ještě jednu otázku, na kterou bych rád odpověděl. Každá matematická pravda má svou vnitřní cenu jakožto část souhrnu lidského poznání; jsou však v matematice některé obory (na př. široké části nauky o funkcích), které vedle své vnitřní hodnoty mají i bezprostřední veliký význam pro aplikace (na př. pro fysiku), kdežto na druhé straně jsou v matematice obory, které — aspoň dosud — nemají přímého vztahu k aplikacím. Když tedy matematika poskytuje takové nepřeberné množství problémů, nebylo by snad dobře, kdyby se matematikové zabývali právě těmi problémy, jež aplikace nutně potřebují (nebo jež budou pravděpodobně brzo potřebovati) a kdyby odložili zatím problémy ostatní?

[1]) V tom problému se výslovně omezujeme na množiny *číselné;* když připustíme také jiné množiny (t. j. množiny, jejichž prvky nejsou čísla), můžeme snadno sestrojiti nekonečnou množinu, jež není ekvivalentní ani s množinou M ani s množinou B.

Myslím, že mohu odpověděti asi takto: je ovšem dobře, existují-li matematikové, kteří přihlížejí při své práci k potřebám aplikací; je však nutno, aby existovali také matematikové, kteří se zabývají též ostatními, pro aplikace zdánlivě bezvýznamnými obory. Nejlépe to snad osvětlím na příkladě. Vynikající dánský matematik Harald Bohr zabýval se (okolo r. 1910) teorií prvočísel (a sice problémem C z odstavce 4.), tedy problémem, jenž s aplikacemi zdánlivě vůbec nesouvisí. Při tom byl nucen zabývati se jistou funkcí, tak zvanou »*funkcí* ζ«, a zjistil jednu zajímavou vlastnost té funkce. Sledoval tuto vlastnost dále a po dlouhých oklikách přišel na to (okolo roku 1925), že tato vlastnost charakterisuje jednu obecnou a důležitou třídu funkcí; tyto funkce nazval Bohr »skoro periodickými« a vybudoval jejich teorii. Některé speciální případy těchto funkcí skoro periodických vyskytly se již dříve, před Bohrem, v některých astronomických problémech a někteří vynikající matematikové se jimi proto již před Bohrem zabývali; nepodařilo se jim však vytvořiti teorii tak dokonalou, obecnou a jednoduchou, jako vytvořil Bohr. Proč? Myslím, že asi z tohoto důvodu: oni matematikové přistoupili k vyšetřování těch funkcí jaksi z vnějšího popudu: astronomie položila jim otázku a oni se snažili vynutiti na matematice odpověď. Kdežto Bohr byl na tyto funkce přiveden přirozenější cestou: jeho matematické úvahy, ač vyšly z oboru velmi vzdáleného, vedly ho přirozeně, nenásilně (ovšem s pomocí jeho vynikajícího nadání) až k obecné teorii funkcí skoro periodických. Je vidět snad z tohoto příkladu, že matematika se často lépe rozvíjí, ponechá-li se svému přirozenému vývoji, než snažíme-li se její vývoj v některých částech cizími popudy zvenčí uměle urychlit.[1]) Matematika je právě živý organismus, jehož nejodlehlejší části souvisejí spolu pevnými pouty; pouze tehdy, vyvíjejí-li se harmonicky všechny její části, může matematika zvyšovati jak svou vnitřní sílu a obsažnost, tak také účinnost svého působení na venek, kterým přispívá k pokroku ostatních částí lidského vědění.

[1]) Tím ovšem nechci nikterak popírati, 1.) že matematika vděčí za mnohé své velmi důležité obory (zvláště v nauce o funkcích) přímému popudu z aplikací, 2.) že je důležito, aby se matematikové snažili nalézti odpověď na otázky, jež se v aplikacích vyskytují.