Vojtěch Jarník

Sur le théoréme de Minkowski dans la gémoetrie des nombres

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1946, 171-185

Sur le théorème de Minkowski dans la géométrie des nombres.

Par

VOJTĚCH JARNÍK et VLADIMÍR KNICHAL.

Présenté le 30 décembre 1943.

Soit donné un nombre naturel r. Le mot „ensemble" signifie toujours un ensemble de points dans l'espace euclidien à r dimensions. On va désigner les points de cet espace par les grotesques x, y etc., par exemple $\mathsf{x} = [\xi_1, \ldots, \xi_r]$, $\mathsf{y} = [\eta_1, \ldots, \eta_r]$, où $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont les coordonnées du point x. Le symbole o signifie l'origine $[0, \ldots, 0]$. Les caractères latins minuscules signifient les nombres entiers. Les caractères grecs minuscules signifient les nombres réels. On pose $\lambda_1\mathsf{x} + \lambda_2\mathsf{y} = [\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\eta_1, \ldots, \lambda_1\xi_r + \lambda_2\eta_r]$. Les points $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_m$ $(m \geqq 1)$ sont dits indépendants si l'on a $\lambda_1\mathsf{x}_1 + \ldots + \lambda_m\mathsf{x}_m = \mathsf{o} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ (le symbole $A \Rightarrow B$ signifie que A entraîne B). N étant un ensemble, αN signifie l'ensemble de tous les points $\alpha\mathsf{x}$, où $\mathsf{x} \in N$. Le symbole $\mu(N)$ signifie la mesure lebesguienne extérieure et $J(N)$ la mesure intérieure de l'ensemble N; c'est-à-dire $J(N)$ est la borne supérieure des nombres $\mu(M)$ pour tous les ensembles mesurables $M \subset N$. Ajoutons quelques notions et quelques remarques soit évidentes, soit connues. On va les numéroter par **P1**, **P2**, ...

P1. Soit N un ensemble, soit s un point. Si l'on a $\mathsf{x} \in N \Rightarrow 2\mathsf{s} - \mathsf{x} \in N$ on dit que N possède le centre s.

P2. Si l'on a $\mathsf{x} = [\xi_1, \ldots, \xi_r]$, $0 < \delta < +\infty$, désignons par $K(\mathsf{x}, \delta)$ l'ensemble de tous les points $[\eta_1, \ldots, \eta_r]$ tels que $|\eta_j - \xi_j| \leqq \delta$ pour $j = 1, \ldots, r$.

P3. L'ensemble N est dit convexe, si $\mathsf{x} \in N$, $\mathsf{y} \in N$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entraîne $\lambda_1\mathsf{x} + \lambda_2\mathsf{y} \in N$. N étant convexe, il en est de même de sa fermeture $\overline{N}$ et de son intérieur $N^{(0)}$. L'ensemble $N^{(0)}$ est en même temps l'intérieur de l'ensemble $\overline{N}$. *Si* $\mathbf{o}$ est un point intérieur d'un ensemble convexe N, on a $\alpha\overline{N} \subset \beta N^{(0)}$ pour $0 < \alpha < \beta$.

P4. Le symbole $\mathfrak{L}(N)$ signifie le plus petit ensemble convexe contenant l'ensemble N, c'est-à-dire l'intersection de tous les ensembles convexes contenant l'ensemble N. Le symbole $\mathfrak{K}(N)$ va signifier la fermeture de l'ensemble $\mathfrak{L}(N)$, le symbole $\mathfrak{G}(N)$ désigne ensuite l'intérieur de l'ensemble $\mathfrak{L}(N)$, donc (voir **P3**) l'intérieur de l'ensemble $\mathfrak{K}(N)$.

P5. L'ensemble $\mathfrak{L}(N)$ est l'ensemble de tous les points $\mathbf{x}$, jouissants de la forme suivante:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{u}_j, \text{ où } m \geqq 1,\ \lambda_j > 0,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1,\ \mathbf{u}_j \in N.\text{[1]} \tag{1}$$

P6. Le symbole $\mathfrak{B}(N)$ va signifier l'ensemble de tous les points $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ où $\mathbf{y} \in N$, $\mathbf{z} \in N$. L'ensemble $\mathfrak{B}(N)$ possède évidemment le centre $\mathbf{o}$; si N provient d'un ensemble M par une translation, on a $\mathfrak{B}(N) = \mathfrak{B}(M)$. Si N est un ensemble ouvert resp. convexe, $\mathfrak{B}(N)$ est lui-même aussi ouvert resp. convexe.

P7. Définissons par induction: $\mathfrak{B}^0(N) = N$, $\mathfrak{B}^{n+1}(N) = \mathfrak{B}(\mathfrak{B}^n(N))$ pour $n \geqq 0$. Si N possède le centre $\mathbf{o}$, on a $N \subset \frac{1}{2}\mathfrak{B}(N)$. L'ensemble $\mathfrak{B}^n(N)$ possédant pour $n \geqq 1$ toujours le centre $\mathbf{o}$ (voir **P6**), on a $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N) \subset \subset \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{B}^{n+1}(N)$ pour chaque N et pour chaque $n \geqq 1$.

P8. Si N est un ensemble convexe au centre $\mathbf{o}$, on a $N = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(N)$ et donc $N = \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ pour chaque $n \geqq 0$.

P9. L'ensemble $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ est (pour $n \geqq 1$) l'ensemble de tous les points jouissants de la forme suivante:

$$\frac{1}{2^n}(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_{2^{n-1}} - \mathbf{y}_1 - \ldots - \mathbf{y}_{2^{n-1}}),\ \mathbf{x}_j \in N,\ \mathbf{y}_j \in N. \tag{2}$$

Si N possède le centre $\mathbf{o}$, on a $\mathbf{y}_j \in N \Rightarrow -\mathbf{y}_j \in N$; donc $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$ est dans ce cas l'ensemble de tous les points jouissants de la forme suivante:

$$\frac{1}{2^n}(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_{2^n}),\ \mathbf{x}_j \in N. \tag{3}$$

P10. Démontrons la relation suivante: $\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N)) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}(N))$. Le second membre est l'ensemble de tous les points de la forme

[1]) Au lieu de $\lambda_j > 0$ on peut également écrire $\lambda_j \geqq 0$.

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) + \ldots + \lambda_m(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m),\ \lambda_j \geqq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1,\quad \mathbf{x}_j \in N,\ \mathbf{y}_j \in N, \tag{4}$$

le premier membre est l'ensemble de tous les points de la forme

$$\begin{gathered} \varrho_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \varrho_p\mathbf{v}_p - \sigma_1\mathbf{w}_1 - \ldots - \sigma_q\mathbf{w}_q, \\ \varrho_j \geqq 0,\ \varrho_1 + \ldots + \varrho_p = 1,\ \sigma_j \geqq 0,\ \sigma_1 + \ldots + \sigma_q = 1, \\ \mathbf{v}_j \in N,\ \mathbf{w}_j \in N. \end{gathered} \tag{5}$$

[voir **P5** et la remarque [1]]. Chaque point (4) possède évidemment la forme (5). D'autre part, le point (5) (exprimé par la somme de $p + q$ termes) étant donné, écrivons l'expression $\varrho_1\mathbf{v}_1 - \sigma_1\mathbf{w}_1$ sous la forme $\varrho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1) - (\sigma_1 - \varrho_1)\,\mathbf{w}_1$ (pour $\sigma_1 \geqq \varrho_1$) ou sous la forme $\sigma_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1) + (\varrho_1 - \sigma_1)\,\mathbf{v}_1$ (pour $\sigma_1 < \varrho_1$). L'expression (5) change de cette manière-ci dans une autre qui ne contient hors du membre „arrangé" $\varrho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1)$ ou $\sigma_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1)$ que $p + q - 1$ autres membres. En continuant ainsi on obtient enfin une expression de la forme (4).

P11. En utilisant les résultats de **P10**, montrons que $\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(N)) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{B}(N))$. Si l'on a $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}(N))$, on a $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, où $\mathbf{y} \in \mathfrak{K}(N)$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{K}(N)$, donc $\mathbf{y} = \lim \mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_n \in \mathfrak{L}(N)$, $\mathbf{z} = \lim \mathbf{z}_n$, $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{L}(N)$, $\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n \in \mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N)) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}(N))$, donc $\mathbf{x} = \lim (\mathbf{y}_n - \mathbf{z}_n) \in \mathfrak{K}(\mathfrak{B}(N))$.

P12. Chaque ensemble convexe est mesurable. Si $J(N) > 0$, $\mathfrak{L}(N)$ contient un certain cube[2] $K(\mathbf{a}, \delta)$, donc $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N))$ contient le cube $K(\mathbf{o}, \delta)$. Si, en outre, N n'est pas borné, l'ensemble convexe[3] $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N))$ contient hors du cube $K(\mathbf{o}, \delta)$ aussi des points arbitrairement éloignés de l'origine ce qui entraîne $\mu(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(N)) = + \infty$.

P13. Si $\mathfrak{K}(N)$ possède le centre $\mathbf{o}$ et si $J(N) > 0$, il s'ensuit[4] $\mathfrak{K}(N) = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(N))$ et l'on en tire selon **P12**, **P3** que $\alpha\mathfrak{K}(N) \subset \beta\mathfrak{G}(N) \subset \beta\mathfrak{L}(N)$ pour $0 < \alpha < \beta$.

P14. Un théorème bien connu de la théorie des corps convexes affirme: Soit N un ensemble convexe fermé, $0 < \mu(N) < + \infty$. On a ensuite $\mu(N) \leqq \mu(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(N))$ et le signe d'égalité est valable si N possède un centre et dans ce cas seulement.[5])

Passons maintenant au sujet principal de cette note.

A chaque ensemble N, nous faisons correspondre $3r$ nombres $\tau_j(N)$, $\tau_j'(N)$, $\tau_j''(N)$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) de la manière suivante:

$\left\{\begin{matrix} \tau_j\ (N) \\ \tau_j'\ (N) \\ \tau_j''\ (N) \end{matrix}\right\}$ est la borne inférieure de tous les nombres $\alpha > 0$ pour lesquels

---

[2]) En effet, il n'est pas possible que tous les points de l'ensemble N se trouvent dans le même plan à $(r - 1)$ dimensions.

[3]) Voir **P6**.

[4]) Voir **P8**.

[5]) Voir par exemple BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, page 105.

l'ensemble $\left\{\begin{array}{c}\Pi\beta N\\ {\scriptstyle \alpha\leqq\beta<+\infty}\\ \alpha N\\ \Sigma\beta N\\ {\scriptstyle 0<\beta\leqq\alpha}\end{array}\right\}$ contient au moins j points à coordonnées entières indépendants.[6])

P15. Evidemment on a $0 \leqq \tau_1(N) \leqq \tau_2(N) \leqq \ldots \leqq \tau_r(N) \leqq +\infty$ et les relations analogues pour τ'_j, τ''_j. On a ensuite $\tau''_j(N) \leqq \tau'_j(N) \leqq \tau_j(N)$. Si $\alpha N \subset \beta N$ pour $0 < \alpha < \beta$, on a évidemment $\tau_j(N) = \tau'_j(N) = \tau''_j(N)$. Ce cas se présente par exemple dans le cas où N est un ensemble convexe contenant $\mathbf{o}$. Mais, si p. ex. l'ensemble N se compose (pour $r = 2$) de deux points $[1, 0]$, $[0, 2^{-\frac{1}{2}}]$, on a $\tau_1 = \tau_2 = +\infty$, $\tau'_1 = 1$, $\tau'_2 = +\infty$, $\tau''_1 = 1$, $\tau''_2 = \sqrt{2}$.

P16. Pour $A \subset B$ on a évidemment $\tau_j(A) \geqq \tau_j(B)$; donc, par exemple,

$$\tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)\right) \geqq \tau_j\left(\frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{B}^{n+1}(N)\right)$$

pour $n \geqq 1$ (voir **P7**); on a ensuite $\tau_j(\alpha A) = \alpha^{-1}\tau_j(A)$ pour $\alpha > 0$. Donc (voir aussi **P13**): Si $J(N) > 0$ et si $\mathfrak{K}(N)$ possède le centre $\mathbf{o}$, on a $\tau_j(\mathfrak{K}(N)) = \tau_j(\mathfrak{G}(N))$. On a des résultats analogues pour τ'_j, τ''_j.

P17. Le théorème de Minkowski dans la géométrie des nombres dit: Soit A un ensemble convexe fermé et borné au centre $\mathbf{o}$, $J(A) > 0$. Ensuite on a[7])

$$\tau''_1(A) \ldots \tau''_r(A)\, J(A) \leqq 2^r. \tag{6}$$

P18. Dans **P17** on peut supprimer le mot „fermé". Soit donc A un ensemble convexe borné au centre $\mathbf{o}$, $J(A) > 0$. J'affirme que la relation (6) est vraie. En effet on a (d'après **P4**) $\mathfrak{G}(A) \subset \mathfrak{L}(A) = A \subset \mathfrak{K}(A)$, d'où (voir aussi **P16**) on a $\tau''_j(\mathfrak{K}(A)) = \tau''_j(\mathfrak{G}(A)) = \tau''_j(A)$. D'après **P17** on a $\tau''_1(\mathfrak{K}(A)) \ldots \tau''_r(\mathfrak{K}(A))\, J(\mathfrak{K}(A)) \leqq 2^r$ d'où l'on voit aussitôt que l'inégalité (6) est satisfaite.

P19. Dans **P17**, **P18** on peut (d'après **P15**) écrire τ'_j ou τ_j au lieu de τ''_j. L'exemple $A = K(\mathbf{o}, 1)$ ($\tau_j(A) = 1$, $J(A) = 2^r$) montre que 2^r est la meilleure valeur admissible dans (6).

Si A ne satisfait pas aux conditions données dans **P17**, **P18**, le premier membre dans (6) peut prendre des valeurs aussi grandes comme on veut. Mais, si l'on remplace les nombres $\tau''_j(A)$ par les nombres $\tau''_j(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A))$, on obtient pour un ensemble tout-à-fait arbitraire une inégalité analogue à (6):

---

[6]) On pose $+\infty$ pour la borne inférieure de l'ensemble vide.

[7]) Voir p. ex. H. Davenport, Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body, Quart. Journ. Math., Oxford Ser. 10 (1939), 119—121.

Théorème 1. *Soit $J(A) > 0$. Alors on a*

1° $$\tau_r''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) < +\infty.$$

2° $$\tau_1''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 0 \textit{ pour } J(A) = +\infty,$$

$$\tau_1''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \ldots \tau_r''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A))\, J(A) \leqq 2^{2r-1} \textit{ pour } J(A) < +\infty. \tag{7}$$

La dernière inégalité peut être précisée pour $J(A) < +\infty$ comme il suit. Si $\tau_1''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \neq 0$, choisissons des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ finis de manière que

$$0 < \mu_j \leqq \tau_j''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \text{ et que } \frac{\mu_2}{\mu_1}, \frac{\mu_3}{\mu_2}, \ldots, \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}$$

soient des nombres entiers. Alors on a

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r J(A) \leqq 2^r. \tag{8}$$

Un théorème un peu moins précis a été démontré par Jarník.[8]) Il ne démontre pas (8), mais seulement (7), et il ne considère que des ensembles A compacts (bornés et fermés). En outre — et c'est la restriction la plus essentielle — $J(A)$ signifie chez Jarník la mesure intérieure de Jordan et pas celle de Lebesgue. Toutes les restrictions mentionnées, à l'exception de la dernière, peuvent être aisément supprimées à l'aide de la méthode originale de Jarník. Seulement pour remplacer la mesure de Jordan par celle de Lebesgue il faut employer une autre méthode que nous allons développer ici et qui est due a Knichal.

Remarquons[9]) que (7) est une conséquence immédiate de l'inégalité $\tau_r'' < +\infty$ et de (8). En effet, en supposant $\tau_1'' > 0$ (le cas $\tau_1'' = 0$ est banal) et en définissant les nombres entiers k_j $(j = 1, \ldots, r)$ par les inégalités $\tau_1'' \cdot 2^{k_j} \leqq \tau_j'' < \tau_1'' \cdot 2^{k_j+1}$ on voit que l'on peut poser, dans (8), $\mu_j = \tau_1'' 2^{k_j}$; en observant que $\mu_1 = \tau_1''$, $\tau_j'' < 2\mu_j$ pour $j > 1$, on obtient (7).[10])

Si A est convexe au centre **o** on a $A = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)$. Donc, si l'on pouvait remplacer le second membre dans (7) par 2^r, **P17** et **P18** en seraient des conséquences immédiates. Mais ceci n'est pas possible comme le montre le théorème suivant, du à Knichal:

Théorème 2. *Soit T_r la borne supérieure de tous les nombres*

$$\tau_1''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \ldots \tau_r''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \,.\, J(A), \tag{9}$$

où A parcourt tous les ensembles tels que $0 < J(A) < +\infty$. Alors

---

[8]) Dvě poznámky ke geometrii čísel, Věstník Kr. Čes. spol. nauk, 1941.

[9]) Ecrivons, pour abréger, τ_j'' au lieu de $\tau_j''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A))$.

[10]) M. C. A. Rogers, dans une note pas encore publiée, a réussi à remplacer, dans le Théorème 1, le nombre 2^{2r-1} par $2^{\frac{1}{2}(3r-1)}$ et les τ_j'' par les τ_j'. C'est pourquoi nous supprimons ici un théorème contenu dans le texte tchèque de cette note, suivant lequel le nombre 2^{2r-1} dans (7) peut être remplacé par $2^{2r-2}\sqrt{2}$, si $r > 1$. (Note ajoutée le 26 octobre 1947.)

$$T_r \geqq 2^r \,.\, \operatorname*{Max}_{1 \leqq \eta \leqq 2} \frac{1}{\eta}\,(2-(2-\eta)^r), \tag{10}$$

donc[11]) $T_r > 2^r$ *pour* $r > 1$, *p. ex.*

$$T_2 \geqq 4 \,.\, 2^{-\frac{1}{2}}(2-(2-\sqrt{2})^2) = 4(4-2\sqrt{2}).$$

Théorème 2 montre que l'on ne ne peut pas remplacer le second membre de (7) par 2^r. Mais, à l'aide de l'itération de l'opération $\mathfrak{B}$, on parvient au théorème suivant.[12])

Théorème 3. *Soit* $0 < J(A) < +\infty$. *Il existe alors un* n_0 *tel que l'on a*

$$\tau_1\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) \ldots \tau_r\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) J(A) \leqq 2^r \tag{11}$$

pour chaque $n \geqq n_0$. *D'une manière plus précise:*

Théorème 4. *Soit* $0 < J(A) < +\infty$. *Alors, ou bien il existe un* n_0 *tel que pour chaque* $n \geqq n_0$ *le premier membre dans* (11) *est plus petit que* 2^r *ou bien on a*

$$\begin{aligned} &\tau_1''\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) \ldots \tau_r''\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) J(A) = \\ &= \tau_1\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) \ldots \tau_r\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) J(A) = 2^r \end{aligned} \tag{12}$$

pour chaque $n > 0$.

Pour que le second cas ait lieu, il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient remplies:

1°. *A est borné.*

2°. *$\mathfrak{K}(A)$ possède un centre.*

3°. $\mu(\mathfrak{K}(A) - A) = 0$.[13])

4°. *C étant l'ensemble au centre* **o** *qui est formé de $\mathfrak{K}(A)$ par une translation*[14]) *on a*

$$\tau_1(C) \ldots \tau_r(C)\,\mu(C) = 2^r. \tag{13}$$

Le théorème 4 est une conséquence du

Théorème 5. *Soit* $J(A) > 0$. *On a alors les faits suivants:*

1°

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} \tau_j''\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) = \lim_{n\to\infty} \tau_j\left(\frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(A)\right) < +\infty \tag{14}$$

pour $j = 1, \ldots, r$. *Désignons cette limite par* $T_j(A)$.

---

[11]) Car l'expression $\eta^{-1}(2-(2-\eta)^r)$ possède, au point $\eta = 1$, la valeur 1 et une dérivée positive (égale à $r-1$).

[12]) Les théorèmes 3, 4, 5 sont dus à Jarník.

[13]) A est donc mesurable.

[14]) Il s'agit donc de la translation qui transforme le centre de l'ensemble $\mathfrak{K}(A)$ dans le point **o**. L'ensemble C est naturellement convexe, borné, fermé, $\mu(C) = \mu(\mathfrak{K}(A)) = J(A)$.

2°. *Si A est borné, on a $T_j(A) > 0$ pour $j = 1, \dots, r$ et*

$$T_1(A) \dots T_r(A) \,.\, J(A) \leqq 2^r. \tag{15}$$

Le signe d'égalité dans (15) *est valable si les suppositions* 2, 3, 4 *du théorème* 4 *sont remplies et dans ce cas seulement.*

3°. *Si A n'est pas borné, on a $T_1(A) = 0$.*

Considérons un cas particulier du théorème 4: *Soit A un ensemble convexe, fermé, borné, $J(A) > 0$. On a ensuite*

$$\tau_1(\tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(A)) \dots \tau_r(\tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(A))\, J(A) \leqq 2^r. \tag{16}$$

Si A ne possède pas un centre, on a le signe $<$ dans (16).

Démonstration: $\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$ étant convexe au centre $\mathbf{o}$ (voir **P6**), on a d'après **P8** $\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A) = \dfrac{1}{2^n}\mathfrak{V}^n(A)$ pour chaque $n \geqq 1$ et notre thèse est une conséquence du théorème 4.

Soit enfin A convexe, fermé, borné au centre $\mathbf{o}$, $J(A) > 0$. On a donc (voir **P8**) $A = \frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$ et le théorème de Minkowski (voir **P17**) est donc une conséquence de (16).

Lemme 1. *Soit $\mu(\mathfrak{K}(A) - A) = 0$*[15]) *et supposons que $\mathfrak{K}(A)$ possède le centre $\mathbf{o}$. On a ensuite $\mathfrak{G}(A) \subset \frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}(A)$. Alors, il existe un $\delta > 0$ tel que $K(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathfrak{G}(A) \subset \mathfrak{K}(A)$. D'après la supposition on a donc $\mu(A \,.\, K(\mathbf{x}, \delta)) = (2\delta)^r$. Le point $\mathbf{y}$ parcourant l'ensemble $A \,.\, K(\mathbf{x}, \delta)$, le point $\mathbf{z} = \mathbf{y} - 2\mathbf{x}$ parcourt un certain ensemble B de mesure $(2\delta)^r$ qui est situé dans le cube $K(-\mathbf{x}, \delta)$. Puisque $\mathfrak{K}(A)$ possède le centre $\mathbf{o}$ et puisque $K(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathfrak{K}(A)$, on a aussi $B \subset K(-\mathbf{x}, \delta) \subset \mathfrak{K}(A)$. Vu que $\mu(B) > 0$, B contient d'après la supposition un point $\mathbf{z} \in A$; mais $\mathbf{z} = \mathbf{y} - 2\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$, donc $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \in \frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$.

Lemme 2. *Soit N un ensemble mesurable dont tous les points sont ses points de densité. Alors $\mathfrak{V}(N)$ est un ensemble ouvert.*

Démonstration. Soit $\mathbf{z} \in \mathfrak{V}(N)$, donc $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in N$, $\mathbf{y} \in N$. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ étant points de densité de l'ensemble N, il existe un nombre $\delta > 0$ jouissant de la propriété suivante: Pour $0 < \varepsilon < \delta$ on a

$$\mu(N \,.\, K(\mathbf{x}, \varepsilon)) > (2\varepsilon)^r (1 - 2^{-r-1}), \quad \mu(N \,.\, K(\mathbf{y}, \varepsilon)) > (2\varepsilon)^r (1 - 2^{-r-1}). \tag{17}$$

J'affirme que $K(\mathbf{z}, \frac{1}{4}\delta) \subset \mathfrak{V}(N)$, ce qui va achever la démonstration. Soit donc $\mathbf{z}_1 \in K(\mathbf{z}, \frac{1}{4}\delta)$. Si $\mathbf{z}_1$ n'appartenait pas à $\mathfrak{V}(N)$, on pourrait conclure comme il suit: Si $\mathbf{x}_1 \in N \,.\, K(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\delta)$, on a $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1$ non $\in N$ et en même temps naturellement $\mathbf{y}_1 \in K(\mathbf{y}, \frac{1}{2}\delta)$. Si $\mathbf{x}_1$ parcourt l'ensemble $N \,.\, K(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\delta)$, le point $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1$ parcourt un ensemble de mesure $\mu(N \,.\, K(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\delta)) > (\frac{1}{2}\delta)^r (1 - 2^{-r-1})$ [voir (17)]. On a donc $\mu(N \,.\, K(\mathbf{y}, \frac{1}{2}\delta)) < \delta^r - (\frac{1}{2}\delta)^r (1 - 2^{-r-1}) < \delta^r(1 - 2^{-r-1})$ ce qui est en contradiction avec (17).

---

[15]) Donc A est mesurable.

Lemme 3. *Soit N un ensemble au centre* $\mathbf{o}$. *Le point* $\mathbf{o}$ *soit un poin intérieur de l'ensemble N. Pour $0 < \varepsilon < 1$ désignons par le symbole $\mathfrak{K}_\varepsilon$ l'intersection de l'ensemble $(1-\varepsilon)\,\mathfrak{K}(N)$ avec le cube $K\left(\mathbf{o}, \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. $\mathfrak{K}_\varepsilon$ est donc un ensemble convexe, borné. J'affirme: Si $0 < \varepsilon < 1$, il existe un $n > 0$ tel que*

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \subset \frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(N). \tag{18}$$

Démonstration. Supposons que notre thèse ne soit pas vraie pour un certain $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$. Alors à chaque $n > 0$ il existe un point

$$\mathbf{v}_n \in \mathfrak{K}_\varepsilon - \frac{1}{2^n}\,\mathfrak{B}^n(N). \tag{19}$$

Il existe un point limite $\mathbf{v}$ de la suite $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$; on a $\mathbf{v} \in \mathfrak{K}_\varepsilon$, donc $\mathbf{v} \in (1-\varepsilon)\,\mathfrak{K}(N) \subset \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\mathfrak{L}(N)$ (voir **P13**). Il existe un $\delta > 0$ tel que $K(\mathbf{o}, \delta) \subset N$. On a ensuite d'après **P5**

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{z}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{z}_m, \\ \text{où } \mathbf{z}_j \in N,\ \lambda_j > 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon. \end{cases} \tag{20}$$

Choisissons un nombre entier $p > 0$ tel que

$$\mathbf{z}_j \in K\left(\mathbf{o}, \frac{2^{p-2}\varepsilon\delta}{m}\right),\quad \lambda_j > \frac{1}{2^p}\ (j = 1, \ldots, m). \tag{21}$$

J'affirme que

$$K\left(\mathbf{v}, \frac{\delta}{2^{p+1}}\right) \subset \frac{1}{2^p}\,\mathfrak{B}^p(N). \tag{22}$$

Soit donc $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{x} \in K\left(\mathbf{v}, \dfrac{\delta}{2^{p+1}}\right)$, c'est-à-dire $\mathbf{x} \in K\left(\mathbf{o}, \dfrac{\delta}{2^{p+1}}\right)$. Il existe [d'après (21)] m nombres $k_j > 0$ tels que

$$\lambda_j = \frac{k_j}{2^p} + \frac{\vartheta_j}{2^p},\ 0 \leqq \vartheta_j < 1\ (j = 1, \ldots, m). \tag{23}$$

Posons $q = 2^p - (k_1 + \ldots + k_m)$, ce qui donne

$$q \geqq 2^p(1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_m) = 2^{p-1}\varepsilon. \tag{24}$$

Choisissons maintenant 2^p points $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2^p}$ de la manière suivante [les indices étant compliqués, on écrit par exemple $\mathbf{u}(j)$ au lieu de $\mathbf{u}_j$]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}(1) = \mathbf{u}(2) = \ldots = \mathbf{u}(k_1) = \mathbf{z}_1, \\ &\mathbf{u}(k_1 + 1) = \ldots = \mathbf{u}(k_1 + k_2) = \mathbf{z}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{u}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} + 1) = \ldots = \mathbf{u}(k_1 + \ldots + k_m) = \mathbf{z}_m, \\ &\mathbf{u}(k_1 + \ldots + k_m + 1) = \ldots = \mathbf{u}(2^p) = \frac{1}{q}\left(\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \mathbf{z}_j + 2^p \mathbf{x}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

On a [voir (20), (23), (25)]

$$(26) \qquad \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{x} = \frac{1}{2^p}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_{2^p}).$$

On a $\mathbf{u}_j \in N$ pour $j \leqq 2^p - q$; pour $j > 2^p - q$ on a ensuite

$$(27) \qquad \mathbf{u}_j = \frac{1}{q}\left(\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \mathbf{z}_j + 2^p \mathbf{x}\right) \in K\left(\mathbf{0}, \frac{m}{q} \cdot \frac{2^{p-2}\varepsilon\delta}{m} + \frac{2^p}{q} \cdot \frac{\delta}{2^{p+1}}\right)$$

donc [voir (24)] $\mathbf{u}_j \in K(\mathbf{0}, \delta)$, donc de nouveau $\mathbf{u}_j \in N$. On a (d'après (26) et d'après **P9**) $\mathbf{w} \in \frac{1}{2^p}\mathfrak{B}^p(N)$ ce qui démontre (22).

Mais, d'après la définition du point $\mathbf{v}$ il existe un nombre $n \geqq p$ tel que $\mathbf{v}_n \in K\left(\mathbf{v}, \frac{\delta}{2^{p+1}}\right)$; par conséquent on a d'après (22)

$$\mathbf{v}_n \in \frac{1}{2^p}\mathfrak{B}^p(N) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(N)$$

(voir **P7**) ce qui est en contradiction avec (19).

Lemme 4. *Soit $J(A) > 0$; on a ensuite*

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} \tau_j''\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) = \lim_{n\to\infty} \tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) = \tau_j\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{B}(A))\right) =$$
$$= \tau_j\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A))\right) < +\infty$$

pour $j = 1, \ldots, r$.

Démonstration. Posons $\frac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{B}(A)) = B$; c'est un ensemble convexe au centre $\mathbf{0}$, donc (voir **P8**) $\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(B) = B$. Puisque $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A) \subset B$ on obtient

$$(28) \qquad \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{B}^{n+1}(A) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(B) = B$$

pour $n \geqq 0$; on a donc pour $n \geqq 1$ (voir **P16, P15**)

$$(29) \qquad \tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \geqq \tau_j''\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right) \geqq \tau_j''(B) = \tau_j(B).$$

Puisque $J(A) > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que (voir **P12, P11**)

$$(30) \qquad K(\mathbf{0}, \delta) \subset \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A)) \subset B,$$

donc on a nécessairement

$$(31) \qquad \tau_j(B) \leqq \tau_j(K(\mathbf{0}, \delta)) = \frac{1}{\delta} < +\infty.$$

Soit donné enfin un j $(1 \leqq j \leqq r)$ et un nombre α quelconque tel que $\tau_j(B) < \alpha < +\infty$. Choisissons α' de manière que $\tau_j(B) < \alpha' < \alpha$. Alors, l'ensemble $\alpha' B$ contient j points à coordonnées entières $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$ indépendants.

Il existe un ensemble mesurable $A_1 \subset A$ tel que $\mu(A_1) > 0$. A_2 étant l'ensemble de tous les points de densité de l'ensemble A_1, on a $\mu(A_1 - A_2) = 0$, $\mu(A_2) = \mu(A_1) > 0$ et tous les points de l'ensemble A_2 sont ses points de densité. $\mathfrak{V}(A_2)$ est d'après le lemme 2 ouvert et naturellement non vide, donc l'ensemble $\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$ contient un certain cube[16] $K(\mathbf{a}, \delta)$, donc l'ensemble $\frac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)$ (ayant le centre $\mathbf{o}$) contient le cube $K(\mathbf{o}, \delta)$. Puisque $\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A) \subset \subset \frac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A) \subset B$ (voir (28) et **P7**) on a $\mathfrak{K}(\frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)) \subset \mathfrak{K}(\frac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)) \subset \mathfrak{K}(B)$. Mais le premier et le troisième de ces ensembles est B (en effet, B est un ensemble fermé et convexe), donc

$$\mathfrak{K}(\tfrac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)) = B. \tag{32}$$

Posons dans le lemme 3 $N = \frac{1}{4}\mathfrak{V}^2(A)$ ce qui donne $\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A) = \frac{1}{2^{p-2}}\mathfrak{V}^{p-2}(N)$ pour $p > 2$. Choisissons un ε $(0 < \varepsilon < 1)$ tel que $\alpha' < \alpha(1-\varepsilon)$ et $\mathbf{x}_s \in \in K\left(\mathbf{o}, \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$ pour $s = 1, \ldots, j$. Il existe d'après le lemme 3 un nombre $p > 2$ entier tel que l'ensemble $\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A)$ contient l'intersection de l'ensemble $(1-\varepsilon)\,B$ (voir (32)) avec le cube $K\left(\mathbf{o}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. L'ensemble

$$\beta\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A) \tag{33}$$

contient donc pour $\beta \geqq \alpha$ l'intersection de l'ensemble $\beta(1-\varepsilon)\,B$ avec le cube $K\left(\mathbf{o}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right)$. Puisque $\beta(1-\varepsilon) \geqq \alpha(1-\varepsilon) > \alpha'$ on a $\beta(1-\varepsilon)\,B \supset \alpha' B$ et $K\left(\mathbf{o}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right) \supset K\left(\mathbf{o}, \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$. L'ensemble (33) contient donc pour chaque $\beta \geqq \alpha$ les points $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$, donc $\tau_j\left(\frac{1}{2^p}\mathfrak{V}^p(A)\right) \leqq \alpha$.

Alors, on a d'après **P16** $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{V}^n(A)\right) \leqq \alpha$ ce qui est valable pour chaque $\alpha > \tau_j(B)$. Pour achever la démonstration du lemme 4 [en utilisant (29), (31)] il nous reste à démontrer l'équation suivante:

$$\tau_j(\tfrac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A))) = \tau_j(\tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{K}(A))). \tag{34}$$

Mais (voir *P11*, **P10**, **P4**) on a

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A)) \supset \tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{K}(A)) \supset \tfrac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{L}(A)) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(\mathfrak{V}(A)) \supset \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}(\mathfrak{V}(A)). \tag{35}$$

Mais $J(\mathfrak{V}(A)) > 0$ [voir la remarque [16])] et l'ensemble $\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A))$ possède évidemment le centre $\mathbf{o}$. Il s'ensuit (voir **P16**) $\tau_j(\frac{1}{2}\mathfrak{K}(\mathfrak{V}(A))) = \tau_j(\frac{1}{2}\mathfrak{S}(\mathfrak{V}(A)))$; donc (35) entraîne (34).

Démonstration du théorème 5. La thèse I s'ensuit immédiatement du lemme 4.

II. Soit A borné. Posons maintenant $B = \frac{1}{2}\mathfrak{V}(\mathfrak{K}(A))$; $\mathfrak{K}(A)$ étant un ensemble fermé, borné, convexe, $\mu(\mathfrak{K}(A)) > 0$, on obtient d'après **P14**

$$0 < \mu(\mathfrak{K}(A)) \leqq \mu(B); \tag{36}$$

---

[16]) Donc $J(\mathfrak{V}(A)) > 0$.

le signe d'égalité dans cette formule est valable si $\mathfrak{K}(A)$ possède un centre et dans ce cas seulement. On a ensuite $J(A) \leqq \mu(\mathfrak{K}(A))$ et le signe d'égalité est valable seulement dans le cas où $\mu(\mathfrak{K}(A) - A) = 0$. On obtient[17]) d'après le lemme 4 $T_j(A) = \tau_j(B) > 0$. On a donc

$$T_1(A) \dots T_r(A)\, J(A) \leqq \tau_1(B) \dots \tau_r(B)\, \mu(B) \tag{37}$$

et le signe d'égalité est valable seulement dans le cas où les suppositions 2,3 du théorème 4 sont satisfaites. Le second membre du (37) est d'après **P18** égal à 2^r au plus, alors le premier membre de l'inégalité (37) est aussi au plus égal à 2^r et il est égal à 2^r seulement dans le cas où les conditions 2, 3 du théorème 4 et en outre la condition

$$\tau_1(B) \dots \tau_r(B)\, \mu(B) = 2^r \tag{38}$$

sont remplies. La condition 2 du théorème 4 étant satisfaite, soit C l'ensemble au centre $\mathbf{o}$ formé du $\mathfrak{K}(A)$ par une translation. Alors, on a $C = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(C) = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A)) = B$, donc on peut écrire la condition (38) sous la forme (13).

III. Soit maintenant A et par conséquent $B = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(A))$ lui-même un ensemble non borné, donc $\mu B = +\infty$ (voir **P12**). Alors, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un $\gamma (0 < \gamma < +\infty)$ jouissant de la propriété suivante: en posant $D = B \,.\, K(\mathbf{o}, \gamma)$ on a $\mu(D) > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^r$. D'après **P18**, **P19** on obtient alors

$$\tau_1^r(D) \,.\, \mu(D) \leqq \tau_1(D) \dots \tau_r(D)\, \mu(D) \leqq 2^r$$

donc $\tau_1(D) < \varepsilon$, donc $\tau_1(B) < \varepsilon$, donc $\tau_1(B) = 0$ et par conséquent $T_1(A) = 0$ (voir le lemme 4).

Démonstration du théorème 4. I. Si A n'est pas borné, on a d'après le théorème 5

$$T_1(A) = 0, \ T_j(A) < +\infty \text{ pour } 2 \leqq j \leqq r \tag{39}$$

donc (11) est valable pour n assez grand avec le signe $<$.

II. Si A est borné et si une quelconque des conditions 2—4 du théorème 4 n'est pas satisfaite, on a d'après le théorème 5

$$T_1(A) \dots T_r(A) \,.\, J(A) < 2^r \tag{40}$$

donc (11) est aussi valable pour n assez grand avec le signe $<$.

III. Soient enfin satisfaites les conditions 1—4 du théorème 4. Effectuons la translation par laquelle le centre de l'ensemble $\mathfrak{K}(A)$ se transforme dans l'origine $\mathbf{o}$. De cette manière-ci $\mathfrak{K}(A)$ se transforme dans un certain ensemble C convexe, fermé, borné, ayant le centre $\mathbf{o}$, tandis que A se transforme dans un certain ensemble D. On a évidemment

$$C = \mathfrak{K}(D), \ \mu(D) = \mu(A) = \mu(\mathfrak{K}(A)) = \mu(C).$$

---

[17]) B étant borné, il existe un γ $(0 < \gamma < +\infty)$ tel que $B \subset K(\mathbf{o}, \gamma^{-1})$, d'où évidemment $\tau_j(B) \geqq \gamma$.

D'après (13) on a donc

$$(41) \qquad \tau_1(C) \ldots \tau_r(C)\,\mu(A) = 2^r.$$

D'après le lemme 1 on a pour $n > 0$

$$(42) \quad \mathfrak{G}(D) \subset \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(D) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A) \subset \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(\mathfrak{K}(A)) = \frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(C) = C$$

(voir **P7**, **P8**). On a ensuite (voir **P15**, **P16**)

$$(43) \qquad \tau_j(C) = \tau_j''(C) = \tau_j''(\mathfrak{G}(D)) = \tau_j(\mathfrak{G}(D)).$$

Il s'ensuit du (42), (43), **P16** que $\tau_j\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right)$ et aussi $\tau_j''\left(\frac{1}{2^n}\mathfrak{B}^n(A)\right)$ possède pour chaque $n > 0$ la valeur $\tau_j(C)$, donc (41) entraîne (12).

Passons maintenant aux démonstrations des théorèmes 1, 2.

P20. Soit N un ensemble quelconque. Construisons une suite $\mathfrak{P}$ arbitraire de cubes $K(\mathbf{z}_n, \lambda_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ et posons

$$\varrho\,(\mathfrak{P}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{(2\lambda_n)^r},$$

où α_n signifie le nombre des points appartenants à l'ensemble N qui se trouvent dans le cube $K(\mathbf{z}_n, \lambda_n)$ (on peut avoir aussi $\alpha_n = +\infty$). La borne supérieure de tous les nombres $\varrho(\mathfrak{P})$ (pour toutes ces suites) sera dite pour un instant la densité de l'ensemble N. M. Jessen a demontré le théorème suivant[18]: Soient ϱ, V des nombres finis, positifs. Soit N un ensemble de densité $\geqq \varrho$. Soit B un ensemble mesurable, $\mu(B) > V$. Alors on peut construire un ensemble B_1 qui provient de B par une translation et qui contient plus que $V\varrho$ points de l'ensemble N.

P21. Soit A un ensemble borné. Alors il existe un système de r points indépendants $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^r$ à coordonnées entières satisfaisant à la condition suivante: A chaque $\varepsilon > 0$ et à chaque j $(1 \leqq j \leqq r)$ pour lequel on a $\tau_j''(A) <$ $< +\infty$ il existe un α tel que

$$(44) \qquad 0 < \alpha < \tau_j''(A) + \varepsilon, \quad \mathbf{x}^j \in \alpha A.$$

En effet, à chaque valeur fixe de $\varepsilon > 0$ il existe un tel système de points. (Si $\tau_j''(A) = +\infty$ pour un certain j, choisissons $\mathbf{x}^j$ parmi les points [0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0].) A étant borné, on n'obtient, pour tous les ε de l'intervalle $0 < \varepsilon < 1$, qu'un nombre fini de tels systèmes de points, de sorte qu'il est possible de choisir le système $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^r$ de manière que (44) soit remplie pour chaque $\varepsilon > 0$.

Ceci fait, on peut (comme il est bien connu) introduire, à l'aide d'une transformation linéaire unimodulaire $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ à coefficients entiers, un nouveau système de coordonnées de manière que toutes les coordonnées

[18]) Voir Fenchel, Verallgemeinerungen einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen, Acta Arithmetica 2 (1937), 230—241, voir surtout page 240—241.

du point $\mathbf{y}^j = L(\mathbf{x}^j)$, à partir de la $(j+1)$-ème, soient égales à zéro. Un tel système de coordonnées soit appelé „normal par rapport à l'ensemble A."

En introduisant ce système normal par rapport à A, on voit: si $0 \leqq \alpha < \tau_i''(A)$ et si $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_r]$ est un point à coordonnées entières, situé dans αA (les y_j désignant les coordonnées normales), $\mathbf{y}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^{i-1}$, c'est-à-dire on a $y_j = 0$ pour $j \geqq i$.

Démonstration du théorème 1. Soit d'abord $0 < J(A) < +\infty$, $\tau_1''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) > 0$; soient donnés r nombres $\mu_1, \ldots, \mu_r$ satisfaisants aux conditions posées dans le théorème 1. Supposons que (8) ne soit pas vrai, donc que $\mu_1 \ldots \mu_r J(A) > 2^r$. Il existe donc un ensemble $B \subset A$ borné et mesurable et un nombre ϱ $(0 < \varrho < 1)$ tel que $\varrho^r \mu_1 \ldots \mu_r J(B) > 2^r$. Posons $\nu_j = \frac{1}{2}\varrho\mu_j$ de sorte que $\frac{\nu_j}{\nu_{j-1}}$ $(j = 2, \ldots, r)$ sont des nombres entiers, $0 < \nu_j < \frac{1}{2}\tau_j''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = \tau_j''(\mathfrak{B}(A)) \leqq \tau_j''(\mathfrak{B}(B))$ pour $j = 1, \ldots, r$. Construisons un système de coordonnées normal pour l'ensemble $\mathfrak{B}(B)$ (au sens de **P21**) et soit N l'ensemble de tous les points qui possèdent (dans le système normal des coordonnées choisi) la forme suivante

$$\left[\frac{k_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{k_r}{\nu_r}\right] \quad (k_1, \ldots, k_r \text{ entiers}). \tag{45}$$

La densité de l'ensemble N au sens de **P20** est évidemment égale à $\nu_1 \ldots \nu_r$; mais $\nu_1 \ldots \nu_r J(B) > 1$, donc il existe selon **P20** un ensemble B_1 qui provient de B par une translation et qui contient au moins deux points $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ différents possédant la forme (45). Le point $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ est donc aussi un point de la forme (45), différent de l'origine et contenu dans l'ensemble $\mathfrak{B}(B_1) = \mathfrak{B}(B)$. Soit $\mathbf{z} = \left[\frac{p_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{p_r}{\nu_r}\right]$ et soit p_s le dernier parmi les nombres (entiers) $p_1, \ldots, p_r$ qui est différent du zéro $(1 \leqq s \leqq r)$. Alors, le point $\nu_s\mathbf{z} = \left[\frac{\nu_s}{\nu_1}p_1, \frac{\nu_s}{\nu_2}p_2, \ldots, \frac{\nu_s}{\nu_s}p_s, 0, \ldots, 0\right]$ est un point à coordonnées entières et il est contenu dans $\nu_s\mathfrak{B}(B)$. Puisque $0 < \nu_s < \tau_s''(\mathfrak{B}(B))$, la s-ème coordonnée du point $\nu_s\mathbf{z}$ est (selon **P21**) égale à zéro, c'est-à-dire $p_s = 0$ ce qui est une contradiction.

Ainsi on a démontré la dernière thèse du théorème 1: le reste est presque évident:

1°. Démonstrons d'abord que l'on ait $\tau_r''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) < +\infty$ pour $J(A) > 0$. En effet, il existe un ensemble borné $B \subset A$ pour lequel $J(B) > 0$. Si l'on avait $\tau_r''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = +\infty$, on aurait aussi $\tau_r''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(B)) = +\infty$. Ensuite, B étant borné, on a $\tau_1''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(B)) > 0$. On pourrait donc appliquer l'inégalité (8) à l'ensemble B en choisissant $\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}$ constants, tandis que l'on pourrait choisir pour μ_r un multiple arbitraire $k\mu_{r-1}$ $(k > 0)$. En choisissant k assez grand, on aboutit à une contradiction.

2°. On a montré déjà que la dernière thèse du théorème 1 et l'inégalité $\tau_r''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) < +\infty$ entraînent (7).

3°. Si $J(A) = +\infty$ il existe à chaque $n > 0$ un ensemble A_n tel que $A_n \subset A$, $n < J(A_n) < +\infty$. Selon (7) on a donc

$$\tau_1''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n)) \dots \tau_r''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n))\, J(A_n) \leqq 2^{2r-1}; \tag{45}$$

puisque $\tau_1''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \leqq \tau_1''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n) \leqq \tau_j''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A_n))$, on en tire selon (45)

$$(\tau_1''(\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(A)))^r \,.\, n \leqq 2^{2r-1}$$

pour chaque $n > 0$, donc $\tau_1''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 0$.

Démonstration du théorème 2. Le symbole K_ϱ va désigner l'ensemble de tous les points $[\xi_1, \dots, \xi_r]$, où $\varrho < \xi_j \leqq \varrho + 1$ $(j = 1, \dots, r)$. Soit donné un nombre η $(1 \leqq \eta \leqq 2)$ et construisons l'ensemble

$$A = K_0 + (K_1 - K_\eta) \tag{46}$$

(l'addition et soustraction au sens de la théorie des ensembles). Evidemment on a $J(A) = 2 - (2 - \eta)^r$.

$\mathsf{x} = [x_1, \dots, x_r]$ étant un point à coordonnées entières quelconque, différent de l'origine, soit $\tau(\mathsf{x})$ la borne inférieure des nombres α positifs pour lesquels on ait $\mathsf{x} \in \alpha\mathfrak{B}(A)$, c'est-à-dire $\mathsf{x} = \alpha(\mathsf{y} - \mathsf{z})$ où $\mathsf{y} \in A$, $\mathsf{z} \in A$. Evidemment (voir **P6**) on a $\tau(\mathsf{x}) = \tau(-\mathsf{x})$. Ecrivons encore $\mathsf{l} = [1, 1, \dots, 1]$, $-\mathsf{l} = [-1, -1, \dots, -1]$. J'affirme: x étant un point à coordonnées entières, $\mathsf{x} \neq \mathsf{o}, \mathsf{l}, -\mathsf{l}$, on a $\tau(\mathsf{x}) \geqq 1$.

Démonstration. 1°. Soit d'abord $\operatorname{Max} |x_i| \geqq 2$. Si $\mathsf{x} = \alpha(\mathsf{y} - \mathsf{z})$, $\mathsf{y} \in A$, $\mathsf{z} \in A$, $\alpha > 0$, alors toutes les coordonnées des points y, z se trouvent d'après (46) dans l'intervalle $(0, 2\rangle$. Par conséquent on doit avoir $\alpha > 1$, donc $\tau(\mathsf{x}) \geqq 1$.

2°. Soit $\operatorname{Max} |x_i| = 1$. Si $\tau(\mathsf{x}) < 1$, alors il existe un α tel que $0 < \alpha < 1$, $\mathsf{x} = \alpha(\mathsf{y} - \mathsf{z})$, $\mathsf{y} \in A$, $\mathsf{z} \in A$. Tous les deux points y, z ne peuvent pas simultanément être situés ni dans K_0 ni dans K_1 (car les valeurs absolues des différences de leurs coordonnées seraient plus petites que 1). Par conséquent l'un de ces points est d'après (46) situé dans K_0 et l'autre dans K_1, le point $\mathsf{y} - \mathsf{z}$ (et le point x lui-même) possède donc des coordonnées soit toutes positives soit toutes négatives. Alors, on a nécessairement $\mathsf{x} = \mathsf{l}$ ou $\mathsf{x} = -\mathsf{l}$. Pour $\mathsf{x} \neq \mathsf{l}, -\mathsf{l}$ on a donc $\tau(\mathsf{x}) \geqq 1$. Il nous reste à évaluer le nombre $\tau(\mathsf{l}) = \tau(-\mathsf{l})$. Remarquons d'abord: Si $\zeta \geqq \eta$ on a $AK_\zeta = 0$. C'est évident puisque A est formé de l'ensemble $K_0 + K_1$ justement en supprimant les points dont toutes les coordonnées sont plus grandes que η.

Soit maintenant $\alpha > 0$, $\mathsf{l} = \alpha(\mathsf{y} - \mathsf{z})$, $\mathsf{y} \in A$, $\mathsf{z} \in A$, donc $\dfrac{1}{\alpha} \,.\, \mathsf{l} + \mathsf{z} \in A$. Si $\mathsf{z} \in K_0$, on a $\dfrac{1}{\alpha} \,.\, \mathsf{l} + \mathsf{z} \in K_{\frac{1}{\alpha}}$, donc nécessairement $AK_{\frac{1}{\alpha}} \neq 0$, $\dfrac{1}{\alpha} < \eta$, $\alpha > \dfrac{1}{\eta}$. Mais, si $\mathsf{z} \in K_1$, on a $\dfrac{1}{\alpha} \,.\, \mathsf{l} + \mathsf{z} \in K_{\frac{1}{\alpha}+1}$, donc $AK_{\frac{1}{\alpha}+1} \neq 0$, $\dfrac{1}{\alpha} + 1 < \eta$, donc de nouveau $\dfrac{1}{\alpha} < \eta$, $\alpha > \dfrac{1}{\eta}$. Donc, on a nécessairement $\tau(\mathsf{l}) = \tau(-\mathsf{l}) \geqq \dfrac{1}{\eta}$.

Il en résulte: l'ensemble $\alpha\mathfrak{B}(A)$ ne contient pour $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$ aucun point $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ à coordonnées entières, ensuite il ne contient pour $\frac{1}{\eta} \leqq \alpha < 1$ aucun point à coordonnées entières qui serait différent de $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $-\mathbf{1}$. Alors, on a évidemment[19]) $\tau_1''(\mathfrak{B}(A)) \geqq \frac{1}{\eta}$, $\tau_j''(\mathfrak{B}(A)) \geqq 1$ pour $2 \leqq j \leqq r$. Mais $\tau_i''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) = 2\tau_i''(\mathfrak{B}(A))$, donc $T_r \geqq \tau_1''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \ldots \tau_r''(\frac{1}{2}\mathfrak{B}(A)) \,.\, J(A) \geqq$ $\geqq 2^r \,.\, \frac{1}{\eta}\,(2-(2-\eta)^r)$ pour chaque η de l'intervalle $1 \leqq \eta \leqq 2$.

[19]) On vérfie aisément que le signe d'égalité y est valable.