Vojtěch Jarník
Sur les points à coordonnées entiéres dans le plan

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1924, 12 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500766

Jeho Magnificenci, panu prof. Dr. K. Petrovi v dokonalé úctě autor

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême. 1924.

Sur les points à coordonnées entières dans le plan.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

(Présenté le 24 Octobre 1924.)

Soit (pour $x > 0$) $B(x)$ le nombre des points à coordonnées entières („Gitterpunkte"), intérieurs au cercle $u^2 + v^2 = x$. Si l'on pose $B(x) = \pi x + R(x)$, on a, d'après un théorème bien connu de M. Sierpiński, $R(x) = O(x^{1/3})$. Ce résultat a été étendu à des courbes plus générales par différents auteurs. D'autre part, on sait d'après M. M. Hardy et Landau que la relation $R(x) = O(x^{1/4 - \varepsilon})$ n'est pas exacte pour aucune valeur positive de la constante ε. On connaît, dans cet ordre d'idées, des résultats plus précis, dont je ne cite que le théorème suivant de M. Landau[1]):

Il existe trois nombres positifs C_1, C_2, C_3 tels que, pour tout $\xi > C_1$, il existe un point x_1 au moins tel que

$\xi \leq x_1 \leq \xi + C_2 \sqrt{\xi}$ *et* $R(x_1) > C_3 x_1^{1/4}$, *et un point x_2 au moins tel que*

$$\xi \leq x_2 \leq \xi + C_2 \sqrt{\xi} \quad \text{et} \quad R(x_2) < - C_3 x_2^{1/4}.$$

L'extension de ce théorème à des courbes plus générales fait l'objet du présent Mémoire.[2])

Soient u, v deux axes rectangulaires. Dans le plan de ces axes soit donnée une courbe continue, fermée et convexe L, contenant l'origine à son intérieur. Nous supposerons en outre que la courbe L satisfait aux conditions suivantes: Il existe trois nombres positifs ε, K, k jouissant des propriétés suivantes:

[1]) „Über die Gitterpunkte in einem Kreise" V, Göttinger Nachrichten 1924, p. 135—136; voir aussi les résultats plus généraux, contenus dans le Mémoire „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen", ibid. p. 137—150.

[2]) Pour les détails bibliographiques et pour les démonstrations plus détaillées voir mon Mémoire original („O mřížových bodech v rovině", Rozpravy Č. Ak., 1924.).

Si nous introduisons un autre système de coordonnées rectangulaires ξ, η par les équations

$$\xi = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad \eta = - u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

(φ quelconque), la courbe L sera représentée par les équations suivantes

$$\eta = f_{1, \varphi}(\xi), \quad \eta = f_{2, \varphi}(\xi),$$

où ξ parcourt un certain intervalle $\xi'_\varphi \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$; $f_{1, \varphi}(\xi)$, $f_{2, \varphi}(\xi)$ sont continues pour $\xi'_\varphi \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$ et possèdent une dérivée seconde continue pour $\xi'_\varphi < \xi < \xi_\varphi$; en outre, pour $\xi'_\varphi < \xi < \xi_\varphi$, on a $f_{1, \varphi}(\xi) > f_{2, \varphi}(\xi)$.[3]) Pour $\xi_\varphi - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$, on a

$$f_{1, \varphi}(\xi) = \eta_\varphi + h_\varphi \sqrt{\xi_\varphi - \xi} + k_\varphi (\xi_\varphi - \xi) + l_\varphi (\xi_\varphi - \xi)^{3/2} + \Phi_{1, \varphi}(\xi),$$

$$f_{2, \varphi}(\xi) = \eta_\varphi - h_\varphi \sqrt{\xi_\varphi - \xi} + k_\varphi (\xi_\varphi - \xi) - l_\varphi (\xi_\varphi - \xi)^{3/2} + \Phi_{2, \varphi}(\xi).$$

Les fonctions $\Phi_{1, \varphi}(\xi)$, $\Phi_{2, \varphi}(\xi)$ possèdent une dérivée seconde continue pour $\xi_\varphi - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$[4]) et l'on a

$$\Phi_{i, \varphi}(\xi_\varphi) = \Phi'_{i, \varphi}(\xi_\varphi) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

$\Phi''_{i, \varphi}(\xi)$ est monotonne et en valeur absolue plus petite que K pour $\xi_\varphi - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$. De plus, on a $|h_\varphi| < K$, $|l_\varphi| < K$, $h_\varphi > k$ pour tous les φ. Enfin, $f''_{i, \varphi}(\xi)$ a pour $-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\varphi - \varepsilon$ au plus K intervalles de monotonie et est plus petite que K en valeur absolue.[5])

Soit, pour $x \geqq 1$, $L(x)$ la transformée de L par l'homothétie du rapport $\sqrt{x}$ par rapport à l'origine, c'est-à-dire le lieu du point $(\sqrt{x}\, u, \sqrt{x}\, v)$, quand le point (u, v) décrit la courbe L.

Je désigne par J, resp. $J(x)$ l'aire du domaine intérieur à L, resp. $L(x)$ (on a $J(x) = J x$); par $A(x)$, le nombre des points à coordonnées entières à l'intérieur de $L(x)$, les points sur la courbe $L(x)$ étant comptés avec le poids $1/2$. Je pose enfin $A(x) = J x + Q(x)$.

I. Identités pour $A(x)$ et $\int_1^x A(y)\, dy$.

Soient γ, δ ($\gamma < \delta$) deux nombres de la forme „*nombre entier* + $\frac{1}{2}$"; soit $F(x)$ une fonction, définie pour $\gamma \leqq x \leqq \delta$, dont la variation totale dans $\langle \gamma, \delta \rangle$ est égale à N, et soit $|F(x)| \leqq M$ dans $\langle \gamma, \delta \rangle$; on a alors l'égalité bien connue

---

[3]) Après une rotation des axes de grandeur π, on voit immédiatement que

$$\xi_{\varphi+\pi} = -\xi'_\varphi, \quad \xi'_{\varphi+\pi} = -\xi_\varphi, \quad f_{1, \varphi}(\xi) = -f_{2, \varphi+\pi}(-\xi), \quad f_{2, \varphi}(\xi) = -f_{1, \varphi+\pi}(-\xi).$$

[4]) Dans tous le cas où je parle de dérivées à une extrémité de l'intervalle dans lequel la fonction est définie, j'entends les dérivées unilatérales, prises du côté correspondant.

[5]) Évidemment, ξ_φ a, comme fonction de φ, une borne inférieure positive; nous supposerons, pour simplifier, que le nombre ε est suffisamment petit pour que l'on ait $-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon < \xi_\varphi - \varepsilon$ pour tous les φ. Une conséquence immédiate de l'inégalité $h_\varphi > k$ est l'existence d'une borne inférieure positive de la courbure de L.

$$(1) \qquad \sum_{\gamma < n < \delta} \frac{F(n-0) + F(n+0)}{2} = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2\, a\, \pi\, x \,.\, F(x)\, d\, x,$$

où la somme à gauche s'étend sur tous les nombres entiers n avec $\gamma < n < \delta$.

Lemme 1^{er}. *Dans les conditions indiquées, en posant*

$$S_{m,n}(F, \gamma, \delta) = \sum_{a=m}^{n} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2\, a\, \pi\, x \,.\, F(x)\, d\, x \quad (n \geqq m,\ n,\ m \quad \textit{entiers}),$$

on a

$$|S_{m,n}(F, \gamma, \delta)| < A(\delta - \gamma)(M + N),$$

où A désigne une constante absolue.

Je supprime la démonstration de ce lemme, qui est bien facile.

Pour simplifier, je suppose toutes les intégrales au sens de Lebesgue. Je ferai usage du théorème suivant de M. Lebesgue[6]):

Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tous les x avec $a \leqq x \leqq b$, que $f_n(x)$ soient intégrables dans l'intervalle (a, b), et qu'il existe un nombre K tel que $|\sum_{n=1}^{m} f_n(x)| < K$ pour tout nombre entier $m \geqq 1$ et pour tous les x avec $a \leqq x \leqq b$, alors la fonction $f(x)$ est elle-même intégrable dans (a, b), et l'on a

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\, x.$$

Pour démontrer les identités indiquées, je me servirai de la méthode, due à M. Landau.[7]) Soit $x \geqq 1$; je pose $F(u, v, x) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right\}$, si le point (u, v) est situé $\left\{\begin{matrix} \text{à l'intérieur de} \\ \text{sur} \\ \text{à l'extérieur de} \end{matrix}\right\} L(x)$.

Nous choisissons les nombres α, β, γ, δ de forme „nombre entier $+ \frac{1}{2}$" de façon que $L(x)$[8]) soit située complètement à l'intérieur du rectangle $\alpha < u < \beta$, $\gamma < v < \delta$. Pour chaque u avec $\alpha < u < \beta$, en posant

$$f(u, x) = \sum_{\gamma < n < \delta} \frac{F(u, n-0, x) + F(u, n+0, x)}{2},$$

on a évidemment [d'après (1)]

$$(2) \qquad f(u, x) = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2\, b\, \pi\, v \,.\, F(u, v, x)\, d\, v.$$

---

[6]) Valable dans les conditions plus générales.

[7]) „Die Bedeutungslosigkeit der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie", Monatshefte für Math. u. Phys. 34.

[8]) Et a fortiori tout $L(y)$ avec $1 \leqq y \leqq x$.

En appliquant à $f(u, x)$ la formule (1), on a enfin

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha < n < \beta} \frac{f(n-0, x) + f(n+0, x)}{2} &= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2 a \pi u \,.\, f(u, x)\, d u = \\ &= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2 a \pi u \Big(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2 b \pi v \,.\, F(u, v, x)\, d v \Big) d u. \end{aligned}$$

On constate aisément, en vertu de notre lemme et du théorème de M. Lebesgue, que l'on peut intervertir l'ordre des opérations $\int_{\alpha}^{\beta} du$ et $\sum_{b=-\infty}^{+\infty}$; l'expression à droite de (3) est alors égale à

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2 a \pi u \Big(\int_{\gamma}^{\delta} \cos 2 b \pi v \,.\, F(u, v, x)\, d v \Big) d u =$$
$$= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} P(x, a, b),$$

où l'on a posé

$$P(x, a, b) = \iint_{L(x)} \cos 2 a \pi u \cos 2 b \pi v\, d u\, d v,$$

l'intégrale double étant étendue à l'intérieur de $L(x)$.

L'expression à gauche de (3) est, comme le montre une considération bien facile, égale à $A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)$, où $\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}$, si le point de $L(x)$ qui est situé le plus $\left\{ \begin{matrix} \text{haut} \\ \text{bas} \end{matrix} \right\}$ a pour ses coordonnées des nombres entiers (c'est-à-dire est un „Gitterpunkt"), $\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \end{matrix} \right\} = 0$ dans tous les autres cas. Ainsi nous obtenons la première des identités cherchées:

Pour $x \geqq 1$, *on a*

$$(\mathrm{I}) \qquad A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} P(x, a, b).$$

Je construis ensuite

$$\int_1^x \Big(\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2 a \pi u \,.\, f(u, y)\, du \Big) dy;$$

cette expression est, d'après (3), égale à $\int_1^x A(y)\, dy$. D'après notre lemme et d'après le théorème de M. Lebesgue, on voit aisément que l'on peut intervertir l'ordre des opérations $\int_1^x dy$ et $\sum_{a=-\infty}^{+\infty}$; on obtient ainsi, en substituant à $f(u, y)$ l'expression donnée sous (2),

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_1^x dy \left(\int_\alpha^\beta \cos 2a \pi u \, du \left[\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta \cos 2b \pi v \, F(u,v,y) \, dv \right] \right).$$

Une seconde application de notre lemme et du théorème de M. L e b e s g u e permet de transformer cette expression en

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x dy \left(\int_\alpha^\beta \cos 2a \pi u \, du \left[\int_\gamma^\delta \cos 2b \pi v \,.\, F(u, v, y) \, dv \right] \right)$$

$$= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x P(y, a, b) \, dy.$$

On trouve ainsi la seconde identité:

Pour $x \geqq 1$, *on a*

$$\text{(II)} \qquad \int_1^x A(y) dy = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x P(y, a, b) \, dy.$$

II. Évaluation approchée de $P(x, a, b)$ pour grandes valeurs positives de x.

Dans ce §[9], je désignerai par C les constantes positives, indépendantes de x, a, b; par Θ les fonctions d'un nombre quelconque de variables, dont la valeur absolue ne surpasse pas *1*. Je ne distinguerai pas au moyen d'indices les divers C et Θ.

Lemme 2e. *Pour* $x \geqq 1$, *on a:*

$$\text{(4)} \qquad P(x, 0, 0) = J x$$

et pour $a^2 + b^2 > 0$ *(a, b entiers) on a*

$$\text{(5)} \qquad P(x, a, b) = \eta_{a,b} \frac{x^{1/4}}{4\sqrt{2}\,\pi\,(a^2+b^2)^{3/4}} \,.$$

$$\cdot \sum_{tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}} h_\varphi \sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x}\,\xi_\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{C\,\Theta}{x^{1/4}(a^2+b^2)^{5/4}},$$

où la sommation s'étend à tous les φ *où* $0 \leq \varphi < 2\pi$, $tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}$ *(pour* $a = 0$, *on doit prende les deux angles* $\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{3\pi}{2}$*); et où* $\eta_{a,b} = 2$ *pour* $ab = 0$, $\eta_{a,b} = 1$ *dans les autres cas.*

J'indique brièvement la démonstration. La formule (4) est évidente. Pour $a^2 + b^2 > 0$, on a

[9]) Et aussi, occasion donnée, dans le § suivant.

$$P(x, a, b) = \iint\limits_{L(x)} \cos 2a\pi u \,.\, \cos 2b\pi v \, du\, dv \quad \begin{pmatrix} u = \sqrt{x}\, u' \\ v = \sqrt{x}\, v' \end{pmatrix}$$

$$= x \iint\limits_{L} \cos 2a\pi \sqrt{x}\, u' \,.\, \cos 2b\pi \sqrt{x}\, v'\, du'\, dv'$$

$$= \frac{x}{2}\left[\iint\limits_{L} \cos 2\pi \sqrt{x}\,(au' + bv')\, du'\, dv' + \iint\limits_{L} \cos 2\pi \sqrt{x}\,(au' - bv')\, du'\, dv'\right]$$

(6)
$$= \frac{x}{2}\Big[A(a, b, x) + A(a, -b, x)\Big],$$

où

$$A(a, b, x) = \iint\limits_{L} \cos 2\pi \sqrt{x}\,(au' + bv')\, du'\, dv'.$$

Je pose

$$\xi = \frac{au' + bv'}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \eta = \frac{-bu' + av'}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

c'est-à-dire je fais subir aux axes des coordonnées une rotation de grandeur φ, où φ est défini par les relations

$$0 \leqq \varphi < 2\pi, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On a alors, d'après les notations données dans l'introduction de ce Mémoire,

$$A(a, b, x) = \iint \cos\left(2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, \sqrt{x}\, \xi\right) d\xi\, d\eta$$

$$= \int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} \cos\left(2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, \sqrt{x}\, \xi\right) . \left(f_{1,\varphi}(\xi) - f_{2,\varphi}(\xi)\right) d\xi$$

$$= -\frac{1}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, \sqrt{x}} \int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} \sin\left(2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, \sqrt{x}\, \xi\right) . \left[f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)\right] d\xi$$

(intégration par parties).

Pour abréger, je pose $A = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, \sqrt{x}$.

$A(a, b, x)$ est alors égale à $-\frac{1}{A}$ multipliée par la partie imaginaire de l'intégrale

$$\int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)\right) d\xi.$$

Nous divisons l'intervalle d'intégration en trois intervalles partiels et considérons les trois intégrales séparément:

$$A) \int\limits_{\xi_\varphi - \varepsilon}^{\xi_\varphi} e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)\right) d\xi$$

$$= \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)}\left[f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)\right] d\xi$$

$$= e^{iA\xi_\varphi} \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-iA\xi}\left(-\frac{h_\varphi}{\sqrt{\xi}} - 3l_\varphi \sqrt{\xi} + \Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)\right) d\xi.$$

Après quelques intégrations par parties, en utilisant pour l'évaluation du reste le second théorème de la moyenne, on obtient pour cette intégrale

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & e^{iA\xi_\varphi}\left[h_\varphi\sqrt{\frac{\pi}{2A}}(-1+i) - i e^{-iA\varepsilon}\frac{h_\varphi}{A\sqrt{\varepsilon}} - i e^{-iA\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}\,\frac{3l_\varphi}{A}\right. \\
& \left. + i e^{-iA\varepsilon}\frac{\Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)-\Phi'_{2,\varphi}(\xi\ \ -\varepsilon)}{A} + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}\right] \\
& = e^{i\left(A\xi_\varphi+\frac{3\pi}{4}\right)}h_\varphi\sqrt{\frac{\pi}{A}} + i e^{iA(\xi_\varphi-\varepsilon)}\frac{f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)-f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi-\varepsilon)}{A} \\
& \quad + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & B)\quad \int_{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi_\varphi-\varepsilon} e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi)-f'_{2,\varphi}(\xi)\right)d\xi \\
& = -i\left[\frac{e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi)-f'_{2,\varphi}(\xi)\right)}{A}\right]_{\xi=-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi=\xi_\varphi-\varepsilon} + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

(On obtient l'évaluation du reste par le second théorème de la moyenne, en respectant les conditions imposées aux fonctions $f_{i,\varphi}(\xi)$).

$$
C)\quad \int_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon} e^{iA\xi}\left(f'_{1,\varphi}(\xi)-f'_{2,\varphi}(\xi)\right)d\xi;
$$

en utilisant la note [3]), on peut ramener cette intégrale à l'intégrale considérée sub A) et l'on trouve ainsi pour elle la valeur

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & e^{-i\left(A\xi_{\varphi+\pi}-\frac{\pi}{4}\right)}h_{\varphi+\pi}\sqrt{\frac{\pi}{A}} + \\
& i e^{iA(-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon)}\frac{f'_{2,\varphi}(-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon)-f'_{1,\varphi}(-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon)}{A} + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

En prenant la partie imaginaire de la somme de (7), (8), (9), on obtient (en remplaçant A par sa valeur)

$$
\begin{aligned}
A(a,b,x) = {} & \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi\,(a^2+b^2)^{3/4}x^{3/4}}\left[h_\varphi \sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right. \\
& \left.+ h_{\varphi+\pi}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_{\varphi+\pi}-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{C\,\Theta}{(a^2+b^2)^{5/4}x^{5/4}};
\end{aligned}
$$

en utilisant (6), on obtient aisément la formule cherchée (5).

III. Sur la fonction Q (x) pour grandes valeurs positives de x.

Je pose $A(x) = \mathrm{J}x + Q(x)$ et pour $r \geqq 0$, $a^2+b^2>0$, a, b, r entiers

$$
\bar{P}_r(x,a,b) = \eta_{a,b}\,\frac{x^{\frac{2r+1}{4}}}{4\sqrt{2}\,\pi^{r+1}(a^2+b^2)^{\frac{2r+3}{4}}}\,.
$$

$$
\cdot\sum_{tg\,\varphi=\pm\frac{b}{a}}\frac{h_\varphi}{\xi_\varphi^{r}}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi-\frac{\pi}{4}-r\frac{\pi}{2}\right),
$$

$$(10) \qquad \overline{Q}_r(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' \overline{P}_r(x, a, b).$$ [10]

La convergence absolue de la série en (10) pour $r \geqq 1$ est manifeste; pour $r = 0$ la série itérée en (10) est aussi convergente, comme on le voit, en posant $P(x, a, b) = \overline{P}_0(x, a, b) + f(x, a, b)$ et en remarquant qu'après l'identité (I) et le lemme 2e la série $\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' P(x, a, b)$ converge et de même la série $\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' f(x, a, b)$, en vertu de la relation $f(x, a, b) =$ $= \dfrac{C\,\Theta}{x^{1/4}(a^2+b^2)^{5/4}}$.

D'après l'identité (I) on a

$$A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' \overline{P}_0(x, a, b) +$$
$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' f(x, a, b) + J x,$$

alors

$$(11) \quad \overline{Q}_0(x) = \Sigma\,\Sigma' \overline{P}_0 = Q(x) - \Sigma\,\Sigma' f - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = Q(x) + O(1).$$

Par une intégration par parties et d'après le second théorème de la moyenne, on trouve aisément pour $r \geqq 0$

$$\int_1^x \overline{P_r}(y, a, b)\, dy = \overline{P}_{r+1}(x, a, b) + \frac{C\,\Theta\, x^{\frac{2r+1}{4}}}{(a^2+b^2)^{\frac{2r+7}{4}}} + \frac{C\,\Theta}{(a^2+b^2)^{\frac{2r+5}{4}}},$$

d'où, pour $r \geqq 1$,

$$(12) \qquad \int_1^x \overline{Q}_r(y)\, dy = \overline{Q}_{r+1}(x) + O\left(x^{\frac{2r+1}{4}}\right).$$

Cette dernière relation est encore vraie pour $r = 0$, car on a, d'après l'identité (II),

$$\int_1^x \sum \sum{}' P(y, a, b)\, dy = \sum \sum{}' \int_1^x P(y, a, b)\, dy,$$

c'est-à-dire

$$\int_1^x \sum \sum{}' \left(\overline{P_0}(y, a, b) + f(y, a, b)\right) dy = \sum \sum{}' \int_1^x \left(\overline{P}_0(y, a, b) + f(y, a, b)\right) dy$$

et par suite, la série $\Sigma\,\Sigma' f(y, a, b)$ étant intégrable terme-à-terme,

$$\int_1^x \sum \sum{}' \overline{P}_0(y, a, b))\, dy = \sum \sum{}' \int_1^x \overline{P}_0(y, a, b)\, dy$$
$$= \sum \sum{}' \overline{P}_1(x, a, b) + \sum \sum{}' \left(\frac{C\,\Theta\, x^{1/4}}{(a^2+b^2)^{7/4}} + \frac{C\,\Theta}{(a^2+b^2)^{5/4}}\right),$$

[10] L'apostrophe ' signifie qu'il faut supprimer le terme correspondant à $a = b = 0$.

ce qui donne

$$\int_1^x \overline{Q}_0 (y)\, dy = Q_1 (x) + O (x^{1/4}),$$

c'est-à-dire l'équation (12) pour $r = 0$.

Pour $r \geqq 1$, la série $\Sigma\Sigma' \overline{P}_r$ est absolument convergente, et l'on peut par suite changer l'ordre de ses termes à l'arbitraire. Si nous désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$ les valeurs, rangées par l'ordre de grandeur, prises par l'expression $\pi^2 (a^2 + b^2)\, \xi_\varphi{}^2$ (a, b entiers, $a^2 + b^2 > 0$ et si nous posons

$$U (\lambda_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{\pi^2 (a^2 + b^2)\, \xi^2_\varphi = \lambda_n \\ tg\varphi = \pm \frac{b}{a}}} \eta_{a,\, b}\, h_\varphi\, \xi_\varphi{}^{3/2},$$

nous obtenons, pour $r \geqq 1$, r entier:

$$Q_r (x) = x^{\frac{2r+1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n^{\frac{2r+3}{4}}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\, x - \frac{\pi}{4} - r\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après les propriétés bien connues des séries de Dirichlet, appliquées à la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{U (\lambda_n)}{\lambda_n{}^s}$, convergente pour $\Re (s) > 1$, on peut trouver un nombre entier $\rho > 1$, si grand que

$$\frac{U (\lambda_1)}{\lambda_1^{\frac{2\varrho+3}{4}}} > 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{U (\lambda_n)}{\lambda_n^{\frac{2\varrho+3}{4}}}.$$

En posant, g étant un nombre entier positif quelconque,

$$x_1^{(\varrho)} (g) = \pi^2 \frac{\left(g + \frac{\rho}{4} + \frac{3}{8}\right)^2}{\lambda_1},$$

$$x_2^{(\varrho)} (g) = \pi^2 \frac{\left(g + \frac{\rho}{4} - \frac{1}{8}\right)^2}{\lambda_1},$$

on a alors (pour notre valeur choisie de ϱ)

$$(a) \left\{ \begin{array}{c} x_1^{(\varrho)} (g) = \dfrac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O (g), \quad x_2^{(\varrho)} (g) = \dfrac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O (g), \\ x_2^{(\varrho)} (g) < x_1^{(\varrho)} (g) < x_2^{(\varrho)} (g + 1), \end{array} \right.$$

$$\overline{Q}_\varrho [x_1^{(\varrho)} (g)] > C g^{\frac{2\varrho+1}{2}}, \quad \overline{Q}_\varrho [x_2^{(\varrho)} (g)] < - C g^{\frac{2\varrho+1}{2}}.$$

D'après (12), on a alors, pour $g > C$,

$$\int_{x_2^{(\varrho)}(g)}^{x_1^{(\varrho)}(g)} \overline{Q}_{\varrho-1} (y)\, dy > C\, g^{\frac{2\varrho+1}{2}}$$

$$\int_{x_1^{(\varrho)}(g)}^{x_2^{(\varrho)}(g+1)} \overline{Q}_{\varrho-1}(y)\, dy < - C g^{\frac{2\varrho+1}{2}};$$

la longueur du chemin d'intégration étant dans les deux cas $O(g)$, il s'ensuit l'existence des nombres $x_1^{(\varrho-1)}(g)$, $x_2^{(\varrho-1)}(g)$ tels que

$$x_1^{(\varrho)}(g-1) \leqq x_2^{(\varrho-1)}(g) \leqq x_2^{(\varrho)}(g) \leqq x_1^{(\varrho-1)}(g) \leqq x_1^{(\varrho)}(g)$$

$$\overline{Q}_{\varrho-1}[x_1^{(\varrho-1)}(g)] > C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

$$\overline{Q}_{\varrho-1}[x_2^{(\varrho-1)}(g)] < -C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

pour $g > C$. D'après (a), on a encore (pour $g > C$)

$$x_2^{(\varrho-1)}(g) < x_1^{(\varrho-1)}(g) < x_2^{(\varrho-1)}(g+1),$$

$$x_1^{(\varrho-1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \quad x_2^{(\varrho-1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g);$$

d'après (12), on a (si $\rho \geqq 2$)

$$\int_{x_2^{(\varrho-1)}(g)}^{x_1^{(\varrho-1)}(g)} \overline{Q}_{\varrho-2}(y)\,dy > C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

$$\int_{x_1^{(\varrho-1)}(g)}^{x_2^{(\varrho-1)}(g+1)} \overline{Q}_{\varrho-2}(y)\,dy < -C g^{\frac{2\varrho-1}{2}}$$

pour $g > C$. En procédant ainsi, on démontre par induction le fait suivant:

Lemme 3°. *Il existe deux nombres positifs K_1, K_2 jouissant des propriétés suivantes:*

A chaque nombre entier positif $g > K_1$, on peut faire correspondre deux nombres $x_1^{(1)}(g)$, $x_2^{(1)}(g)$ tels que

$$x_2^{(1)}(g) < x_1^{(1)}(g) < x_2^{(1)}(g+1),$$

$$x_1^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \qquad x_2^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g),$$

et

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} \overline{Q}_0(y)\,dy > K_2\, g^{3/2}$$

$$\int_{x_1^{(1)}(g)}^{x_2^{(1)}(g+1)} \overline{Q}_0(y)\,dy < -K_2\, g^{3/2}.$$

Mais, d'après (11), on a $\overline{Q}_0(x) = Q(x) + O(1)$.

Alors, la longueur du chemin d'intégration étant $O(g)$, on a le résultat suivant

Lemme 4°. *Il existe deux nombres positifs K_3, K_4 tels que pour $g > K_3$ (g entier) on a*

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy > K_4\, g^{3/2},$$

(13) $$\int_{x_1^{(1)}(g)}^{x_2^{(1)}(g+1)} Q(y)\,dy < -K_4\, g^{3/2}.$$

De ce lemme, on peut déduire aisément les théorèmes II, III, IV, qui font le résultat principal de ce Mémoire. Je trouve opportun du reste, de commencer par citer le théorème suivant, représentant un cas particulier d'un théorème général de M. *van der Corput*:[11])

Théorème Ier.

$$Q(x) = O(x^{1/3})$$

L'applicabilité du théorème de M. *van der Corput* à notre cas résulte de l'existence d'une borne inférieure *positive* de la courbure de la courbe L.

Théorème IIe. *Il existe trois nombres positifs* K_5, K_6, K_7, *jouissant des propriétés suivantes*:

L'ensemble des points x *de l'intervalle*

$$\left\{\begin{matrix} [x_2^{(1)}(g),\ x_1^{(1)}(g)] \\ [x_1^{(1)}(g),\ x_2^{(1)}(g+1)] \end{matrix}\right\} \text{ où } Q(x) \left\{\begin{matrix} > K_6\, g^{1/2} \\ < -K_6\, g^{1/2} \end{matrix}\right\}$$

a, pour tout $g > K_5$, *une mesure supérieure à* $K_7\, g^{5/6}$.

Démonstration. Je démontre la première partie de la proposition (la seconde partie se démontre d'une manière tout-à-fait analogue). On a (en supposant toujours g suffisamment grand)

(13) $$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy > K_4\, g^{3/2}.$$

La longueur du chemin d'intégration est plus petite que $K_8 g$ et $Q(x)$ est plus petit que $K_9 g^{2/3}$ (d'après le théorème Ier). Nous posons $K_6 = \frac{K_4}{2K_8}$, et soit M la mesure de l'ensemble en question (c'est-à-dire de l'ensemble, où $x_2^{(1)}(g) \leqq x \leqq x_1^{(1)}(g)$, $Q(x) > K_6 g^{1/2}$).

On a alors

(14) $$M K_9 g^{2/3} + K_8\, g\, K_6 g^{1/2} > \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy.$$

De (13), (14) on conclut que

$$M > \frac{K_4 - K_6 K_8}{K_9}\, g^{5/6} = \frac{K_4}{2K_9}\, g^{5/6},$$

d'où le thèorème IIe, avec $K_7 = \frac{K_4}{2K_9}$.

---

[11]) Voir p. e. Über Gitterpunkte in der Ebene, Math. Annalen 81, p. 1—20; voir surtout le corollaire à la page 5.

Théorème III^e (conséquence immédiate du théorème II^e). *Il existe deux nombres positifs K_{10}, K_{11}, jouissant des propriétés suivantes:*

A chaque nombre entier positif g, on peut faire correspondre deux nombres $x_1(g)$, $x_2(g)$ tels que

$$x_2(g) < x_1(g) < x_2(g+1)$$

$$x_1(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), x_2(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g),$$

$$Q[x_1(g)] > K_{11}[x_1(g)]^{1/4}, Q[x_2(g)] < - K_{11}[x_2(g)]^{1/4},$$

pour tout $g > K_{10}$.

Si la courbe L est le cercle $u^2 + v^2 = 1$, ce théorème se réduit précisement au théorème de M. Landau, cité à l' introduction.

Théorème IV^e. *Soit* $Q^+(x) = Max(0, Q(x))$,

$$Q^-(x) = Max(0, -Q(x));$$

on peut trouver deux nombres positifs K_{12}, K_{13} tels que

$$\int_1^x Q^+(y)\,dy > K_{13}\, x^{5/4}, \tag{15}$$

$$\int_1^x Q^-(y)\,dy > K_{13}\, x^{5/4} \tag{16}$$

pour tous les $x > K_{12}$.

Démonstration:

$$\int_1^x Q^+(y)\,dy \geqq \sum_{\substack{g > K_3 \\ x_1^{(1)}(g) \leqq x}} \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q^{\pm}(y)\,dy \geqq \sum_{\substack{g > K_3 \\ x_1^{(1)}(g) \leqq x}} \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy$$

$$\geqq \sum_{\substack{g > K_3 \\ x_1^{(1)}(g) \leqq x}} K_4\, g^{3/2} \backsim K_4 \sum_{\frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 < x} g^{3/2} \backsim K_{14}\, x^{5/4},$$

d'où la formule (15). La formule (16) se démontre d'une manière tout-à-fait analogue.