Vojtěch Jarník

Zum Khintchineschen "Übertragungssatz"

Trudy Tbilis. Mat. Instituta 3 (1938), pp. 193--216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500763

ტფილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შრომები, ტ. III, 1938
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. III, 1938
TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE TBILISSI, T. III, 1938

ZUM KHINTCHINESCHEN «ÜBERTRAGUNGSSATZ»

VON VOJTECH JARNIK (Prag).

Herrn Prof. K. Petr zum 70. Geburtstag gewidmet.

§ 1. Resultate.

Alle Zahlen in dieser Note sind reell; überdies bedeuten kleine lateinische Buchstaben stets ganze Zahlen. $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ bedeutet ein geordnetes System von s Zahlen, also den Punkt mit den Koordinaten $\eta_1, \ldots, \eta_s$, zum Unterschied von dem grössten gemeinsamen Teiler $(a_1, \ldots, a_s)$. $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ $(s \geqq 1)$ heisse ein eigentliches System, wenn aus $x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_0 = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$ (also auch $x_0 = 0$). Ist ein System $\theta_1, \ldots, \theta_s$ gegeben, so setze man für $\tau \geqq 1$

$$\psi_1(\tau) = \psi_1(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s) = \underset{\substack{0 < \mathrm{Max}\,|x_i| \leqq \tau \\ 1 \leqq i \leqq s}}{\mathrm{Min}} |x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_0|,$$

$$\psi_2(\tau) = \psi_2(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s) = \underset{0 < q \leqq \tau}{\mathrm{Min}} \left(\underset{1 \leqq i \leqq s}{\mathrm{Max}} |q\theta_i - p_i|\right)$$

(die p_i brauchen keine Primzahlen zu sein).

Bekanntlich ist

$$(1) \qquad \psi_1(\tau) = \psi_1([\tau]) < [\tau]^{-s}, \quad \psi_2(\tau) = \psi_2([\tau]) < \frac{1}{[\tau^{\frac{1}{s}}]}.$$

Für eigentliche Systeme ist $\psi_1(\tau) > 0$, $\psi_2(\tau) > 0$.

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Funktionen ψ_1, ψ_2 untersuchen (für $s = 1$ ist freilich trivialerweise $\psi_1(\tau, \theta) = \psi_2(\tau, \theta)$). Zu dieser Untersuchung hat Herr A. Khintchine folgende Zahlen $\beta_1 = \beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\beta_2 = \beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ eingeführt: β_1 bzw. β_2 ist die obere Grenze derjenigen λ, für welche $\liminf\limits_{\tau=\infty} \varphi_1(\tau) \cdot \tau^{s+\lambda} < \infty$ bzw. $\liminf\limits_{\tau=\infty} \psi_2(\tau) \cdot \tau^{\frac{1+\lambda}{s}} < \infty$ ist (also nach (1) $0 \leqq \beta_i \leqq \infty$ $(i = 1, 2)$); und er hat folgenden «Übertragungssatz» bewiesen: für $s > 1$ ist

$$(2) \qquad \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \frac{\beta_1}{(s-1)\beta_1+s^2} \text{ [1]}$$

(für $\beta_1=\infty$ soll die rechte Seite $\frac{1}{s-1}$ bedeuten). Und diese Schranken sind in folgendem Sinne scharf: ist $s>1$, $0\leqq\mu\leqq\infty$, so gibt es zwei eigentliche Systeme $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$, $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ mit

$$\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\beta_1(\eta_1, \ldots, \eta_s)=\mu,$$

$$\beta_2(\eta_1, \ldots, \eta_s)=\mu,\ \beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\frac{\mu}{(s-1)\mu+s^2} \text{ [2]}.$$

In dieser Note wollen wir statt der «Minimalordnung» die «Maximalordnung» der Funktionen ψ_1, ψ_2 untersuchen; wir definieren also $\gamma_1=\gamma_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\gamma_2=\gamma_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ genau so wie β_1, β_2, nur mit lim sup statt lim inf. Aus rechnerischen Gründen ist es aber vorteilhafter, statt γ_1, γ_2 folgende Zahlen α, β einzuführen:

$$\beta=\beta(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\gamma_1+s,\quad \alpha=\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)=1-\frac{1+\gamma_2}{s}.$$

D. h.: β ist die obere Grenze aller λ mit $\psi_1(\tau)=O(\tau^{-\lambda})$ und α ist die untere Grenze aller λ mit $\psi_2(\tau)=O(\tau^{\lambda-1})$. Also ist nach (1) $s\leqq\beta\leqq\infty$,

[1] A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Palermo-Rendiconti **50** (1926), S. 170—195, insb. S. 189—195. Einen einfacheren Beweis hat Herr K. Mahler, Neuer Beweis eines Satzes von A. Khintchine, Matematiceski sbornik **43** (1937), S. 961—962 gegeben.

[2] V. Jarnik, Über einen Satz von A. Khintchine; erste Mitteilung in Prace Mat-fiz. **43** (1936), S. 151—166, zweite Mitteilung in Acta arithm. **2** (1936), S. 1—22. Ich habe dort zwar nicht betont, dass für $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$, $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ *eigentliche* Systeme gewählt werden können, dies ist aber für $\mu<\infty$ klar und lässt sich für $\mu=\infty$ folgendermassen einsehen: bekanntlich gibt es eigentliche Systeme $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ mit $\beta_2=\infty$, also $\beta_1=\infty$ (vgl. z. B. O. Perron, Über diophantische Approximationen, Math. Annalen **83** (1921), S. 77—84, vgl. insb. den § 3, S. 83 — 84. Andererseits wähle man ein irrationales θ_1 mit $\beta_2(\theta_1)=\infty$; nach dem Satz 2. der 1. Mitteilung ist dann für fast alle Punkte $\{\theta_2, \ldots, \theta_s\}$ des Einheitswürfels $\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\infty$, $\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\frac{1}{s-1}$; und dabei kann man noch den Punkt $\{\theta_2, \ldots, \theta_s\}$ so wählen, dass $\theta_1, \ldots, \theta_s$ ein eigentliches System ist; denn die übrigen Punkte $\{\theta_2, \ldots, \theta_s\}$ liegen auf abzählbar vielen $(s-2)$—dimensionalen Hyperebenen $x_2\theta_2+\ldots+x_s\theta_s=-$ [illegible] $-x_1\theta_1$ $(|x_2|+\ldots+|x_s|>0)$, bilden also eine Menge vom Mass Null (Nulldimensionale Hyperebene=Punkt).

$\alpha \leqq \frac{s-1}{s}$. Ist weiter θ irrational, so ist bekanntlich[3]

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \leqq \limsup_{\tau=\infty} \tau\psi_2(\tau, \theta) \leqq 1,$$

also $\alpha(\theta) \geqq 0$. Umsomehr ist also $\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s) \geqq 0$, wenn nicht alle θ_i rational sind[4]. Für rationale $\theta_i \, (1 \leqq i \leqq s)$ ist freilich $\psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0$ für grosse τ, also $\beta = \infty$, $\alpha = -\infty$.

Da die Maximalordnung von $\psi_2(\tau, \theta) = \psi_1(\tau, \theta)$ durch (3) hinreichend genau beschrieben ist, so beschränken wir uns im Folgenden hauptsächlich auf den Fall $s > 1$ und zwar auf eigentliche Systeme. Für $s = 2$ gilt folgender Satz:

Satz 1. *Ist θ_1, θ_2 ein eigentliches System, so ist*

$$\beta(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\alpha(\theta_1, \theta_2)}$$

(für $\alpha = 0$ lies $\beta = \infty$ und umgekehrt). Also: für $s = 2$ ist α durch β (d. h. γ_2 durch γ_1) eindeutig bestimmt und umgekehrt—ganz anders als bei β_1, β_2 (vgl. die *scharfen* Ungleichungen (2)). Man kann aber diesen Satz noch verschärfen, indem man ψ_1, ψ_2 mit allgemeineren Funktionen vergleicht:

Satz 2. *Es sei θ_1, θ_2 ein eigentliches System, $0 < K < \infty$; $\psi_i(\tau) = \psi_i(\tau, \theta_1, \theta_2)$ $(i = 1, 2)$. Für $\tau \geqq \mu$ sei $\varphi_1(\tau)$ definiert und stetig, $\tau^{-1}\varphi_1(\tau)$ wachsend, $\varphi_1(\tau) \geqq \tau^2$. Man bezeichne mit $\varphi_2(\tau)$ die zu $\varphi_1(\tau)$ inverse Funktion*[5].

---

[3] Die zweite Ungleichung folgt aus (1). Gesetzt, es sei $\tau\psi_2(\tau, \theta) < \frac{1}{2}$ für $\tau \geq \tau_0$. Dann gibt es Zahlen q, p mit $(q,p) = 1, 0 < q \leqq \tau_0$, $|q\theta - p| < \frac{1}{2\tau_0}$, also $|q\theta - p| = \frac{1}{2\tau_1}$ mit einem $\tau_1 > \tau_0$. Also gibt es ein Paar q_1, p_1 mit $0 < q_1 \leq \tau_1, (q_1, p_1) = 1$, $|q_1\theta - p_1| < \frac{1}{2\tau_1}$, also $pq_1 - p_1q \neq 0$, andererseits aber $|pq_1 - p_1q| < \frac{1}{2\tau_1}(q + q_1) < 1$—Widerspruch.

[4] Wir benutzen oft die trivialen Ungleichungen

$$\psi_1(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_k) \geq \psi_1(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}),$$

$$\psi_2(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_k) \leqq \psi_2(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}).$$

[5] Oder, was dasselbe besagt: $\varphi_2(\tau)$ sei für $\tau \geq \lambda$ definiert, stetig und wachsend, $\tau^{-1}\varphi_2(\tau)$ abnehmend, $\varphi_2(\tau) \leqq \tau^{\frac{1}{2}}$, $\varphi_2(\tau) \to \infty$ für $\tau \to \infty$; $\varphi_1(\tau)$ sei die zu $\varphi_2(\tau)$ inverse Funktion.

Behauptung 1. *Aus*

$$\limsup_{\tau=\infty} \varphi_1(\tau)\,\psi_1(\tau) < K$$

folgt

$$\limsup_{\tau=\infty} \frac{\tau}{\varphi_2(\tau K)}\psi_2(\tau) \leqq 12\,(1+K);$$

aus

$$\limsup_{\tau=\infty} \frac{\tau}{\varphi_2(\tau)}\,\psi_2(\tau) < K$$

folgt

$$\limsup_{\tau=\infty} \varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)\psi_1(\tau) \leqq 4\,(1+K).$$

Behauptung 2. *Es gebe ein $m > 0$, so dass $\tau^{-m}\varphi_1(\tau)$ abnimmt*[6]. *Dann gilt: Es ist*

$$\psi_1(\tau) = O\left(\frac{1}{\varphi_1(\tau)}\right) \text{ bzw. } \psi_1(\tau) = o\left(\frac{1}{\varphi_1(\tau)}\right)$$

dann und nur dann, wenn

$$\psi_2(\tau) = O\left(\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau}\right) \text{ bzw. } \psi_2(\tau) = o\left(\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau}\right)$$

ist.

Die den Funktionen φ_1, φ_2 auferlegten Bedingungen sind ganz natürlich, da ja

$$\limsup \tau^2\psi_1(\tau) \leqq 1, \quad \limsup \tau^{\frac{1}{2}}\psi_2(\tau) \leqq 1$$

(für $s=2$). Satz 1 folgt offenbar aus Satz 2. Aber auch die Behauptung 2 folgt aus der Behauptung 1; es genügt zu bemerken, dass für $0 < A \leqq 1 \leqq B$ gilt $A^{-1}\varphi_1(A\tau) \leqq \varphi_1(\tau) \leqq A^{-m}\varphi_1(A\tau)$, $B^{-1}\varphi_1(B\tau) \geqq \varphi_1(\tau) \geqq B^{-m}\varphi_1(B\tau)$ und dass auch für $\varphi_2(\tau)$ entsprechende Ungleichungen gelten.

Wir wenden uns nun dem Falle $s > 2$ zu. Dem Satz 1. entspricht hier folgender

---

[6] Oder, was desselbe besagt: es gebe ein $m > 0$, so dass $\tau^{-\frac{1}{m}}\varphi_2(\tau)$ wächst.

Satz 3. *Es sei* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ *ein eigentliches System*, $s > 2$, $\alpha = \alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\beta = \beta(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ [7].

Behauptungen: 1)

$$\beta \geqq (s-1) + s(1-\alpha) \tag{4}$$

$$\alpha \leqq \frac{s-2}{s-1} + \frac{s}{s-1} \quad \frac{1}{(s-1)\beta + s}. \tag{5}$$

2) *Für* $\alpha < \frac{1}{s}$ *ist sogar*

$$\beta \geqq s - 2 + \frac{1}{\alpha}. \tag{6}$$

3) *Für* $\beta > s(2s-3)$ *ist sogar*

$$\alpha \leqq \frac{s-2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)(\beta - 2s + 4)} {}^{8}. \tag{7}$$

Man überzeuge sich:

1) Dass (4) und (5) den Ungleichungen

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \frac{\gamma_1}{(s-1)\gamma_1 + s^2}$$

äquivalent sind, welche genau den Khintchineschen Ungleichungen (2) entsprechen.

2) Dass für $\alpha < \frac{1}{s}$ (6) schärfer als (4) und für $s(2s-3) < \beta < \infty$ (7) schärfer als (5) ist.

Im Unterschied zum Satz 1 wird durch Satz 3—von einigen Spezialfällen abgesehen—weder α durch β noch β durch α bestimmt. Z. B. für $\beta = \infty$ folgt aus Satz 3 (bei eigentlichen Systemen) nur $0 \leqq \alpha \leqq \frac{s-2}{s-1}$; und wir werden zeigen, dass diese beiden Schranken tatsächlich angenommen werden:

Satz 4. *Es sei* $s > 2$; *dann gibt es zwei eigentliche Systeme* $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$, $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ *mit* $\beta(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \beta(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \infty$, $\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \frac{s-2}{s-1}$, $\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_s) = 0$ [9].

---

[7] Also: $0 \leqq \alpha \leqq \frac{s-1}{s}$, $s \leqq \beta \leqq \infty$.

[8] Für $\alpha = 0$ lautet (6) $\beta = \infty$; für $\beta = \infty$ lautet (5) und (7) $\alpha \leqq \frac{s-2}{s-1}$.

[9] Für uneigentliche Systeme wäre die entsprechende Behauptung sehr leicht zu beweisen; aber die uneigentlichen Systeme sind eben als störende Ausnahmefälle zu betrachten. Z. B. wäre Satz 1. für uneigentliche Systeme falsch: denn für $\beta(\theta_1, \theta_2) = \infty$ kann für uneigentliche Systeme entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = -\infty$ sein.

Satz 4 ist, wie wir jetzt zeigen werden, eine Folge der beiden folgenden Sätze.

Satz 5[10]. *Es sei* $s>1$, $\varphi(\tau)\to\infty$ *für* $\tau\to\infty$. *Dann gibt es ein eigentliches System* $\eta_1, \ldots, \eta_s$ *mit*

$$\psi_2(\tau, \eta_1, \ldots, \eta_s)=o\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\right).$$

Satz 6. *Es sei* $s>2$, θ_1 *irrational. Dann ist für fast alle Systeme* $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$

$$\psi_2(\tau, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})=\Omega\left(\tau^{-\frac{1}{s-1}}\right). \tag{8}$$

Aus Satz 5 mit $\varphi(\tau)=\log\tau$ folgt nämlich (für jedes $s\geqq 2$) die Existenz eines eigentlichen Systems $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ mit $\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_s)=0$; nach Satz 1. bzw. 3. ist dann $\beta(\eta_1, \ldots, \eta_s)=\infty$. Zweitens: es sei $s>2$; dann gibt es ein (zweigliedriges) eigentliches System θ_1, θ_s mit $\beta(\theta_1, \theta_s)=\infty$. Diejenigen Systeme $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$, für welche das System $\theta_1, \ldots, \theta_s$ nicht eigentlich ist, liegen auf abzählbarvielen $(s-3)$—dimensionalen Hyperebenen $\sum_{i=2}^{s-1}\theta_i x_i = -(x_0+x_1\theta_1+x_s\theta_s)$, $|x_2|+\ldots+|x_{s-1}|>0$, bilden also eine Menge vom Mass Null. Nach Satz 6 kann man also $\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ so wählen, dass das System $\theta_1, \ldots, \theta_s$ eigentlich ist und (8) gilt. Dann ist also $\beta(\theta_1, \ldots, \theta_s)\geqq\beta(\theta_1, \theta_s)=\infty$, $\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)\geqq\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_{s-1})\geqq\frac{s-2}{s-1}$, also (nach (5)) $\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\frac{s-2}{s-1}$.

Die Sätze 1, 2, 3 sind endlich offenbar in folgenden Sätzen enthalten:

Satz 7. *Es sei* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ $(s>1)$ *ein eigentliches System,* $0<K<\infty$, $\psi_i(\tau)=\psi_i(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ $(i=1,2)$. *Weiter sei* $\varphi_2(\tau)$ *für* $\tau\geqq\lambda$ *definiert, stetig und wachsend,* $\tau^{-1}\varphi_2(\tau)$ *nicht wachsend,* $\varphi_2(\tau)\to\infty$ *für* $\tau\to\infty$,

$$\limsup_{\tau=\infty}\frac{\tau}{\varphi_2(\tau)}\psi_2(\tau)<K; \tag{9}$$

$\varphi_1(\tau)$ *sei die zu* $\varphi_2(\tau)$ *inverse Funktion.*

1) *Dann ist*

$$\limsup_{\tau=\infty}\frac{\tau^{2s-1}}{\varphi_2(\tau^s)}\psi_1(\tau)\leqq s^{2s}K. \tag{10}$$

2) *Ist* $\varphi_2(\tau)\leqq\tau^{\frac{1}{s}}$ *für alle* $\tau\geqq\lambda$, *so ist*

$$\limsup_{\tau=\infty}\tau^{s-2}\varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)\psi_1(\tau)\leqq s^s(1+K). \tag{11}$$

[10] Satz 5. ist nicht neu; er stammt von A. Khintchine, l. c.[1]), Satz II. Ich gebe im Folgenden für den Satz 5 einen anderen Beweis.

Satz 8. *Es sei* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ $(s>1)$ *ein eigentliches System,* $0<K<\infty$, $\psi_i(\tau)=$ $=\psi_i(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ $(i=1, 2)$. *Weiter sei* $\varphi_1(\tau)$ *für* $\tau \geqq \mu$ *definiert, stetig, positiv und wachsend,* $\varphi_1(\tau)\to\infty$ *für* $\tau\to\infty$,

$$\limsup_{\tau=\infty} \varphi_1(\tau)\psi_1(\tau)<K. \tag{12}$$

1) *Dann ist*

$$\limsup_{\tau=\infty} \left(\frac{\tau}{\rho\left(\tau K^{\frac{s-1}{s}}\right)}\right)^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau) \leqq 3s^2(1+K), \tag{13}$$

wo $\rho(\tau)$ *die zu* $\tau\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(\tau)$ *inverse Funktion ist.*

2) *Ist*

$$\varphi_1(\tau)\tau^{-2s+3} \text{ wachsend, } \varphi_1(\tau)\geqq\tau^{s(2s-3)} \text{ für } \tau\geqq\mu, \tag{14}$$

so ist

$$\limsup_{\tau=\infty} \left(\frac{\tau}{\varphi_2(\tau K)}\right)^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau) \leqq 3s^2(1+K), \tag{15}$$

wo $\varphi_2(\tau)$ *die zu* $\varphi_1(\tau)\tau^{-2s+4}$ *inverse Funktion ist.*

Zum Schluss möchte ich noch folgende Folgerung des Satzes 2 hervorheben (die man freilich auch sehr einfach direkt beweisen kann):

Satz 9. θ_1, θ_2 *ist dann und nur dann ein eigentliches System, wenn*

$$\limsup_{\tau=\infty} \tau\psi_2(\tau, \theta_1, \theta_2)=\infty \tag{16}$$

ist.

In der Tat, es sei zunächst θ_1, θ_2 ein uneigentliches System, also z. B. $\theta_2=\frac{1}{c}(a\theta_1+b)$, $c>0$. Zu $\tau>2c$ gibt es ein $q\leqq\frac{\tau}{c}$ mit $|q\theta_1-p|<\left[\frac{\tau}{c}\right]^{-1}$ $<\frac{2c}{\tau}$, also $|cq\theta_1-cp|<\frac{2c^2}{\tau}$, $|cq\theta_2-r|\leqq\frac{2c|a|}{\tau}$, also $\psi_2(\tau)=O(\tau^{-1})$ [11]. Es sei zweitens θ_1, θ_2 ein eigentliches System, also $\psi_1(\tau)>0$, also gibt es eine für $\tau\geqq 1$ stetige Funktion $\varphi_1(\tau)$, so dass $\varphi_1(\tau)\geqq\tau^2$, $\tau^{-1}\varphi_1(\tau)$ wächst und

---

[11] Bekanntlich beweist man auf dieselbe Weise allgemeiner: ist $\theta_1, \ldots, \theta_s$ $(s>1)$ ein uneigentliches System, so ist

$$\psi_2(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)=O\left(\tau^{-\frac{1}{s-1}}\right).$$

$\psi_1(\tau)\varphi_1(\tau)\to\infty$ für $\tau\to\infty$ ist. Es sei φ_2 die zu φ_1 inverse Funktion, also $\varphi_2(\tau)\to\infty$ für $\tau\to\infty$. Wäre

$$\limsup_{\tau=\infty}\frac{\tau\psi_2(\tau)}{\varphi_2(\tau)}<\frac{1}{2}, \tag{17}$$

so wäre nach Satz 2.

$$\limsup_{\tau=\infty}\varphi_1(\tau)\psi_1(\tau)\leqq 6<\infty,$$

was nicht der Fall ist. Also ist (17) falsch, also (16) wahr.

Für $s>2$ kann es keine solche notwendige und hinreichende Bedingung geben: dafür, dass $\theta_1,\dots,\theta_s$ ein uneigentliches System sei, ist die Bedingung $\psi_2(\tau)=O(\tau^{-1})$ nach Satz 9 hinreichend[12] und die Bedingung $\psi_2(\tau)=O\left(\tau^{-\frac{1}{s-1}}\right)$ notwendig (Fussnote[11]); und beide Bedingungen sind scharf: ist $\varphi(\tau)\to\infty$ für $\tau\to\infty$, so gibt es nach Satz 5 ein eigentliches System mit $\psi_2(\tau)=o(\tau^{-1}\varphi(\tau))$; andererseits gibt es ein uneigentliches System mit $\psi_2(\tau)=\Omega\left(\tau^{-\frac{1}{s-1}}\right)$ (man nehme ein System $\theta_1,\dots,\theta_{s-1}$ mit (8)[13] und setze $\theta_s=\theta_{s-1}$).

§ 2. Beweise

Es genügt, die Sätze 5, 6, 7, 8 zu beweisen. Zum Beweis der Sätze 7, 8 habe ich zunächst die ursprüngliche Khintchinesche Methode (l. c.[1]) benutzt. Herr K. Mahler hat mir aber freundlichst folgenden Hilfssatz mitgeteilt, welcher mir ermöglicht, die Beweise zu vereinfachen.

Hilfssatz.[14] *Es seien*

$$F_h(\xi)=\sum_{k=0}^{s}\alpha_{hk}\xi_k,\quad G_h(\eta)=\sum_{k=0}^{s}\beta_{hk}\eta_k\quad(0\leqq h\leqq s)$$

je $s+1$ ($s>0$) *Linearformen in den Veränderlichen* ξ_k *bzw* η_k; $D\neq 0$ *sei die Determinante der* β_{hk}. *Die Bilinearform*

$$\sum_{h=0}^{s}F_h(\xi)G_h(\eta)$$

---

[12] Dann ist schon θ_1, θ_2 ein uneigentliches System.

[13] Statt dez Satzes 6 kann man folgenden Satz des Herrn Perron benutzen: ist $\theta_1,\dots,\theta_{s-1}$ ein eigentliches System von Zahlen, die sämtlich in einem algebraischen Körper s-ten Grades liegen, so gilt (8), ja sogar $\liminf\left(\tau^{\frac{1}{s-1}}\psi_2(\tau,\theta_1,\dots,\theta_{s-1})\right)>0$ (vgl. Perron, l. c.[2])).

[14] Diesen Hilfssatz (und ebenso den Zusatz und den folgenden Beweis) verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Mahler. Auch die Idee, den Minkowskischen Linearformensatz zum Beweis der Übertragungssätze zu benutzen, stammt von ihm (vgl. seine l. c.[1]) zitierte Arbeit).

möge lauter ganzzahlige Koeffizienten haben. Endlich gebe es ein System $a_0, a_1, \ldots, a_s$ *und* $s+1$ *positive Zahlen* $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ *mit*

$$|F_h(a)| \leqq \sigma_h \quad (0 \leqq h \leqq s),$$

wobei für mindestens ein h *die Gleichung* $|F_h(a)| = \sigma_h$ *gilt; man setze*

$$\delta = (|D|\sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_s)^{\frac{1}{s}}.$$

Dann gibt es Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_s$ *mit*

$$(18) \qquad |G_h(b)| \leqq s\frac{\delta}{\sigma_h} \quad (0 \leqq h \leqq s), \quad \sum_{h=0}^{s} |b_h| > 0.$$

Zusatz.[14] *Ist z. B.* $|F_0(a)| = \sigma_0$, *so kann man statt* (18) *schreiben:*

$$|G_0(b)| \leqq s\frac{\delta}{\sigma_0}, \quad |G_h(b)| \leqq \frac{\delta}{\sigma_h} \quad (1 \leqq h \leqq s), \quad \sum_{h=0}^{s} |b_h| > 0.$$

Beweis.[14] O. B. d. A. (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei $|F_0(a)| = \sigma_0$. Die Determinante der $s+1$ Linearformen[15]

$$\sum_{h=0}^{s} F_h(a) G_h(\eta), \ G_1(\eta), \ G_2(\eta), \ldots, \ G_s(\eta)$$

ist absolut gleich $|F_0(a)D| = \sigma_0|D|$. Nach dem Minkowskischen Linearformensatz gibt es also $s+1$ Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_s$ mit

$$\sum_{h=0}^{s} |b_h| > 0, \quad |G_h(b)| \leqq \frac{\delta}{\sigma_h} \quad (1 \leqq h \leqq s), \quad \left|\sum_{h=0}^{s} F_h(a) G_h(b)\right| < 1.$$

Die linke Seite der letzten Ungleichung ist eine ganze Zahl, also Null, also

$$|G_0(b)| = \left|\frac{1}{F_0(a)} \sum_{h=1}^{s} F_h(a)\, G_h(b)\right| \leqq \frac{s\delta}{\sigma_0}.$$

---

[15] Mit den Veränderlichen η_h.

Beweis des Satzes 7. $\psi_2(\tau)$ ist eine positive, stückweise konstante Funktion mit unendlichvielen Sprungstellen $q_1 < q_2 < \dots$.

Für $q_n \leqq \tau < q_{n+1}$ ist nach (9)

$$\psi_2(q_{n+1}) < \psi_2(q_n) = \psi_2(\tau) < \frac{K}{\tau}\varphi_2(\tau),$$

wenn n hinreichend gross ist.[16] Also durch Grenzübergang $\tau \to q_{n+1}$

$$\psi_2(q_n) \leqq K \frac{\varphi_2(q_{n+1})}{q_{n+1}}. \tag{19}$$

Weiter gibt es zu jedem $n > 0$ ein System $p_{n,1}, p_{n,2}, \dots, p_{n,s}$ mit

$$(p_{n,1}, \dots, p_{n,s}, q_n) = 1, \quad \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq s} |q_n \theta_i - p_{n,i}| = \psi_2(q_n). \tag{20}$$

Es sei $n > 0$, $A \geqq 1$; man wende den Hilfssatz an mit

$$F_0(\xi) = -\xi_0, \quad F_h(\xi) = \xi_0\theta_h - \xi_h \quad (1 \leqq h \leqq s);$$

$$G_0(\eta) = \sum_{i=1}^{s} \eta_i\theta_i + \eta_0, \quad G_h(\eta) = \eta_h \quad (1 \leqq h \leqq s); \quad |D| = 1;$$

$$a_0 = q_n, \quad a_h = p_{n,h} \quad (1 \leqq h \leqq s);$$

$$\sigma_0 = A^s q_n, \quad \sigma_h = \psi_2(q_n) \quad (1 \leqq h \leqq s); \quad \delta = A q_n^{\frac{1}{s}} \psi_2(q_n).$$

Es ergibt sich die Existenz von $s+1$ Zahlen $y_0, y_1, \dots, y_s$ mit

$$\left|\sum_{i=1}^{s} y_i\theta_i + y_0\right| \leqq \frac{s\psi_2(q_n)}{A^{s-1} q_n^{\frac{s-1}{s}}}, \quad \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq s} |y_i| \leqq s A q_n^{\frac{1}{s}}, \quad \sum_{i=1}^{s} |y_i| > 0.\text{[17]} \tag{21}$$

I. Ist τ hinreichend gross und wird n durch

$$s q_n^{\frac{1}{s}} \leqq \tau < s q_{n+1}^{\frac{1}{s}} \tag{22}$$

---

[16] «Hinreichend gross» bedeutet in diesem Beweis: grösser als eine nur von $\theta_1, \dots, \theta_s$, $\varphi_2(\tau)$, K abhängige Zahl.

[17] Es kommt eigentlich nur $\sum_{s=0}^{i} |y_i| > 0$ heraus; ist aber die rechte Seite der ersten Ungleichung (21) kleiner als 1, so kann nicht $\sum_{i=1}^{s} |y_i| = 0$, $y_0 \neq 0$ sein; ist die genannte rechte Seite $\geqq 1$, so kann man (21) mit $y_1 = y_2 = \dots = y_s = 1$ und mit einem geeigneten y_0 befriedigen.

definiert, so liefert (19) und (21) mit $A=\frac{\tau}{s q_n^{\frac{1}{s}}}$ die Ungleichung

$$\psi_1(\tau) \geqq \frac{s^s K \varphi_2(q_{n+1})}{\tau^{s-1} q_{n+1}}.$$

Da $\varphi_2(\tau)$ wächst und $\tau^{-1}\varphi_2(\tau)$ nicht wächst, so ist wegen (22)

$$\frac{\varphi_2(q_{n+1})}{q_{n+1}} \leqq \varphi_2\left(\frac{\tau^s}{s^s}\right) \cdot \frac{s^s}{\tau^s} < \varphi_2(\tau^s) \cdot \frac{s^s}{\tau^s},$$

also

$$\psi_1(\tau) < \frac{s^{2s} K \varphi_2(\tau^s)}{\tau^{2s-1}},$$

womit (10) bewiesen ist.

II. Es sei $\varphi_2(\tau) \geqq \tau^{\frac{1}{s}}$ für alle $\tau \geqq \lambda$; es sei τ hinreichend gross und n werde durch

(23) $$2K\varphi_2(q_{n+1}) \leqq \tau < 2K\varphi_2(q_{n+2})$$

definiert. Man beachte $q_{n+2} > \varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)$, also (da $\tau^{-1}\varphi_2(\tau)$ nicht wächst)

(24) $$\frac{\varphi_2(q_{n+2})}{q_{n+2}} \leqq \frac{\tau}{2K\varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)}.$$

Ist

(25) $$\tau < s\left(\frac{q_{n+1}}{\varphi_2(q_{n+1})}\right)^{\frac{1}{s-1}},$$

so betrachte man die Ungleichungen

(26) $$|q_n\theta_i - p_{n,i}| \leqq \frac{K\varphi_2(q_{n+1})}{q_{n+1}}, \quad |q_{n+1}\theta_i - p_{n+1,i}| \leqq \frac{K\varphi_2(q_{n+2})}{q_{n+2}} \leqq \frac{K\varphi_2(q_{n+1})}{q_{n+1}}$$

$$(1 \leqq i \leqq s)$$

und beachte, dass wegen $0 < q_n < q_{n+1}$ und wegen (20) für mindestens ein i $(1 \leqq i \leqq s)$ die Ungleichung $\frac{p_{n,i}}{q_n} \neq \frac{p_{n+1,i}}{q_{n+1}}$ gilt. O. B. d. A. sei $x = p_{n,2}q_{n+1} -$

$-p_{n+1,2}q_n \neq 0$; man setze noch $y=-p_{n,1}q_{n+1}+p_{n+1,1}q_n$, $z=p_{n,1}p_{n+1,2}-p_{n+1,1}p_{n,2}$; dann ist nach (26)

$$0<\operatorname{Max}(|x|, |y|)\leqq 2K\varphi_2(q_{n+1})\leqq \tau,$$

$$\left| x\theta_1+y\theta_2+z\right| = \left| x\left(\theta_1-\frac{p_{n+1,1}}{q_{n+1}}\right)+y\left(\theta_2-\frac{p_{n+1,2}}{q_{n+1}}\right)\right|$$

$$\leqq 4K^2\frac{\varphi_2(q_{n+1})\varphi_2(q_{n+2})}{q_{n+1}q_{n+2}}.$$

Nach (24), (25) ist also

$$\psi_1(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)\leqq \psi_1(\tau, \theta_1, \theta_2)\leqq \frac{2s^{s-1}K}{\tau^{s-2}\varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)}. \tag{27}$$

Ist aber

$$\tau \geqq s\left(\frac{q_{n+1}}{\varphi_2(q_{n+1})}\right)^{\frac{1}{s-1}},$$

so ist $\tau\geqq sq_{n+1}^{\frac{1}{s}}$ (wegen $\varphi_2(q_{n+1})\leqq q_{n+1}^{\frac{1}{s}}$), also ist nach (21) mit $n+1$ statt n und mit $A=\dfrac{\tau}{sq_{n+1}^{\frac{1}{s}}}$

$$\psi_1(\tau)\leqq \frac{s^s}{\tau^{s-1}}\,\psi_2(q_{n+1})\leqq \frac{s^s}{\tau^{s-1}}\,K\frac{\varphi_2(q_{n+2})}{q_{n+2}}\leqq \frac{s^s}{2\tau^{s-2}\varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)} \tag{28}$$

(vgl (24). Für jedes hinreichend grosse τ gilt also entweder (27) oder (28); damit ist auch (11) bewiesen.

B e w e i s d e s S a t z e s 8. $\psi_1(\tau)$ ist eine positive, stückweise konstante Funktion mit unendlichvielen Sprungstellen $u_1<u_2<\ldots$. Für $u_n\leqq \tau<u_{n+1}$ ist nach (12)

$$\psi_1(u_{n+1})<\psi_1(u_n)=\psi_1(\tau)<\frac{K}{\varphi_1(\tau)},$$

wenn n hinreichend gross[18] ist, also

$$\psi_1(u_n)\leqq \frac{K}{\varphi_1(u_{n+1})}. \tag{29}$$

[18] «Hinreichend gross» bedeutet in diesem Beweis: grösser als eine nur von $\theta_1,\ldots,\theta_s$, $\varphi_1(\tau)$, K abhängige Zahl.

Zu jedem $n>0$ gibt es ein System $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,s}$ mit

(30) $$\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq s}|x_{n,i}|=u_n,\ (x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,s})=1, \quad \left|\sum_{i=1}^{s} x_{n,i}\theta_i+x_{n,0}\right|=\psi_1(u_n).$$

Es sei n hinreichend gross, $A\geqq 1$; man wende den Hilfssatz an mit

$$F_0(\xi)=\sum_{i=1}^{s}\xi_i\theta_i+\xi_0,\ F_h(\xi)=\xi_h \quad (1\leqq h\leqq s);$$

$$G_0(\eta)=-\eta_0,\ G_h(\eta)=\eta_0\theta_h-\eta_h\ (1\leqq h\leqq s);\ |D|=1;\ a_h=x_{n,h}\ (0\leqq h\leqq s);$$

$$\sigma_0=\frac{A^sK}{\varphi_1(u_{n+1})},\quad \sigma_h=u_n\ (1\leqq h\leqq s);\ \delta=\frac{AK^{\frac{1}{s}}u_n}{\varphi_1^{\frac{1}{s}}(u_{n+1})}.$$

Wegen (29), (30) ergibt sich die Existenz von $s+1$ Zahlen $q, p_1, \ldots, p_s$ mit

(31) $$\begin{cases} |q|\leqq \dfrac{su_n\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}}A^{s-1}},\quad |q\theta_i-p_i|\leqq \dfrac{sAK^{\frac{1}{s}}}{\varphi_1^{\frac{1}{s}}(u_{n+1})} \quad (1\leqq i\leqq s),\\[2ex] |q|+|p_1|+\ldots+|p_s|>0.\end{cases}$$

Daraus folgt: ist

(32) $$\tau\geqq s\frac{u_n\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}}},$$

so ist

(33) $$\psi_2(\tau)\leqq s\frac{K^{\frac{1}{s}}}{\varphi_1^{\frac{1}{s}}(u_{n+1})}$$

(man setze in (31) $A=1$, also $|q|\leqq\tau$ und $|q\theta_i-p_i|<1$ für $1\leqq i\leqq s$, also $q\neq 0$, also o. B. d. A. $q>0$).

Ist aber

(34) $$s^s\cdot 3(1+K)u_n<\tau<3(1+K)s\frac{u_n\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}}},$$

so ist

(35)
$$\psi_2(\tau) \leqq 3(1+K)s^2 \left(\frac{u_n}{\tau}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

(man setze in (31)

$$A>0,\ A^{s-1} = 3(1+K)s \frac{u_n \varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}} \tau} > 1;$$

dann folgt aus (31) $|q| \leqq \tau$ und (wegen (34)) $|q\theta_i - p_i| < 1$ für $1 \leqq i \leqq s$, also $q \neq 0$, also o. B. d. A. $q>0$).

I. Es sei nun τ hinreichend gross; n werde durch

(36)
$$s \frac{u_n \varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}}} \leqq \tau < s \frac{u_{n+1} \varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+2})}{K^{\frac{s-1}{s}}}$$

definiert. Ist

$$\tau < \frac{u_{n+1} \varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}}}, \quad \text{also} \quad u_{n+1} > \rho(\tau K^{\frac{s-1}{s}}),$$

so ist nach (33)

$$\psi_2(\tau) \leqq \frac{sK^{\frac{1}{s}}}{\varphi_1^{\frac{1}{s}}(u_{n+1})} < \frac{sK^{\frac{1}{s}}}{\varphi_1^{\frac{1}{s}}\left(\rho(\tau K^{\frac{s-1}{s}})\right)} = s\left(\frac{\rho(\tau K^{\frac{s-1}{s}})}{\tau}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

(denn $\rho(\xi)\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(\rho(\xi)) = \xi$). Ist aber

$$\tau \geqq \frac{u_{n+1} \varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+1})}{K^{\frac{s-1}{s}}}, \quad \text{also} \quad u_{n+1} \leqq \rho(\tau K^{\frac{s-1}{s}}),$$

so darf man wegen (36) die Formel (35) mit $n+1$ statt n anwenden und bekommt

$$\psi_2(\tau) \leqq 3(1+K)s^2 \left(\frac{\rho(\tau K^{\frac{s-1}{s}})}{\tau}\right)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Damit ist aber (13) bewiesen.

II. Man setze nun voraus, dass (14) gilt; wir wollen noch (15) beweisen. Es sei τ hinreichend gross; n werde durch

$$(37)\qquad 2u_n u_{n+1}\left(\frac{s u_n \varphi_1(u_{n+1})}{K}\right)^{\frac{s-2}{s-1}} \leqq \tau < 2u_{n+1}u_{n+2}\left(\frac{s u_{n+1}\varphi_1(u_{n+2})}{K}\right)^{\frac{s-2}{s-1}}$$

definiert. Man setze noch

$$(38)\qquad \tau_0 = \frac{\varphi_1(u_{n+1})}{K u_n^{s-2}\, u_{n+1}^{s-2}}\,;$$

wegen (14) ist also

$$(39)\qquad \tau_0 \geqq \frac{1}{K}\,\varphi_1(u_{n+1})\, u_{n+1}^{-2s+4} \geqq \frac{1}{K}\, u_{n+1}^{2} > s^s \cdot 3(1+K)u_{n+1};$$

$$3(1+K)s\,\frac{u_{n+1}\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(u_{n+2})}{K^{\frac{s-1}{s}}}\,2^{-1}\,u_{n+1}^{-1}u_{n+2}^{-1}\left(\frac{s u_{n+1}\varphi_1(u_{n+2})}{K}\right)^{\frac{-s+2}{s-1}}$$

$$\geqq \frac{3}{2}\left(K^{-\frac{1}{s(s-1)}} + K^{1-\frac{1}{s(s-1)}}\right)\varphi_1^{\frac{1}{s(s-1)}}(u_{n+2})\, u_{n+2}^{-1-\frac{s-2}{s-1}} > 1.$$

Ist also erstens $\tau > \tau_0$, so ist (34) mit $n+1$ statt n erfüllt, also ist nach (35)

$$(40)\qquad \psi_2(\tau) \leqq 3(1+K)s^2\left(\frac{u_{n+1}}{\tau}\right)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Aus $\tau > \tau_0$ folgt aber nach (39)

$$u_{n+1} \leqq \varphi_2(\tau_0 K) < \varphi_2(\tau K),$$

also nach (40)

$$(41)\qquad \psi_2(\tau) \leqq 3(1+K)s^2\left(\frac{\varphi_2(\tau K)}{\tau}\right)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Es sei zweitens $\tau \leqq \tau_0$ (und freilich (37) erfüllt); wir wollen zeigen, dass auch in diesem Falle (41) gilt; dadurch wird (15) bewiesen sein.

Wir werden zeigen, dass für $\tau \leqq \tau_0$ gilt

$$\psi_2(\tau) \leqq 4sK^{\frac{1}{s-1}} u_{n+1} \frac{u_n^{\frac{s-2}{s-1}}}{\varphi_1^{\frac{1}{s-1}}(u_{n+1})}. \tag{42}$$

Das wird genügen. Aus (14) folgt nämlich, dass $\varphi_1(\tau)\tau^{-2s+4} \cdot \tau^{-1}$ wächst, also $\frac{\xi}{\varphi_2(\xi)}$ wächst, $\frac{\varphi_2(\xi)}{\xi}$ abnimmt; aus (39) folgt $u_{n+1} \leqq \varphi_2(\tau_0 K)$ und (42) ergibt dann für $\tau \leqq \tau_0$ (wegen (38))

$$\psi_2(\tau) \leqq 4s\tau_0^{-\frac{1}{s-1}} u_{n+1}^{\frac{1}{s-1}} \leqq 4s\left(\frac{\varphi_2(\tau_0 K)}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

$$\leqq 4s\left(\frac{\varphi_2(\tau K)}{\tau}\right)^{\frac{1}{s-1}},$$

also (41).

Also sei $\tau \leqq \tau_0$. Es ist

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_{n,i}\theta_i + x_{n,0}\right| \leqq \frac{K}{\varphi_1(u_{n+1})},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_{n+1,i}\,\theta_i + x_{n+1,0}\right| \leqq \frac{K}{\varphi_1(u_{n+2})} < \frac{K}{\varphi_1(u_{n+1})}. \tag{43}$$

Wäre $x_{n,i}\, x_{n+1,k} - x_{n+1,i}\, x_{n,k} = 0$ für alle i, k mit $1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq k \leqq s$, so wäre für $1 \leqq i \leqq s$ nach (43), (14)

$$|x_{n,0}x_{n+1,i} - x_{n+1,0}\, x_{n,i}| \leqq \frac{2Ku_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})} < 1,$$

also auch $x_{n,0}x_{n+1,i} - x_{n+1,0}x_{n,i} = 0$; also wäre mit ganzen von i unabhängigen $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$ax_{n,i} = bx_{n+1,i} \quad \text{für} \quad 0 \leqq i \leqq s,$$

was wegen $0 < u_n < u_{n+1}$ und (30) unmöglich ist. O. B. d. A sei

$$C = |x_{n,1}x_{n+1,2} - x_{n+1,1}x_{n,2}| > 0,$$

also $0 < C \leqq 2u_n u_{n+1}$. Für $s = 2$ ist also nach (37) $0 < C \leqq \tau$ und mit geeigneten ganzen R, S nach (43)

$$|C\theta_1 - R| < \frac{2Ku_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})}, \quad |C\theta_2 - S| < \frac{2Ku_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})},$$

womit (42) bewiesen ist. Es sei also jetzt $s>2$; aus (43) folgt mit geeigneten ganzen A_i, B_i ($i=0, 3, 4, \ldots, s$)

$$
(44)\quad \begin{cases} C\theta_1 = A_3\theta_3 + \ldots + A_s\theta_s + A_0 + \dfrac{2Ku_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})}\varepsilon_1, \ |\varepsilon_1| \leqq 1, \\[2ex] C\theta_2 = B_3\theta_3 + \ldots + B_s\theta_s + B_0 + \dfrac{2Ku_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})}\varepsilon_2, \ |\varepsilon_2| \leqq 1, \\ 0 < C \leqq 2u_n u_{n+1}, \quad |A_i| \leqq 2u_n u_{n+1}, \quad |B_i| \leqq 2u_n u_{n+1} (3 \leqq i \leqq s). \end{cases}
$$

Man setze nun

$$
(45)\qquad \zeta = \left(\frac{su_n\varphi_1(u_{n+1})}{K} \right)^{\frac{s-2}{s-1}}
$$

(also $\zeta \to \infty$ für $n \to \infty$, d. h. für $\tau \to \infty$) und finde Zahlen q, p_i ($3 \leqq i \leqq s$) mit

$$
(46)\qquad 0 < q \leqq \zeta, \quad |q\theta_i - p_i| < \frac{1}{\left[\zeta^{\frac{1}{s-2}}\right]} \quad (3 \leqq i \leqq s).
$$

Dann ist mit geeigneten ganzen P_i nach (46), (44) (alles für hinreichend grosse τ)

$$
(47)\qquad |Cq\theta_i - P_i| < 2su_n u_{n+1}\zeta^{-\frac{1}{s-2}} + \frac{2K\zeta u_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})} \quad (1 \leqq i \leqq s).
$$

Nach (37), (45) ist $0 < Cq \leqq 2u_n u_{n+1}\zeta \leqq \tau$; nach (47), (45) ist also

$$
\psi_2(\tau) < 2su_n u_{n+1} \left(\frac{K}{su_n\varphi_1(u_{n+1})} \right)^{\frac{1}{s-1}} + 2K\frac{u_{n+1}}{\varphi_1(u_{n+1})} \left(\frac{su_n\varphi_1(u_{n+1})}{K} \right)^{\frac{s-2}{s-1}},
$$

woraus (42) folgt.

B e w e i s d e s S a t z e s 5. O. B. d. A. sei $\tau^{-1}\varphi(\tau)$ abnehmend. Man wähle eine Folge $0 < q_1 < q_2 < \ldots$, so dass (O und o beziehen sich auf wachsendes n, bzw. später auf wachsendes τ)

$$
n^s q_n = o(\varphi(q_{n+1})), \quad \frac{n^s}{q_{n+1}} < \frac{1}{n^2 q_n},
$$

also

$$
n^s q_n = o(q_{n+1}), \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^s}{q_{k+1}} < \frac{1}{q_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = o\left(\frac{1}{q_{n+1}}\right).
$$

Dann wähle man $p_{n,i}$ $(1 \leqq i \leqq s,\ n \geqq 1)$, so dass

$$\frac{n^i}{q_{n+1}} < \frac{p_{n+1,i}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n,i}}{q_n} < \frac{n^i+2}{q_{n+1}};$$

also existiert $\lim\limits_{n=0} \frac{p_{n,i}}{q_n} = \eta_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ und für grosse n ist

$$\frac{n^i}{q_{n+1}} < \eta_i - \frac{p_{n,i}}{q_n} < \frac{n^i+2}{q_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^i+2}{q_{k+1}} < \frac{n^i+3}{q_{n+1}}.$$

Aus $x_1\eta_1 + \ldots + x_s\eta_s + x_0 = 0$ folgt für $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{s} x_i p_{n,i} + x_0 q_n = -\sum_{i=1}^{s} x_i n^i \cdot \frac{q_n}{q_{n+1}} + O\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) = o(1),$$

also ist die linke Seite Null, also (Mittelstück!) $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i n^i = O(1)$, also (links ist ein Polynom in n) $x_1 = \ldots = x_s = 0$, also ist $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ ein eigentliches System.

Ist $\tau \geqq q_1$, so gibt es ein n mit $q_n \leqq \tau < q_{n+1}$ ($n \to \infty$ mit $\tau \to \infty$); also

$$0 < q_n \leqq \tau, \left| q_n\eta_i - p_{n,i} \right| = O\left(\frac{n^i q_n}{q_{n+1}}\right) = o\left(\frac{\varphi(q_{n+1})}{q_{n+1}}\right) = o\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\right),$$

also $\psi_2(\tau, \eta_1, \ldots, \eta_s) = o\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\right)$.

B e w e i s d e s S a t z e s 6. Es sei $s > 2$, θ_1 irrational; es gibt dann eine Folge von Zahlenpaaren s_n, t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $1 < t_1 < t_2 < \ldots$, $(s_n, t_n) = 1$, $|t_n\theta_1 - s_n| < t_n^{-1}$. Es sei W der $(s-2)$-dimensionale Einheitswürfel $0 \leqq \eta_i < 1$ $(2 \leqq i \leqq s-1)$. μN bedeute allgemein das ($(s-2)$-dimensionale) Lebesguesche Mass einer Menge N. Für $m > 0$, $n > 0$ sei $M(m, n)$ die Menge derjenigen Punkte $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$ aus W, für welche

$$t_n^{\frac{1}{s-1}} \psi_2\left(t_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\right) < \frac{1}{m} \tag{48}$$

ist. Wir werden

$$\mu M(m, n) < 2 \frac{4^{s-2}}{m^{s-1}} + 3\left(\frac{4}{m} t_n^{-\frac{1}{s-1}}\right)^{s-2} \tag{49}$$

beweisen. Daraus wird schon der Satz 6 folgen. Es sei nämlich M die Menge aller Punkte $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$ aus W mit

$$\lim_{\tau=\infty} \tau^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}) = 0; \tag{50}$$

dann ist offenbar

$$M \subset \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} M(m, n).$$

Für jedes $n_0 \geqq k$ ist

$$N(m, k) = \prod_{n=k}^{\infty} M(m, n) \subset M(m, n_0),$$

also nach (49) $\mu N(m, k) \leqq 2^{2s-3} m^{-s+1}$; da die Mengenfolge $N(m, k)$ $(k = 1, 2, \ldots; m$ fest) nicht abnimmt, so ist bekanntlich

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} N(m, k) = \lim_{k=\infty} \mu N(m, k) \leqq 2^{2s-3} m^{-s+1}.$$

Es ist aber für jedes m

$$M \subset \sum_{k=1}^{\infty} N(m, k), \quad \mu M \leqq \mu \sum_{k=1}^{\infty} N(m, k),$$

also $\mu M = 0$. Die Menge aller Punkte $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$ aus W mit (50) hat also das Mass Null; und hier kann der Zusatz «aus W» weggelassen werden, da $\psi_2(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_{s-1})$ sich nicht ändert, wenn zu den θ_i ganze Zahlen addiert werden.

Es sei also $m > 0$, $n > 0$; wir wollen (49) beweisen. Gehört ein Punkt $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$ zu $M(m, n)$ (also auch zu W), so gibt es Zahlen $q, p_1, \ldots, p_n$ mit

$$0 < q \leqq t_n, \quad \left| q\theta_1 - p_1 \right| < \frac{1}{m} t_n^{-\frac{1}{s-1}}, \tag{51}$$

$$\left| q\theta_i - p_i \right| < \frac{1}{m} t_n^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 0 \leqq p_i \leqq q \quad (2 \leqq i \leqq s-1). \tag{52}$$

Die Punkte $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$ mit (52) fallen — bei gegebenem q genau

$(q+1)^{s-2} \leqq (2q)^{s-2}$ Würfel aus, deren Gesamtinhalt höchstens gleich

$$(2q)^{s-2} \cdot \frac{2^{s-2}}{m^{s-2} q^{s-2}} t_n^{-\frac{s-2}{s-1}} = \left(\frac{4}{m} t_n^{-\frac{1}{s-1}}\right)^{s-2}$$

ist. Also ist

$$\mu M(m, n) \leqq A \left(\frac{4}{m} t_n^{-\frac{1}{s-1}}\right)^{s-2},$$

wo A die Anzahl derjenigen q ist, zu welchen es ein p_1 mit (51) gibt. Aus (51) folgt aber

$$\left| q s_n - p_1 t_n \right| < m^{-1} t_n^{\frac{s-2}{s-1}} + 1,$$

also

(53) $$q s_n \equiv a \pmod{t_n},$$

wo $|a| < m^{-1} t_n^{\frac{s-2}{s-1}} + 1$. Da aber die Kongruenz (53) für jedes a genau eine Lösung q mit $0 < q \leqq t_n$ hat, so ist

$$A < 2m^{-1} t_n^{\frac{s-2}{s-1}} + 3,$$

woraus (49) folgt.

Prag, den 30. September 1937.

(Eingegangen am 8. November 1937.)

В. ЯРНИК (Прага)

О «ТЕОРЕМЕ ПЕРЕНОСА» ХИНЧИНА

(Резюме)

Пусть греческие и большие латинские буквы обозначают действительные, а малые латинские —целые числа. Система $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ s чисел называется собственной, если из $x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_0 = 0$ следует $x_1 = \ldots = x_s = x_0 = 0$.

Если $\tau \geqq 1$, то положим

$$\psi_1(\tau) = \psi(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s) = \min_{\substack{0 < \max |x_i| \leqq \tau \\ 1 \leqq i \leqq s}} |x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_0|,$$

$$\psi_2(\tau)=\psi_2(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)=\operatorname*{Min}_{0<q\leqq\tau}\ (\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq s} |q\theta_i-p_i|\ ).$$

Числа $\gamma_1=\gamma_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\gamma_2=\gamma_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\beta=\beta(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\alpha=\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ определяются следующим образом:

β_1 верхняя грань тех λ, для которых

$$\limsup_{\tau=\infty} \psi_1(\tau)\cdot\tau^{s+\lambda}<\infty;$$

β_2 верхняя грань тех λ, для которых

$$\limsup_{\tau=\infty} \psi_2(\tau)\cdot\tau^{\frac{1+\lambda}{s}}<\infty;$$

$$\beta=\gamma_1+s, \qquad \alpha=1-\frac{1+\gamma_2}{s}.$$

Иначе это можно выразить так: β это верхняя грань тех λ, для которых $\psi_1(\tau)=O(\tau^{-\lambda})$; α нижняя грань тех λ, для которых $\psi_2(\tau)=O(\tau^{\lambda-1})$.

Путем элементарных метрических соображений автор доказывает следующие теоремы:

Теорема 1. *Если* $\{\theta_1, \theta_2\}$ *собственная система, то*

$$\beta(\theta_1, \theta_2)=\frac{1}{\alpha(\theta_1, \theta_2)}.$$

Теорема 2. *Пусть* θ_1, θ_2 *образуют собственную систему,* $0<K<\infty$; $\psi_i(\tau)=\psi_i(\tau, \theta_1, \theta_2)$ $(i=1, 2)$; *функция* $\varphi_1(\tau)$ *непрерывна для* $\tau\geqq\mu$ *и там* $\tau^{-1}\varphi_1(\tau)$ *возрастает,* $\varphi_1(\tau)\geqq\tau^2$; $\varphi_2(\tau)$ *функция, обратная к* $\varphi_1(\tau)$.

Тогда: 1) *Из*

$$\limsup_{\tau=\infty} \varphi_1(\tau)\psi_1(\tau)<K$$

следует

$$\limsup_{\tau=\infty} \frac{\tau}{\varphi_2(\tau K)}\psi_2(\tau)\leqq 12(1+K);$$

из

$$\limsup_{\tau=\infty} \frac{\tau}{\varphi_2(\tau)}\varphi_2(\tau)<K$$

следует

$$\limsup_{\tau=\infty} \varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right)\psi_1(\tau)\leqq 4(1+K).$$

2) *Если существует такое* $m>0$, *что* $\tau^{-m}\varphi_1(\tau)$ *убывает, то*

$$\psi_1(\tau)=O\left(\frac{1}{\varphi_1(\tau)}\right) \text{ или } \psi_1(\tau)=o\left(\frac{1}{\varphi_1(\tau)}\right)$$

тогда и только тогда, когда

$$\psi_2(\tau)=O\left(\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau}\right) \text{ или } \psi_2(\tau)=o\left(\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau}\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ *образуют собственную систему,* $s>2$, $\alpha=\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\beta=\beta(\theta_1, \ldots, \theta_s)$. *Тогда:* 1)

$$\beta \geqq (s-1)+s(1-\alpha) \tag{4}$$

$$\alpha \leqq \frac{s-2}{s-1}+\frac{s}{s-1}\,\frac{1}{(s-1)\beta+s}. \tag{5}$$

2) *Если* $\alpha<\frac{1}{s}$, *то даже*

$$\beta \geqq s-2+\frac{1}{\alpha}. \tag{6}$$

3) *Если* $\beta>s(2s-3)$, *то даже*

$$\alpha \leq \frac{s-2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)\,(\beta-2s+4)}. \tag{7}$$

Теорема 4. *Если* $s>2$, *то существуют такие две собственные системы* $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$, $\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$, *что*

$$\beta(\eta_1, \ldots, \eta_s)=\beta(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\infty,$$

$$\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_s)=\frac{s-2}{s-1},\quad \alpha(\eta_1, \ldots, \eta_s)=0.$$

Теорема 5. *Пусть* $s>1$, $\varphi(\tau)\to\infty$ *для* $\tau\to\infty$. *Тогда существует такая собственная система* $\eta_1, \ldots, \eta_s$, *что*

$$\psi_2(\tau, \eta_1, \ldots, \eta_s)=o\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\right).$$

Теорема 6. *Пусть* $s>2$, θ_1 *иррационально. Тогда для почти всех систем* $\{\theta_2, \ldots, \theta_{s-1}\}$

$$\psi_2(\tau, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})=\Omega\left(\tau^{-\frac{1}{s-1}}\right). \tag{8}$$

(«Почти всех» обозначает здесь, что точки $(\theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ $s-1$-мерного пространства, не исполняющие соотношения (8), образуют множество меры нуль.)

Теорема 7. *Пусть* $\theta_1, \ldots, \theta_s (s>1)$ *образуют собственную систему,* $0<K<\infty$; $\psi_i(\tau)=\psi_i(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ $(i=1, 2)$; *функция* $\varphi_2(\tau)$ *непрерывна и возрастающая для* $\tau \geqq \lambda$; $\tau^{-1}\varphi_2(\tau)$ *там не возрастает,* $\varphi_2(\tau)\to\infty$ *для* $\tau\to\infty$;

$$\limsup_{\tau=\infty} \frac{\tau}{\varphi_2(\tau)} \psi_2(\tau)<K; \tag{9}$$

$\varphi_1(\tau)$ *функция, обратная к* $\varphi_2(\tau)$.

Тогда: 1)

$$\limsup_{\tau=\infty} \frac{\tau^{2s-1}}{\varphi_2(\tau^s)} \psi_1(\tau) \leqq s^{2s}K. \tag{10}$$

2) *Если* $\varphi_2(\tau)\leqq\tau^{\frac{1}{s}}$ *для* $\tau\geqq\lambda$, *то*

$$\limsup_{\tau=\infty} \tau^{s-2}\varphi_1\left(\frac{\tau}{2K}\right) \psi_1(\tau)\leqq s^s(1+K). \tag{11}$$

Теорема 8. *Пусть* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ $(s>1)$ *образуют собственную систему,* $0<K<\infty$; $\psi_i(\tau)=\psi_i(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ $(i=1,2)$; *функция* $\varphi_1(\tau)$ *непрерывна, положительная и возрастающая для* $\tau\geqq\mu$; $\varphi_1(\tau)\to\infty$ *для* $\tau\to\infty$;

$$\limsup_{\tau=\infty} \varphi_1(\tau)\psi_1(\tau)<K. \tag{12}$$

Тогда: 1)

$$\limsup_{\tau=\infty} \left(\frac{\tau}{\rho\left(\tau K^{\frac{s-1}{s}}\right)}\right)^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau)\geqq 3s^2(1+K), \tag{13}$$

где $\rho(\tau)$ *функция, обратная к* $\tau\varphi_1^{\frac{s-1}{s}}(\tau)$.

2) *Если для* $\tau\geqq\mu$

$$\varphi_1(\tau)\tau^{-2s+3} \text{ возрастает, } \varphi_1(\tau)\geqq\tau^{s(2s-3)}, \tag{14}$$

то

$$\limsup_{\tau=\infty} \left(\frac{\tau}{\varphi_2(\tau K)}\right)^{\frac{1}{s-1}} \psi_2(\tau) \leqq 3s^2(1+K),$$

где $\varphi_2(\tau)$ *функция, обратная к* $\varphi_1(\tau)\tau^{-2s+4}$.

Теорема 9. θ_1, θ_2 *тогда и только тогда образуют собственную систему, когда*

$$\limsup_{\tau=\infty} \tau\psi_2(\tau, \theta_1, \theta_2) = \infty. \tag{16}$$

Теорема 5 уже известна. Она доказана впервые Хинчиным. Здесь же приводится более простое доказательство.