Vojtěch Jarník

# Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable qui laisse intacte la dérivabilité de la fonction

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1923, 5p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500753

Slovutnému pánu,
p. Dr. F. Záviškovi,
univ. profesoru
3. X. 24. oddaný
V. Jar

# Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable, qui laisse intacte la dérivabilité de la fonction.

Par

**VOJTĚCH JARNÍK.**

Présenté le 25 Mai 1923.

Je m'occupe, dans cet article, du problème suivant: Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble linéaire fermé, contenu dans l'intervalle fermé $< a, b >$.[1]) Étant donnée une fonction $f(x)$ d'une variable $x$ sur l'ensemble $\mathfrak{A}$, on doit compléter la définition de $f(x)$ aux autres points de $<a, b>$ d'une telle manière que les propriétés de dérivabilité de $f(x)$ restent conservées. Il faut préciser l'énoncé du problème, ce qui peut se faire de plusieurs manières. On obtient ainsi trois problèmes analogues, dont j'indiquerai rapidement les énoncés et les résultats.

Je rappelle tout d'abord quelques définitions. Si le point $x$ de $\mathfrak{A}$ est point limite de droite, j'appelle „nombres dérivés de droite de $f(x)$ au point $x$" les nombres

$$D^+ f(x) = lim\ sup \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},\ D_+ f(x) = lim\ inf \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

où $x'$ converge vers $x$ sur l'ensemble $\mathfrak{A}$ de droite. Si le point $x$ est isolé de droite, les nombres $D^+ f(x)$, $D_+ f(x)$ ne sont pas définis. On a les définitions analogues quant'aux nombres dérivés de gauche. Je dirai que la fonction $f(x)$ a une dérivée en un point de $\mathfrak{A}$, si ce point est point limite de $\mathfrak{A}$ et si ceux des nombres dérivés de $f(x)$, qui sont définis en ce point, sont égaux.

On sait que l'ensemble complémentaire de $\mathfrak{A}$ par rapport à $< a, b >$ est composé d'un ensemble dénombrable d'intervalles ouverts $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ sans points communs. Je désigne les extrémités du „$n$-ème intervalle contigu" $J_n$ par $x_n^g$, $x_n^d$, où $x_n^g < x_n^d$. Alors on a $J_n = (x_n^g, x_n^d)$.

[1]) Je suppose, pour simplifier, que les points $a$ et $b$ appartiennent à $\mathfrak{A}$.

Je vais maintenant aborder les divers énoncés de notre problème.

**1er problème.** Étant donnée, sur l'ensemble fermé $\mathfrak{A}$, une fonction finie $f(x)$, on doit trouver une fonction $F(x)$ définie dans $< a, b >$ telle que:

1. $$F(x) = f(x) \text{ dans } \mathfrak{A};$$

2. les nombres dérivés de $f(x)$, autant qu'ils sont définis, sont égaux aux nombres dérivés correspondants de $F(x)$;

3. $F(x)$ a une dérivée finie à tout point de l'ensemble $\mathfrak{A}'$, complémentaire à $\mathfrak{A}$ par rapport à $< a, b >$:

$$\mathfrak{A}' = < a, b > - \mathfrak{A}.$$

**1er theorème.** *On peut toujours trouver une telle fonction $F(x)$.*

La construction de $F(x)$ est à peu près évidente: il suffit de poser

$$F(x) = f(x_n^g) + \frac{f(x_n^d) - f(x_n^g)}{x_n^d - x_n^g}(x - x_n^g) \tag{1}$$

pour $x_n^g < x < x_n^d$. Mais cette solution si simple du 1er problème n'est pas satisfaisante: par exemple, si la fonction $f(x)$ a une dérivée à tout point de $\mathfrak{A}$, la fonction $F(x)$, définie par l'égalité (1) dans $J_n$ et égale à $f(x)$ dans $\mathfrak{A}$, n'aura pas en générale de dérivée aux points $x_n^g$ et $x_n^d$. Pour éviter cet inconvénient, nous sommes conduits à formuler notre problème d'une manière différente que voici:

**2ème problème.** Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble parfait et soit $f(x)$ une fonction, définie sur $\mathfrak{A}$ et finie, qui a une dérivée (finie ou infinie) aux extrémités des intervalles contigus de $\mathfrak{A}$ (i. e. aux points $x_n^g$ et $x_n^d$). On doit trouver une fonction $F(x)$, définie sur $< a, b >$, jouissant des propriétés suivantes:

1. $F(x) = f(x)$ dans $\mathfrak{A}$.

2. $F(x)$ a une dérivée finie dans $\mathfrak{A}'$.

3. $F(x)$ a une dérivée aux extrémités des intervalles contigus de $\mathfrak{A}$ (évidemment, on a alors $F'(x_n^g) = f'(x_n^g)$, $F'(x_n^d) = f'(x_n^d)$).

4. Aux autres points de $\mathfrak{A}$, les quatre nombres dérivés de $F(x)$ sont égaux aux nombres dérivés correspondants de $f(x)$.

**2ème theorème.** *On peut toujours trouver une telle fonction $F(x)$.*

Pour construire une telle fonction $F(x)$, nous faisons correspondre à tout nombre entier positif $n$ un nombre $\varepsilon_n > 0$ tel que[2])

$$\varepsilon_n < \sqrt{\frac{x_n^d - x_n^g}{n}}, \tag{2}$$

$$\left| f'(x_n^g) - \frac{f(x) - f(x_n^g)}{x - x_n^g} \right| < \frac{1}{n} \tag{3}$$

[2]) Pour simplifier, je suppose tous les nombres dérivés de $f(x)$ finis.

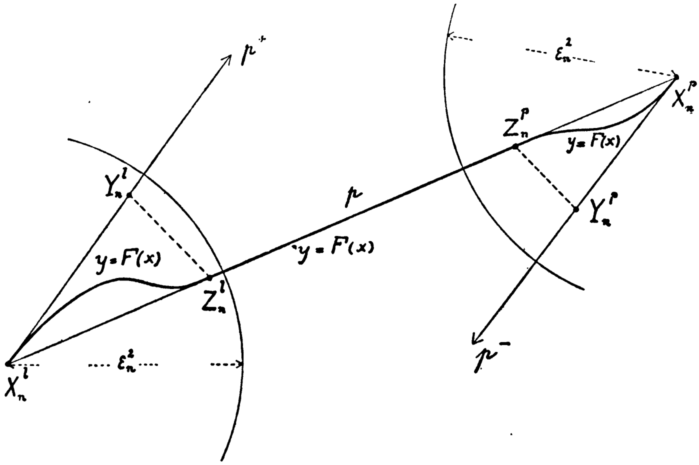
pour tous les $x$ de $\mathfrak{A}$, pour lesquels

$$x_n^g - \varepsilon_n \leqq x < x_n^g;$$

$$\left| f'(x_n^d) - \frac{f(x) - f(x_n^d)}{x - x_n^d} \right| < \frac{1}{n} \tag{4}$$

pour tous les $x$ de $\mathfrak{A}$, pour lesquels

$$x_n^d < x \leqq x_n^d + \varepsilon_n.$$




Puis, sur la droite, issue du point $X_n^g$,*) dont les coordonnées sont $[x_n^g, f(x_n^g)]$, avec le coefficient angulaire $f'(x_n^g)$, nous choisirons un point $Y_n^g$ à droite de $X_n^g$, dont la distance du point $X_n^g$ est plus petite que $\varepsilon_n^2$. Sur la droite, joignant le point $X_n^g$ avec le point $X_n^d = [x_n^d, f(x_n^d)]$, nous choisirons un point $Z_n^g$, dont la distance de $X_n^g$ est plus petite que $\varepsilon_n^2$. D'une manière analogue, on choisit sur la droite, issue du point $X_n^d$ avec le coefficient angulaire $f'(x_n^d)$, un point $Y_n^d$ à gauche de $X_n^d$; et sur la droite, joignant $X_n^g$ avec $X_n^d$, on choisit un point $Z_n^d$. On exige de plus, que la distance de $Y_n^d$ et $Z_n^d$ à $X_n^d$ soit plus petite que $\varepsilon_n^2$. Nous choisirons $F(x) = f(x)$ dans $\mathfrak{A}$ et nous construirons, pour $x_n^g < x < x_n^d$, la courbe $y = F(x)$ de telle manière que

1. $$D^+ F(x_n^g) = D_+ F(x_n^g) = f'(x_n^g),$$
$$D^- F(x_n^d) = D_- F(x_n^d) = f'(x_n^d);$$

2. $F'(x)$ existe et est finie pour

$$x_n^g < x < x_n^d.$$

3. Tout point de la courbe $y = F(x)$ (pour $x_n^g < x < x_n^d$) ou bien est contenu à l'intérieur de l'un des deux triangles $X_n^g Y_n^g Z_n^g$, $X_n^d Y_n^d Z_n^d$

---

*) **Dans la figure, on doit remplacer partout l'indice $l$ resp. $p$ par $g$ resp. $d$.**

ou bien est situé sur la droite $\overline{X_n^g X_n^d}$. On démontre ensuite que cette fonction $F(x)$ résout le 2ème problème (pour les détails de la démonstration, voir mon mémoire original).

Je dois signaler un cas particulier du 2ème theorème que voici:

*Si la fonction $f(x)$, définie sur l'ensemble parfait $\mathfrak{A}$, a une dérivée* (finie ou infinie) *à tout point de $\mathfrak{A}$, on peut trouver une fonction $F(x)$, définie dans $< a, b >$, qui a une dérivée à tout point de $< a, b >$ et telle que $F(x) = f(x)$ dans $\mathfrak{A}$.*

On voit la différence essentielle entre le 1er et le 2ème problème: dans le premier problème on exige seulement que les nombres dérivés de $F(x)$ soient égaux aux nombres dérivés correspondants de $f(x)$, *autant que ces derniers sont définis*; tandis que, dans le deuxième problème, on exige de plus encore que, en tout point de $\mathfrak{A}$, les nombres dérivés de $F(x)$ qui ne correspondent à aucun nombre derivé de $f(x)$, aient des valeurs donnés *a priori* (i. e. on exige que $D^+ F(x_n^g) = D_+ F(x_n^g) = f'(x_n^g)$, $D^- F(x_n^d) = D_- F(x_n^d) = f'(x_n^d)$). Nous allons encore modifier le problème, en préscrivant à ces nombres dérivés des valeurs tout à fait arbitraires. Nous obtenons ainsi le **3ème problème:**

Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble fermé et $f(x)$ une fonction finie, définie sur $\mathfrak{A}$. Nous donnons, d'une manière tout à fait arbitraire, les nombres, que nous désignons par

$$D^+ f(x_n^g),\ D_+ f(x_n^g),\ D^- f(x_n^d),\ D_- f(x_n^d), \tag{5}$$

vérifiant seulement les conditions

$$\left\{\begin{array}{l} D^+ f(x_n^g) \geqq D_+ f(x_n^g) \\ D^- f(x_n^d) \geqq D_- f(x_n^d) \end{array}\right. ;\text{[3]} \tag{6}$$

on doit trouver une fonction finie $F(x)$, définie dans $< a, b >$, remplissant les conditions suivantes:

1. $F(x) = f(x)$, $D^+ F(x) = D^+ f(x)$, $D_+ F(x) = D_+ f(x)$, $D^- F(x) = D^- f(x)$, $D_- F(x) = D_- f(x)$ pour tout $x$ de $\mathfrak{A}$, excepté $x = a$, $x = b$;
2. $F(a) = f(a)$, $D^+ F(a) = D^+ f(a)$, $D_+ F(a) = D_+ f(a)$, $F(b) = f(b)$, $D^- F(b) = D^- f(b)$, $D_- F(b) = D_- f(b)$.

Pour pouvoir répondre d'une manière simple à ce problème, j'introduit en premier lieu cette définition: Soit $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ l'ensemble des intervalles contigus de $\mathfrak{A}$, rangé dans un ordre quelconque. Je désigne par $\varphi(x, n)$ la distance du point $x$ à l'intervalle $J_n$. Je dis que l'ensemble $\mathfrak{A}$ est **régulier**, s'il existe une fonction positive $\chi(n)$ du nombre (positif entier) $n$ telle qu'à chaque $x$ de $\mathfrak{A}$ on peut trouver un nombre $n_x$ tel que $\varphi(x, n) > \chi(n)$ pour $n > n_x$.[4])

---

[3]) Ainsi, à chaque $x$ de $\mathfrak{A}$, on a fait correspondre quatre nombres: $D^+ f(x)$, $D_+ f(x)$, $D^- f(x)$, $D_- f(x)$.

[4]) On démontre facilement que la régularité de $\mathfrak{A}$ est indépendante de l'ordre, dans lequel l'ensemble des intervalles contigus est rangé.

On peut alors énoncer le theorème suivant:

**3ème theorème.** *Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble fermé. Pour que l'on puisse trouver une fonction $F(x)$, résolvant le troisième problème, quelle que soit la fonction finie $f(x)$, définie sur $\mathfrak{A}$ et quels que soient les nombres (5), vérifiant les conditions (6), il faut et il suffit que l'ensemble $\mathfrak{A}$ soit régulier.*

Pour la démonstration, qui est bien simple, je renvoie à mon mémoire original.

Je vais encore énoncer quelque théorèmes sur les ensembles réguliers.

(*A*) Si la frontière d'un ensemble fermé $\mathfrak{A}$ est un ensemble dénombrable, l'ensemble $\mathfrak{A}$ est régulier.

(*B*) S'il existe un intervalle ouvert $J$ tel que l'enveloppe fermée de l'ensemble $J\mathfrak{A}$ est parfaite et non dense, alors l'ensemble $\mathfrak{A}$ n'est pas régulier.

(*C*) Si $\mathfrak{A}$ est parfait et régulier, alors $\mathfrak{A}$ est l'enveloppe fermée d'un ensemble qui est somme d'une infinité dénombrable (ou d'un nombre fini) d'intervalles fermés sans points communs.

(*D*) Si la frontière d'un ensemble fermé $\mathfrak{A}$ est régulière, alors $\mathfrak{A}$ est lui-même régulier.

(*E*) Si l'on décompose un ensemble fermé $\mathfrak{A}$ en somme d'un ensemble parfait $\mathfrak{P}$ et d'un ensemble dénombrable (d'après le théorème de Cantor-Bendixson) et si $\mathfrak{P}$ est régulier, $\mathfrak{A}$ est lui-même régulier.

Pour la démonstration de ces théorèmes voir mon mémoire original.