Vojtěch Jarník
Über einen Satz von A. Khintchine

Prace Mat.-Fiz. 43 (1935), pp. 151--166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500752

Über einen Satz von A. Khintchine.

Von

Vojtěch Jarník (Praha).

§ 1. Problemstellung und Resultate.

Ein wohlbekannter Satz aus der Theorie der diophantischen Approximationen einer reellen Zahl θ (alle Zahlen dieser Note sind reell) besagt: zu jeder Zahl θ gibt es unendlichviele Paare ganzer Zahlen q, p mit

$$q > 0, |q\theta - p| < \frac{1}{q}.$$

Mann kann bekanntlich diesen Satz auf zwei wesentlich verschiedene Arten verallgemeinern. Es gilt nämlich erstens folgender Satz:

Es sei $s \geqq 1$ und ganz. Zu jedem System von s Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ gibt es unendlichviele Systeme ganzer Zahlen $q, p_1, p_2, \ldots, p_s$ mit

(1) $$q > 0, |q\theta_i - p_i| < \frac{1}{q^{1/s}} \; (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Zweitens gilt der Satz:

Es sei $s \geqq 1$ und ganz. Zu jedem System von s Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ gibt es unendlichviele Systeme von ganzen Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_s$ mit

(2) $$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0, \left|x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i\theta_i\right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s}}$$

Bei *einigen* Systemen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ kann mann die durch (1), (2) gelieferten Approximationen noch wesentlich verschärfen; zur näheren Untersuchung dieses Umstandes führen wir folgende Definition ein:

Definition. *Es sei* $s \geqq 1$ *und ganz,* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *reell. Dann sei* $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *die obere Grenze derjenigen Zahlen* α, *für welche die*

Ungleichungen

$$\underset{i=1,2,\dots,s}{\operatorname{Max}}|x_i|>0\,,\,\Big|x_0+\sum_{i=1}^{s}x_i\theta_i\Big|<\frac{1}{\underset{i=1,2,\dots,s}{\operatorname{Max}}|x_i|^{s+\alpha}}$$

unendlichviele Lösungen in ganzen $x_0, x_1, \dots, x_s$ *besitzen. Ebenso sei* $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ *die obere Grenze derjenigen Zahlen* α, *für welche die Ungleichungen*

$$q>0\,,\,\Big|\theta_i-\frac{p_i}{q}\Big|<\frac{1}{q^{1+\frac{1+\alpha}{s}}}\quad(i=1,\,2,\,\dots,\,s)$$

unendlichviele Lösungen in ganzen $q, p_1, p_2, \dots, p_s$ *besitzen.*

Nach den angeführten Sätzen ist stets

$$0\leqq\beta_1(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s)\leqq\infty,\ 0\leqq\beta_2(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s)\leqq\infty. \tag{3}$$

Diese Definiton hat Herr Khintchine aufgestellt.[1]

Für $s=1$ ist offenbar $\beta_1(\theta_1)=\beta_2(\theta_1)$. Für ganzes $s>1$ hat Herr Khintchine folgende Ungleichungen bewiesen[2], welche für alle Systeme $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ gelten:[3]

$$\beta_1(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s)\geqq\beta_2(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s)\geqq\frac{\beta_1(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s)}{(s-1)\,\beta_1(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s)+s^2}. \tag{5}$$

---

[1]) A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Palermo Rendiconti **50** (1926), S. 170—195, vgl. insb. S. 189 — 190. Die Definition lautet dort etwas anders als bei uns; beide Definitionen sind aber äquivalent. Z. B. lautet die Definition von $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ bei Herrn Khintchine so: $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ sei die obere Grenze derjeningen Zahlen α, für welche die Ungleichung

$$\Big|x_0+\sum_{i=1}^{s}x_i\theta_i\Big|<\frac{\varepsilon}{r^{s+\alpha}}\quad\Big(r=\sqrt{\sum_{i=1}^{s}x_i^2}>0\Big) \tag{4}$$

bei jedem $\varepsilon>0$ in ganzen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_s$ lösbar ist. Man beachte erstens: ist (4) für jedes $\varepsilon>0$ in ganzen x_i lösbar, so gibt es offenbar auch Lösungen mit beliebig grossem r; zweitens: es ist $r\geqq\underset{i=1,2,\dots,s}{\operatorname{Max}}|x_i|\geqq s^{-\frac{1}{2}}r$. Aus diesen Bemerkungen folgt offenbar die Äquivalenz der beiden Definitionen von $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$; analog für $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$.

[2]) L. c. [1]); vgl. insb. S. 189—195.

[3]) In dieser ganzen Note soll

$$\infty+a=\infty,\quad\frac{a\infty+b}{c\infty+d}=\frac{a}{c}\text{ für }c\neq0$$

gesetzt werden.

In dieser Note wollen wir unter anderem zeigen, dass die zweite Ungleichung (5) scharf ist; d. h. wir werden folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei* $s > 1$ *und ganz,* $0 \leqq \beta_1 \leqq \infty$. *Dann gibt es reelle Zahlen* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *mit*

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_1, \quad \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{\beta_1}{(s-1)\beta_1 + s^2}.$$

Wir wollen aber noch einen schärferen Satz (Satz 2) ableiten, welcher den Satz 1 enthält. Zunächst aber einige Vorbemerkungen. Die Zahlensysteme $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ werden wir stets als Punkte eines $(s-1)$ — dimensionalen Cartesischen Raumes deuten; mit W bezeichnen wir dauernd den Würfel $0 \leqq \theta_i < 1$ $(i = 2, 3, \ldots, s)$.

„Fast alle Punkte einer Punktmenge M" bedeutet: alle Punkte von M, mit Ausnahme der Punkte einer Menge vom Lebesgueschen Mass Null. „Nahezu alle Elemente einer Menge" bedeutet: alle Elemente dieser Menge mit höchstens endlichvielen Ausnahmen. Das äussere Lebesguesche Mass der Menge M soll mit μM bezeichnet werden. Nun lautet der

Satz 2. *Es sei* θ_1 *reell,* $s > 1$ *und ganz.*

Behauptung 1.

a) *Für alle reellen* $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ *ist*

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \mathrm{Max}(0, 1 + \beta_2(\theta_1) - s).$$

b) *Für fast alle Punkte* $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ *aus* W *ist*

(6) $$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \mathrm{Max}(0, 1 + \beta_2(\theta_1) - s).$$

Behauptung 2.

a) *Für alle reellen* $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ *ist*

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \mathrm{Max}\left(0, \frac{\beta_2(\theta_1) - s + 1}{(s-1)\beta_2(\theta_1) + 2s - 1}\right).$$

b) *Für fast alle Punkte* $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ *aus* W *ist*

(7) $$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \mathrm{Max}\left(0, \frac{\beta_2(\theta_1) - s + 1}{(s-1)\beta_2(\theta_1) + 2s - 1}\right).$$

Behauptung 3.

Für fast alle Punkte $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ *aus* W *ist*

(8) $$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{(s-1)\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + s^2}.$$

Die Behauptung 3 folgt aus den Behauptungen 1b, 2b. Denn für $\beta_2(\theta_1) \leqq s-1$ ist nach (6), (7) für fast alle $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus W

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0,$$

also (8) wahr. Für $\beta_2(\theta_1) = \infty$ ist nach (6), (7) für fast alle $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus W

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty, \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{1}{s-1},$$

also (8) wahr. In den übrigen Fällen ist endlich nach (6), (7) für fast alle $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus W

$$\beta_2(\theta_1) = \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + s - 1,$$

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{(s-1)(\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + s - 1) + 2s - 1},$$

also (8) ebenfalls wahr.

Um den Satz 1 aus dem Satz 2 herzuleiten, brauchen wir noch folgenden (trivialen)

Satz 3. *Es sei* $0 \leqq \beta \leqq \infty$; *dann gibt es eine Zahl* θ *mit* $\beta_2(\theta) = \beta$. [4]

Es sei nun $s \geqq 2$ und ganz, $0 \leqq \beta_1 \leqq \infty$. Wir wählen $\beta_2 = \beta_1 + s - 1$ (also $\beta_2 \geqq s - 1 > 0$). Nach Satz 3 gibt es eine Zahl θ_1 mit $\beta_2(\theta_1) = \beta_2$;

---

[4]) Beweis: Es sei

$$\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots}}$$

die regelmässige Kettenbruchentwickelung einer Zahl θ; p_n, q_n seien die Näherungszähler und Näherungsnenner dieses Kettenbruches. Bekanntlich ist

$$q_{n+1} = b_{n+1} q_n + q_{n-1}, \frac{1}{(q_{n+1} + q_n) q_n} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n},$$

$$\frac{1}{3 b_{n+1} q_n^2} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{b_{n+1} q_n^2};$$

beachtet man, dass für die Approximierbarkeit von θ durch rationale Zahlen die Brüche $p_n q_n^{-1}$ allein massgebend sind, so sieht man: wählt man sukzessive $b_{n+1} = [q_n^\beta]$ für $\beta < \infty$, $b_{n+1} = q_n^n$ für $\beta = \infty$, so ist $\beta_2(\theta) = \beta$.

dann ist nach Satz 2 (Behauptung 1b und 3) für fast alle $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus W

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 1 + \beta_2 - s = \beta_1, \quad \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{\beta_1}{(s-1)\beta_1 + s^2},$$

womit der Satz 1 als eine Folgerung des Satzes 2 erscheint.

Wir wollen noch eine unmittelbare Folgerung des Satzes 1 explizite anführen:

Satz 4. *Es sei* $s \geqq 1$ *und ganz,* $0 \leqq \beta_1 \leqq \infty$. *Dann gibt es reelle Zahlen* $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *mit* $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_s) = \beta_1$.

Für $s = 1$ ist nämlich dieser Satz mit dem Satz 3 identisch, da $\beta_1(\theta_1) = \beta_2(\theta_1)$. Für $s > 1$ ist er im Satz 1 enthalten (man beachte aber, dass zum Beweise des Satzes 4 der leichtere Teil des Satzes 2, nämlich die Behauptung 1 allein, hinreicht).

Unsere Aufgabe besteht jetzt noch in dem Beweis der Behauptungen 1, 2 des Satzes 2. Wir werden bei diesem Beweis keine Vorkenntnisse voraussetzen; der Leser braucht nicht einmal die Khintchineschen Ungleichungen (5) zu kennen. Mit der Benutzung der zweiten Ungleichung (5) würde sich allerdings der Beweis der Behauptung 1b noch vereinfachen lassen; wir werden aber zum Beweis dieser Behauptung 1b einen Hilfssatz (Hilfssatz 2 mit Zusatz) brauchen, der vielleicht auch an sich ein gewisses Interesse beanspruchen darf. Wir zitieren hier den Zusatz zum Hilfssatz 2:

Es sei $s \geqq 2$ *und ganz,* θ_1 *reell. Dann haben fast alle Punkte* $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ *aus* W *folgende Eigenschaft: ist* $a > 0$, *so haben die Ungleichungen*

$$\operatorname*{Max}_{i=2,3,\ldots,s} |x_i| > 0, \; \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+a}}$$

höchstens endlichviele Lösungen in ganzen $x_0, x_1, \ldots, x_s$.

Dieser Zusatz ist besonders interessant für $\beta_2(\theta_1) > s - 1$; dann ist nämlich nach Satz 2 $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) > 0$ für alle $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$. Ist also $0 < a < \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, so haben die Ungleichungen

$$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0, \; \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+a}}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s$. Für fast alle $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus W ist aber nach dem Zusatz für nahezu alle diese Lösungen $x_2 = x_3 = \ldots = x_s = 0$, sodass nahezu alle diese Lösungen durch die Lösungen der Ungleichungen

$$q > 0 \qquad |q\theta_1 - p| < \frac{1}{q^{s+\alpha}}$$

(in ganzen p, q) gegeben sind, welche ausschliesslich von θ_1 abhängen und mit $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ nichts zu tun haben.

Was den Beweis der Behauptung 2 des Satzes 2 betrifft, so habe ich bereits im Jahre 1932 eine Methode publiziert [5]), die fähig ist, den Beweis dieser Behauptung zu geben. Damals hatte ich aber ein anderes Ziel, sodass ich diese Methode nicht in der Form ausgearbeitet habe, die ich heute brauche. Aus diesem Grunde wird der Beweis der Behauptung 2 im § 3 in allen Einzelheiten durchgeführt.

Zum Schluss dieser Einleitung möchte ich noch folgendes bemerken: Wenn $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$ bzw. $= \infty$, so ist nach (5) auch $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$ bzw. $= \infty$; in diesen beiden Fällen ist also $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ durch die Angabe von $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ eindeutig bestimmt. Und man kann auch zeigen: *nur* in diesen beiden Fällen ist $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ durch die Angabe von $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ eindeutig bestimmt, wenn $s > 1$ (für $s = 1$ ist freilich stets $\beta_1(\theta_1) = \beta_2(\theta_1)$). Der Beweis dieser Beauptung soll in einer anderen Arbeit publiziert werden [6]).

Beweis der Behauptung 1. des Satzes 2.

Erster Teil. Gegeben sind θ_1, s. Es sei $\alpha < \beta_2(\theta_1)$; für beliebige reelle $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ ist dann die Ungleichung

$$|q\theta_1 + 0\cdot\theta_2 + 0\cdot\theta_3 + \ldots + 0\cdot\theta_s - p| = |q\theta_1 - p| < \frac{1}{q^{1+\alpha}}$$

für unendlichviele Paare ganzer Zahlen p, q mit $q > 0$ erfüllt; also ist

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq 1 + \alpha - s;$$

lässt man α gegen $\beta_2(\theta_1)$ streben, bekommt man wegen (3)

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \mathrm{Max}(0, 1 + \beta_2(\theta_1) - s),$$

womit die Behauptung 1a und für $\beta_2(\theta_1) = \infty$ auch die Behauptung 1b des Satzes 2. bewiesen ist.

---

[5]) Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Prace mat.-fiz. 39 (1932), S. 135—144.

[6]) O simultaních diofantických aproximacích, Rozpravy České Akademie (im Druck); ein französischer Auszug soll im Bulletin international de l'Académie tchèque unter dem Titel „Sur les approximations diophantiques simultanées" erscheinen.

Zweiter Teil. Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei* $s \geqq 1$ *und ganz; S sei die Reihe*

$$\sum \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} \left(|x_i|^s \log^2(|x_i|+3)\right)},$$

wo über alle ganzen x_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ *mit* $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 > 0$ *summiert wird. Behauptung: die Reihe S konvergiert.*

Beweis. Es genügt, die Konvergenz der Reihe S_1 zu beweisen, die aus denjenigen Gliedern der Reihe S besteht, für welche $|x_1| = \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|$ ist. Fasst man die Glieder mit demselben Wert von $|x_1|$ zusammen, so bekommt S_1 die Gestalt

$$2 \sum_{x_1=1}^{\infty} \frac{(2x_1+1)^{s-1}}{x_1^s \log^2(x_1+3)},$$

woraus die Konvergenz folgt.

Hilfssatz 2. *Es sei* θ_1 *reell,* $s \geqq 2$ *und ganz. Es sei E die Menge derjenigen Punkte* $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ *aus W, welche folgende Eigenschaft haben: es gibt unendlichviele Systeme von ganzen Zahlen* $x_0, x_1, \ldots, x_s$ *mit*

$$(9) \qquad \underset{i=2,3,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} \left(|x_i|^s \log^2(|x_i|+3)\right)}.$$

Behauptung: $\mu E = 0$.

Zusatz. Alle Punkte $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus $W-E$, also — nach Hilfssatz 2 — fast alle Punkte $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ aus W, haben folgende Eigenschaft: Ist $a > 0$, so haben die Ungleichungen

$$(10) \qquad \underset{i=2,3,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|^{s+a}}$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen $x_0, x_1, \ldots, x_s$.

In der Tat: es sei $a > 0$; dann gibt es eine nur von a abhängige Zahl $t > 0$, sodass

$$(11) \qquad \frac{1}{x^s \log^2(x+3)} \geqq \frac{1}{x^{s+a}} \quad \text{für} \quad x \geqq t.$$

Es sei nun $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus W, für welchen die Ungleichungen (10) unendlichviele Lösungen in ganzen $x_0, x_1, \ldots, x_s$ besitzen; dann besitzen die Ungleichungen (10) auch unendlichviele Lösungen in ganzen $x_0, x_1, \dots, x_s$ mit $\underset{i=1,2,\dots,s}{\mathrm{Max}} |x_i| \geqq t$; diese Lösungen erfüllen aber wegen (11) umsomehr die Ungleichungen (9), also ist $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s)$ ein Punkt aus E, womit der Zusatz bewiesen ist.

Beweis des Hilfssatzes 2. Man setze für $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 > 0$

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_s) = \frac{1}{\underset{i=1,2,\dots,s}{\mathrm{Max}} \left(|x_i|^s \log^2 (|x_i| + 3) \right)}.$$

Bei gegebenen ganzen $x_0, x_1, \dots, x_s$ mit $\underset{i=2,3,\dots,s}{\mathrm{Max}} |x_i| > 0$ sei $E(x_0, x_1, \dots, x_s)$ die Menge derjenigen Punkte $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s)$ aus W, welche die Ungleichung

$$\left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \tau(x_1, \dots, x_s) \tag{12}$$

erfüllen. Ist $|x_k| = \underset{i=2,3,\dots,s}{\mathrm{Max}} |x_i|$ und soll, bei gegebenen

$$x_0, x_1, \dots, x_s, \ \theta_i (i = 1, 2, \dots, s; \ i \neq k)$$

die Ungleichung (12) erfüllt sein, so ist dadurch θ_k auf ein Intervall der Länge

$$\frac{2\tau(x_1, x_2, \dots, x_s)}{|x_k|}$$

beschränkt; also ist

$$\mu E(x_0, x_1, \dots, x_s) \leqq \frac{2\tau(x_1, x_2, \dots, x_s)}{\underset{i=2,3,\dots,s}{\mathrm{Max}} |x_i|}.$$

Soll nun, bei gegebenen $x_1, x_2, \dots, x_s$, die Menge $E(x_0, x_1, \dots, x_s)$ nicht leer sein, so muss nach (12) (man beachte $\tau(x_1, x_2, \dots, x_s) < 1$)

$$|x_0 + x_1 \theta_1| \leqq \sum_{i=2}^{s} |x_i| + \tau(x_1, x_2, \dots, x_s) < s \underset{i=2,3,\dots,s}{\mathrm{Max}} |x_i|$$

sein, sodass höchstens

$$(2s+1) \underset{i=2,3,\dots,s}{\mathrm{Max}} |x_i|$$

Werte von x_0 ein nichtleeres $E(x_0, x_1, \dots, x_s)$ liefern. Die Reihe

$$\sum \mu E(x_0, x_1, \dots, x_s) \tag{13}$$

— wo über alle ganzen $x_0, x_1, \dots, x_s$ mit $\underset{i=2,3,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > 0$ summiert wird — wird also sicher konvergent sein, wenn die Reihe

$$\sum (2s+1) \underset{i=2,3,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| \cdot \frac{2\tau(x_1, x_2, \dots, x_s)}{\underset{i=2,3,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|}$$

mit dem Summationsbereich

$$\text{„} x_1, x_2, \dots, x_s \text{ ganz, } \underset{i=2,3,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > 0 \text{"}$$

konvergiert. Diese Reihe ist aber — abgesehen von dem Faktor $2(2s+1)$ — eine Teilreihe der Reihe

$$(14) \qquad \sum \tau(x_1, x_2, \dots, x_s),$$

wo über alle ganzen $x_1, x_2, \dots, x_s$ mit $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 > 0$ summiert wird; (14) ist aber genau die nach Hilfssatz 1. konvergente Reihe S.

Die Reihe (13) ist also konvergent; andererseits ist E die Menge derjenigen Punkte $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s)$ aus W, die in unendlichvielen Mengen $E(x_0, x_1, \dots, x_s)$ liegen; also ist $\mu E = 0$, w. z. b. w.[7])

Beweis der Behauptung 1b des Satzes 2 für $\beta_2(\theta_1) < \infty$. Gegeben sind θ_1, s; es sei $\beta_2(\theta_1) < \infty$. E sei die Menge aus Hilfssatz 2; $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s)$ sei ein Punkt aus $W - E$. Es sei $\infty > \alpha > \operatorname{Max}(\beta_2(\theta_1), s-1)$. Für nahezu alle Systeme ganzer Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_s$ mit $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = \dots = x_s = 0$ ist dann — wegen $\alpha > \beta_2(\theta_1)$ —

$$\left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| = |x_0 + x_1 \theta_1| \geqq \frac{1}{|x_1|^{1+\alpha}} = \frac{1}{\underset{i=1,2,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|^{1+\alpha}}.$$

Ebenso: für nahezu alle Systeme ganzer Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_s$ mit $\underset{i=2,3,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > 0$ ist nach dem Zusatz zu Hilfssatz 2 (wegen $1 + \alpha > s$)

---

[7]) Ist nämlich $N_1, N_2, \dots$ eine Folge von Punktmengen, ist N die Menge derjenigen Punkte, die in unendlichvielen N_n liegen und ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu N_n$ konvergent, so ist für jedes ganze $k > 0$: $N \subset \sum_{n=k}^{\infty} N_n$, also $\mu N \leqq \sum_{n=k}^{\infty} \mu N_n$, also $\mu N = 0$.

$$(15)\qquad \left|x_0+\sum_{l=1}^{s} x_l\,\theta_l\right| \geqq \frac{1}{\underset{l=1,2,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_l|^{1+\alpha}}.$$

Insgesamt sehen wir also: für nahezu alle Systeme von ganzen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_s$ mit $\underset{l=1,2,\dots,s}{\operatorname{Max}} |x_l|>0$ gilt (15); also ist

$$s+\beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) \leqq 1+\alpha;$$

indem man hier α gegen $\operatorname{Max}(\beta_2(\theta_1), s-1)$ streben lässt, bekommt man für jedem Punkt $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s)$ aus $W-E$, d. h. für fast alle Punkte aus W, die Ungleichung

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) \leqq \operatorname{Max}(0, \beta_2(\theta_1)+1-s).$$

Nach dem ersten Teil dieses Paragraphen gilt hier aber notwendig das Gleichheitszeichen, womit die Behauptung 1b des Satzes 2 auch für $\beta_2(\theta_1)<\infty$ bewiesen ist.

Beweis der Behauptung 2. des Satzes 2.

Erster Teil. Gegeben sind s, θ_1. Es sei $-1<\alpha<\beta_2(\theta_1)$; dann gibt es eine Folge von untereinander verschiedenen Paaren ganzer Zahlen p_n, q_n $(n=1,2,\dots)$ mit

$$\left|\theta_1-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^{2+\alpha}},\quad q_n>0.$$

Offenbar ist $q_n\to\infty$. Es sei $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s)$ ein beliebiger Punkt aus W, es sei $n>0$ und ganz. Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip gibt es dann s ganze Zahlen w_n, v_{ln} $(l=2,3,\dots,s)$ mit

$$|w_n\cdot q_n\theta_l-v_{ln}|<q_n^{-\frac{\alpha+1}{s}}\ (l=2,3,\dots,s),$$

$$0<w_n\leqq\left(\left[q_n^{\frac{\alpha+1}{s}}\right]+1\right)^{s-1}\leqq 2^{s-1}q_n^{\frac{\alpha+1}{s}(s-1)}.$$

Dann ist

$$\left|\theta_1-\frac{p_n w_n}{q_n w_n}\right|<\frac{1}{q_n^{2+\alpha}},\quad \left|\theta_l-\frac{v_{ln}}{q_n w_n}\right|<\frac{1}{w_n\,q_n^{\frac{\alpha+s+1}{s}}}\ (l=2,3,\dots,s).$$

Nun ist

$$q_n^{2+\alpha}=\left(q_n^{\frac{(\alpha+1)(s-1)}{s}+1}\right)^{\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}}\geqq(2^{-s+1}w_n q_n)^{\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}};$$

$$w_n\, q_n^{\frac{\alpha+s+1}{s}} = w_n \cdot q_n^{\frac{(\alpha+1)(s-1)}{s} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha(s-1)+2s-1}} \cdot q_n^{\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}}$$

$$\geqq w_n\,(2^{-s+1} w_n)^{\frac{\alpha+1}{\alpha(s-1)+2s-1}} \cdot q_n^{\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}}$$

$$= 2^{-\frac{(s-1)(\alpha+1)}{\alpha(s-1)+2s-1}} \cdot (w_n\, q_n)^{\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}}.$$

Bedeutet also k eine nur von s und α abhängige positive Zahl, so ist für jedes ganze $n>0$

$$\left|\theta_1 - \frac{p_n\, w_n}{q_n\, w_n}\right| < k\,(q_n\, w_n)^{-\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}},$$

$$\left|\theta_i - \frac{v_{in}}{q_n\, w_n}\right| < k\,(q_n\, w_n)^{-\frac{(\alpha+2)s}{\alpha(s-1)+2s-1}} \quad (i=2, 3, \ldots, s).$$

Daher ist offenbar

$$1+\frac{1}{s}\,(1+\beta_2\,(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\theta_s)) \geqq \frac{(\alpha+2)\,s}{\alpha\,(s-1)+2s-1},$$

$$\beta_2\,(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\theta_s) \geqq \frac{(\alpha+2)\,s^2}{\alpha\,(s-1)+2s-1} - s - 1 = \frac{\alpha - s + 1}{\alpha\,(s-1)+2s-1};$$

wegen (3) folgt daraus, wenn man α gegen $\beta_2(\theta_1)$ streben lässt,

$$\beta_2\,(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\theta_s) \geqq \operatorname{Max}\left(0,\ \frac{\beta_2(\theta_1) - s + 1}{(s-1)\,\beta_2(\theta_1) + 2s - 1}\right).$$

Damit ist die Behauptung 2a des Satzes 2. bewiesen.

Zweiter Teil. Gegeben sind s, θ_1. Es sei

$$\text{(16')}\qquad \gamma > \operatorname{Max}\left(\frac{s\,\beta_2(\theta_1) + 2s}{(s-1)\,\beta_2(\theta_1) + 2s - 1},\ \frac{s+1}{s}\right), \quad \text{wenn } \beta_2(\theta_1) < \infty;$$

$$\text{(16'')}\qquad \gamma > \frac{s}{s-1}, \quad \text{wenn } \beta_2(\theta_1) = \infty.$$

Es sei $t \geqq 0$ ganz. Unter einem „ausgezeichneten Zahlenpaar der Ordnung t" verstehen wir jedes (geordnete) Paar von ganzen Zahlen p, q mit

$$2^t \leqq q < 2^{t+1}, \qquad \left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\gamma};$$

die Zahl q heisse dann ein „ausgezeichneter Nenner der Ordnung t".

Zu jedem ausgezeichneten Zahlenpaar p, q der Ordnung t gibt es genau ein Paar von ganzen Zahlen v, w mit

$$w > 0, \ (v, w) = 1, \ \frac{v}{w} = \frac{p}{q} \ (\text{also } w < 2^{t+1});$$

es ist dann

$$\left| \theta_1 - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{q^\gamma},$$

also umsomehr

$$\left| \theta_1 - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{2^{t\gamma}}.$$

Umgekehrt, zu jedem Paar ganzer Zahlen v, w mit $w > 0$, $(v, w) = 1$ gibt es höchstens $\frac{2^{t+1}}{w}$ ausgezeichnete Zahlenpaare p, q der Ordnung t mit $\frac{p}{q} = \frac{v}{w}$ $\left(\text{es muss nämlich } q = aw, \ p = av \text{ sein, wo } a \text{ ganz, } \frac{2^t}{w} \leqq a < \frac{2^{t+1}}{w}\right)$. Es sei $N(t)$ die Anzahl der ausgezeichneten Zahlenpaare der Ordnung t und für ganze $u \geqq 0$, $t \geqq 0$ sei $N(t, u)$ die Anzahl aller Paare ganzer Zahlen v, w mit

$$(v, w) = 1, \ 2^u \leqq w < 2^{u+1}, \ \left| \theta_1 - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{2^{t\gamma}}. \tag{17}$$

Dann ist also

$$N(t) \leqq \sum_{u=0}^{t} N(t, u) \cdot 2^{t+1-u}. \tag{18}$$

Für jedes ganze $t \geqq 0$ bezeichnen wir als einen „ausgezeichneten Würfel der Ordnung t" jeden Würfel

$$\left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^\gamma} \qquad (i = 2, 3, \ldots, s),$$

der mit W einen nichtleeren Durchschnitt hat, wobei q ein ausgezeichneter Nenner der Ordnung t ist und $p_2, p_3, \ldots, p_s$ beliebige ganze Zahlen sind. Bei einem solchen Würfel ist offenbar $-q < p_i < 2q$; also ist die Anzahl aller ausgezeichneten Würfel der Ordnung t höchstens gleich [8])

[8]) Man beachte stets, dass bei einem solchen Würfel $2^t \leqq q < 2^{t+1}$ ist.

$$N(t) \cdot (3 \cdot 2^{t+1})^{s-1}.$$

Wir wollen nun zeigen: die Inhalte aller ausgezeichneten Würfel aller Ordnungen $t \geqq 0$ bilden eine konvergente Reihe. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Reihe

$$(19) \qquad \sum_{t=0}^{\infty} N(t) \cdot (3 \cdot 2^{t+1})^{s-1} \cdot 2^{-\gamma t(s-1)} \cdot 2^{s-1}$$

konvergiert. Zu diesem Zweck schätzen wir $N(t)$ nach oben ab. Je zwei verschiedene Zahlen $\frac{v}{w}$ mit (17) haben voinenander einen Abstand, der grösser als 2^{-2u-2} ist; im Intervall $(\theta_1 - 2^{-t\gamma}, \theta_1 + 2^{-t\gamma})$ können daher höchstens $2 \cdot 2^{-t\gamma} \cdot 2^{2u+2} + 1$ solche Zahlen liegen; daher ist

$$(20) \qquad N(t, u) \leqq 2^{3+2u-t\gamma} + 1.$$

Es sei nun erstens $\beta_2(\theta_1) = \infty$; dann ist nach (18), (20)

$$N(t) \leqq \sum_{u=0}^{t} (2^{4+u-t(\gamma-1)} + 2^{t+1-u})$$

$$< 2^{5+t(2-\gamma)} + 2^{t+2};$$

es genügt also, die Konvergenz der Reihe

$$(21) \qquad \sum_{t=0}^{\infty} (2^{5+t(2-\gamma)} + 2^{t+2}) \cdot (3 \cdot 2^{2+t(1-\gamma)})^{s-1}$$

zu beweisen; es ist aber nach (16″)

$$2 - \gamma + (s-1)(1-\gamma) = s + 1 - s\gamma < 0,$$

$$1 + (s-1)(1-\gamma) = s - (s-1)\gamma < 0,$$

woraus die Konvergenz von (21) folgt. Es sei zweitens $\beta_2(\theta_1) < \infty$; also gilt (16′). Dann wählen wir ein α mit

$$(22) \qquad \infty > \alpha > \beta_2(\theta_1), \quad \frac{s\alpha + 2s}{(s-1)\alpha + 2s - 1} < \gamma:$$

das geht wegen (16′). Die Ungleichung

$$\left| \theta_1 - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^{\alpha+2}}$$

hat höchstens endlich viele Lösungen in ganzen a, b mit $b>0$; es gibt daher eine nur von θ_1 und α abhängige Zahl $c>0$ mit folgender Eigenschaft: für ganze a, b mit $b>0$ ist stets

$$\left|\theta_1-\frac{a}{b}\right|>\frac{c}{b^{\alpha+2}}.$$

Soll nun für ganze v, w, u, t mit $u\geqq 0$, $t\geqq 0$ (17) gelten, so muss

$$\frac{1}{2^{t\gamma}}>\frac{c}{w^{\alpha+2}}>\frac{c}{2^{(u+1)(\alpha+2)}}$$

sein, also

$$2^u>\frac{1}{2}c^{\frac{1}{\alpha+2}}2^{t\frac{\gamma}{\alpha+2}}.$$

Wird also die ganze Zahl u_0 durch

$$2^{u_0}>\frac{1}{2}c^{\frac{1}{\alpha+2}}2^{t\frac{\gamma}{\alpha+2}}\geqq 2^{u_0-1} \tag{23}$$

definiert, so ist

$$N(t,u)=0 \quad \text{für} \quad u<u_0. \tag{24}$$

Wegen (18), (20), (24), (23) ist also (man beachte, dass die Rechnungen auch für $u_0<0$ und für $u_0>t$ gelten)

$$N(t)\leqq\sum_{u_0\leqq u\leqq t}(2^{3+2u-t\gamma}+1)\,2^{t+1-u}$$
$$<2^{5+t(2-\gamma)}+2^{2+t-u_0}<2^{5+t(2-\gamma)}+c^{-\frac{1}{\alpha+2}}\,2^{3+t\left(1-\frac{\gamma}{\alpha+2}\right)}.$$

Um die Konvergenz der Reihe (19) zu beweisen, genügt es daher, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(2^{5+t(2-\gamma)}+c^{-\frac{1}{\alpha+2}}\,2^{3+t\left(1-\frac{\gamma}{\alpha+2}\right)}\right)\cdot(3\cdot 2^{2+(1-\gamma)t})^{s-1} \tag{25}$$

nachzuweisen. Es ist aber wegen (16')

$$2-\gamma+(s-1)(1-\gamma)=s+1-s\gamma<0;$$

weiter ist wegen (22)

$$1-\frac{\gamma}{\alpha+2}+(s-1)(1-\gamma)<1-\frac{s}{(s-1)\alpha+2s-1}+$$

$$+(s-1)\left(1-\frac{s(\alpha+2)}{(s-1)\alpha+2s-1}\right)=0;$$

daraus folgt aber die Konvergenz von (25). Die Inhalte aller ausgezeichneten Würfel aller Ordnungen $t\geqq 0$ bilden also eine konvergente Reihe. Es sei M_γ die Menge derjenigen Punkte $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$, die in unendlichvielen ausgezeichneten Würfeln liegen (M_γ hängt nur von γ, θ_1, s ab); alsdann ist $\mu M_\gamma=0$ (vgl. die Fussnote [7])). Es sei nun $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus $W-M_\gamma$. Wenn für ganze $p_i (i=1, 2, \ldots, s)$, q die Ungleichungen

$$(26) \qquad q>0, \quad \left|\theta_i-\frac{p_i}{q}\right|<\frac{1}{q^\gamma} \qquad (i=1, 2, \ldots, s)$$

gelten, so ist nach der Ungleichung mit $i=1$ die Zahl q ein ausgezeichneter Nenner irgendeniner Ordnung $t\geqq 0$. Nach den Ungleichungen mit $i=2, 3, \ldots, s$ liegt der Punkt $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ in dem ausgezeichneten Würfel der Ordnung t mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{p_2}{q}, \frac{p_3}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right)$ und der Kante $2q^{-\gamma}$. Da aber der Punkt $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ höchstens in endlichvielen ausgezeichneten Würfeln liegt, sind die Ungleichungen (26) höchstens für endlichviele ganze q bei geeigneten ganzen p_i erfüllbar; und da bei jedem festen ganzen q die Ungleichungen (26) für höchstens endlichviele Systeme ganzer Zahlen p_i erfüllt sind, so besitzt das System (26) überhaupt nur höchstens endlichviele Lösungen in ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$. Daher ist

$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s))\leqq\gamma.$$

Es sei nun $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine abnehmende Folge mit

$$\lim_{n=\infty}\gamma_n=\operatorname{Max}\left(\frac{s\beta_2(\theta_1)+2s}{(s-1)\beta_2(\theta_1)+2s-1}, \frac{s+1}{s}\right) \quad \text{für} \quad \beta_2(\theta_1)<\infty, \text{ bzw.}$$

$$\lim_{n=\infty}\gamma_n=\frac{s}{s-1} \quad \text{für} \quad \beta_2(\theta_1)=\infty.$$

Es sei $M=\sum_{n=1}^{\infty} M_{\gamma_n}$, also $\mu M=0$. Es sei $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus $W-M$; dann gilt

$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s))\leqq\gamma_n$$

für jedes ganze $n>0$, also auch

$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s))\leqq\text{Max}\left(\frac{s\,\beta_2(\theta_1)+2s}{(s-1)\,\beta_2(\theta_1)+2s-1},\ \frac{s+1}{s}\right)$$

für $\beta_2(\theta_1)<\infty$, bzw.

$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s))\leqq\frac{s}{s-1}\quad\text{für}\quad\beta_2(\theta_1)=\infty.$$

Daraus folgt aber

$$\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s)\leqq\text{Max}\left(\frac{\beta_2(\theta_1)-s+1}{(s-1)\,\beta_2(\theta_1)+2s-1},\ 0\right)\quad\text{für}\quad\beta_2(\theta_1)<\infty,$$

$$\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s)\leqq\frac{1}{s-1}\quad\text{für}\quad\beta_2(\theta_1)=\infty;$$

nach dem ersten Teil dieses Paragraphen kann aber hier das Zeichen $<$ nicht gelten. Damit ist also auch die Behauptung 2b des Satzes 2 bewiesen.
