Vojtěch Jarník; Vladimír Knichal

Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de deux fonctions

Fund. Math. 24 (1935), pp. 206--208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500747

Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de deux fonctions.

Par

V. Jarník et V. Knichal (Prague).

Soit A l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ qui sont définies et continues sur l'intervalle fermé $I = \langle 0, 1 \rangle$ et dont les valeurs appartiennent à I. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1^er^. *Soit $f_1(x)$, $f_2(x), \dots$ une suite infinie de fonctions de l'ensemble A. Alors il existe deux fonctions $\varphi_1(x) \in A$, $\varphi_2(x) \in A$ telles que toute fonction de la suite $f_1(x)$, $f_2(x), \dots$ soit une superposition finie de ces deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.*

Prenons pour $f_1(x)$, $f_2(x), \dots$ la suite de tous les polynomes en x (définis dans I), réduits à l'intervalle I [1]), aux coefficients rationnels. En se rappelant un théorème bien connu de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynomes, on voit que le théorème 1^er^ entraîne le conséquence suivante:

Théorème 2^e^. *Il existe deux fonctions $\varphi_1(x) \in A$, $\varphi_2(x) \in A$ jouissantes de la propriété suivante: $f(x)$ étant une fonction quelconque de A et de δ étant un nombre positif quelconque, il existe une fonction $\psi(x)$, qui est une superposition finie de ces deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, telle que*

$$\operatorname*{Max}_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \psi(x)| < \delta.$$

C'est aux MM. Schreier et Ulam [2]) que l'on doit le théorème 2^e^, mais sous une forme moins précise: on obtient leur thé-

[1]) C'est-à-dire tout polynome $P(x)$ doit être remplacé par la fonction $F(x)$, égale à $P(x)$, si $0 \leq P(x) \leq 1$, égale à 0, si $P(x) < 0$ et égale à 1, si $P(x) > 1$.

[2]) Über topologische Abbildungen der euklidischen Sphären, *Fund. Math.* t. XXIII, p. 102—118.

orème en remplaçant, dans notre théorème 2e, partout les mots „deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$" par „cinq fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_5(x)$". Ensuite, M. Sierpiński[1]) a démontré un théorème, qui s'obtient de notre théorème 1er en y remplaçant partout les mots „deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$" par „quatre fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_4(x)$"; il a donc aussi remplacé (à l'aide du théorème mentionné de Weierstrass) le nombre 5 par 4 dans le théorème des MM. Schreier et Ulam. Le but de cette note est donc de remplacer le nombre 4 dans le théorème de M. Sierpiński par 2.

Remarquons enfin que l'on ne peut remplacer, ni dans le théorème 1er, ni dans le théorème 2e, le nombre „deux" par „un". D'une manière plus précise, on a le théorème (presque banal) suivant:

Théorème 3e. *Il existe deux fonctions $f_1(x) \in A$, $f_2(x) \in A$, jouissantes de la propriété suivante: quelle que soit la fonction $\varphi(x) \in A$, on a ou bien*[2])

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} |f_1(x) - \varphi^n(x)| \geqq \tfrac{1}{2}$$

pour chaque n entier et positif ou bien

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} |f_2(x) - \varphi^n(x)| \geqq \tfrac{1}{2}$$

pour chaque n entier et positif[3]).

Démonstration du théorème 1er. Soit $f_1(x), f_2(x), \dots$ une suite de fonctions de l'ensemble A. D'après le théorème de M. Sierpiński il existe quatre fonctions $\varphi_i(x) \in A$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ telles que toute fonction $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ soit une superposition finie de ces quatre fonctions $\varphi_i(x)$. Pour achever la démonstration du théorème 1er, il suffit donc de construir deux fonctions $\psi_1(x) \in A$, $\psi_2(x) \in A$ telles que chaque fonction $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ soit une superposition finie de ces deux fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$.

Pour ce but, posons

$$\psi_1(x) = \tfrac{1}{2}(x + 1) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1;$$

[1]) Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de quatre fonctions, Fund. Math. t. XXIII p. 119–120.

[2]) $\varphi^n(x)$ signifie la n-tième itérée de $\varphi(x)$.

[3]) Remarquons que le nombre 1/2 ne peut pas être remplacé par aucun nombre plus grand; car, en posant $\varphi(x) = 1/2$ pour $x \in I$, on a $|f(x) - \varphi(x)| \leqq 1/2$ pour chaque $f \in A$ et pour chaque $x \in I$.

$$\psi_2(x) = \varphi_i(2^{i+2}(x-1+2^{-i})) \text{ pour } 1-2^{-i} \leqq x \leqq 1-2^{-i}+2^{-i-2},$$
$$i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\psi_2(x) = 8(x-1+2^{-5}) \quad \text{pour} \quad 1-2^{-5} \leqq x \leqq 1;$$

dans le reste de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, définissons $\psi_2(x)$ d'une telle manière que $\psi_2(x) \in A$. Ceci est possible; pour le voir, il suffit de remarquer que

$$1-2^{-i}+2^{-i-2} < 1-2^{-(i+1)}, \quad 1-2^{-4}+2^{-6} < 1-2^{-5}.$$

On a

$$\psi_1^n(x) = 2^{-n}(x+2^n-1) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots;$$

on le voit aussitôt par induction.

Soit maintenant i un nombre entier, $1 \leqq i \leqq 4$, $0 \leqq x \leqq 1$; alors on a

$$\psi_1^5(x) = 2^{-5}(x+2^5-1), \quad \text{donc} \quad 1-2^{-5} \leqq \psi_1^5(x) \leqq 1,$$

d'où

$$\psi_2\, \psi_1^5(x) = 8(\psi_1^5(x)-1+2^{-5}) = \frac{x}{4},$$

$$\psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x) = 2^{-i}\left[\frac{x}{4}+2^i-1\right] = 2^{-i-2}x+1-2^{-i},$$

donc

$$1-2^{-i} \leqq \psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x) \leqq 1-2^{-i}+2^{-i-2},$$

d'où enfin

$$\psi_2\, \psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x) = \varphi_i(2^{i+2}(\psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x)-1+2^{-i})) = \varphi_i(x),$$

ce qui achève le démonstration.

Démonstration du théorème 3^e^. Posons $f_1(x)=0$. $f_2(x)=1$ pour $0 \leqq x \leqq 1$. Supposons qu'il existe une fonction $\varphi(x) \in A$ et deux nombres entiers et positifs n, m tels que l'on ait pour tous les $x \in I$

$$|f_1(x)-\varphi^n(x)| < \tfrac{1}{2}, \quad |f_2(x)-\varphi^m(x)| < \tfrac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi^n(x) < \tfrac{1}{2}, \quad \varphi^m(x) > \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on avait $n = m$, on aurait $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ — contradiction; si l'on avait $n < m$, on aurait pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi^m(x) = \varphi^n\, \varphi^{m-n}(x) < \tfrac{1}{2}$$

— contradiction; si l'on avait $n > m$, on aurait pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi^n(x) = \varphi^m\, \varphi^{n-m}(x) > \tfrac{1}{2}$$

— contradiction.