Vojtěch Jarník

Sur la dérivabilité des fonctions continues

Spisy přírodov. fakulty univ. Karlovy, No. 129 (1934), 7 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500738

Sur la dérivabilité des fonctions continues.

Par *Vojtěch Jarník* (Praha).

§ 1. Notations et résultats.

Nous allons désigner par μM la mesure lebesguienne linéaire de l'ensemble M. Si E est un ensemble mesurable de nombres réels et t un nombre réel, nous allons appeler le nombre

$$\limsup_{h=0+} \mu\,(E\,.\,(t,\, t+h))\,.\,h^{-1}$$

la „densité supérieure droite de E au point t"; on a une définition symmétrique pour le côté gauche. Le nombre

$$\limsup_{h=0+} \mu\,(E\,.\,(t-h,\; t+h))\,.\,(2h)^{-1}$$

sera appelé la „densité supérieure symmétrique de E au point t"; évidemment la densité sup. symmétrique ne surpasse pas la moyenne arithmétique de la densité sup. droite et gauche.

Dans la suite, nous allons envisager les nombres dérivés des fonctions continues par la méthode des catégories. Par C nous allons désigner l'ensemble de toutes les fonctions réelles $x(t)$, définies et continues dans l'intervalle $[0, 1]$, avec la définition usuelle de l'écart.[1]) En particulier, nous allons nous occuper de telles propriétés des nombres dérivés, qui sont satisfaites pour toutes les fonctions de C, excepté peut-être un ensemble de fonctions de $1^{\text{ère}}$ catégorie. Notre but est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Il existe, dans l'espace C, un résiduel A, tel que chaque fonction $x(t) \varepsilon A$ satisfait aux conditions suivantes*:

1. *à chaque $t\, \varepsilon\, [0, 1)$ on peut faire correspondre un ensemble E_1*[2]) *dont*

[1]) $[0, 1]$ signifie l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$; par $[0, 1)$, nous désignons l'intervalle $0 \leqq t < 1$ etc. Toutes les notions relatives, tant qu'il s'agit des ensembles de fonctions, sont à interpréter relativement à l'espace C. Un résiduel est le complémentaire d'un ensemble de 1ère catégorie. C lui-même étant de 2ème catégorie, un résiduel (relativement à l'espace C) ne peut pas être vide.

[2]) Dépendant en général de la fonction $x(t)$ et de la valeur t.

la densité supérieure droite au point t est égale à un et tel que

$$\lim_{t'=t+,\, t'\varepsilon E_1} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t}$$

existe et soit égale soit à ∞ soit à $-\infty$ (les valeurs ∞ et $-\infty$ pouvant varier selon la valeur de t);

2. *à chaque $t \varepsilon (0, 1]$ on peut faire correspondre un ensemble E_2*[2]) *dont la densité supérieure gauche au point t est égale à un et tel que*

$$\lim_{t'=t-,\, t'\varepsilon E_2} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t}$$

existe et soit égale soit à ∞ soit à $-\infty$;

3. *à chaque $t \varepsilon (0, 1)$ on peut faire correspondre un ensemble E_3*[2]) *dont la densité supérieure symmétrique au point t est au moins égale à $^1/_2$ et tel que*

$$\lim_{t'=t,\, t'\varepsilon E_3} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t} = \infty;$$

4. *à chaque $t \varepsilon (0, 1)$ on peut faire correspondre un ensemble E_4*[2]) *dont la densité supérieure symmétrique au point t est au moins égale à $^1/_2$ et tel que*

$$\lim_{t'=t,\, t'\varepsilon E_4} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t} = -\infty.^{3)}$$

Pour des renseignements bibliographiques, le lecteur peut consulter mes notes „Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen"[4]) et „Sur les nombres dérivés approximatifs"[4]), où l'on trouvera une série d'autres théorèmes de ce genre.

§ 2. Démonstration.

Pour démontrer le théorème, remarquons que les conditions 1 et 2 sont complètement symmétriques, de même que les conditions 3 et 4. En remarquant encore que le produit d'un nombre fini de résiduels est lui-même un résiduel, on voit qu'il suffit de démontrer les lemmes suivants:

Lemme 1er. *Soit L l'ensemble de toutes les fonctions $x(t) \varepsilon C$ qui jouissent de la propriété suivante: il existe au moins une valeur $t \varepsilon [0, 1)$ telle qu'il n'existe aucun ensemble E jouissant des propriétés suivantes:*

---

[3]) Remarquons que dans les conditions 1 et 2, le côté (droit-gauche) est préscrit, tandis que le signe de la limite reste indéterminé; au contraire, dans les conditions 3 et 4, le signe de la limite est préscrit, tandis que le côté reste indéterminé.

[4]) A paraître dans les „Fundamenta mathematicae".

1. *La densité supérieure droite de E au point t est égale à un.*

2. *La limite*

$$\lim_{t'=t+,\, t'\varepsilon E} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t}$$

existe et est égale à l'un des nombres ∞, $-\infty$.

Alors L est de 1ère catégorie.

Lemme 2ème. *Soit M l'ensemble de toutes les fonctions $x(t) \varepsilon C$ qui jouissent de la propriété suivante: il existe au moins une valeur $t \varepsilon (0, 1)$ telle qu'il n'existe aucun ensemble E jouissant des propriétés suivantes:*

1. *La densité supérieure symmétrique de E au point t est au moins égale à $^1/_2$.*

2. $$\lim_{t'=t,\, t'\varepsilon E} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t} = \infty.$$

Alors M est de 1ère catégorie.

Soit n un nombre entier, $n > 2$. Soit L_n l'ensemble de toutes les fonctions $x(t) \varepsilon C$ qui jouissent de la propriété suivante: il existe un nombre $t \varepsilon [0, 1-n^{-1}]$ tel que pour chaque u de l'intervalle $0 < u \leqq n^{-1}$ les inégalités

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \leqq n;\quad 0 < h \leqq u\right)\right) \geqq \frac{u}{n}. \tag{1}$$

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \geqq -n;\quad 0 < h \leqq u\right)\right) \geqq \frac{u}{n} \tag{2}$$

se trouvent vérifiées. Evidemment $L = \sum_{n=3}^{\infty} L_n$.

Soit M_n l'ensemble de toutes les fonctions $x(t) \varepsilon C$ qui jouissent de la propriété suivante: il existe un nombre $t \varepsilon [n^{-1}, 1-n^{-1}]$ tel que pour chaque u de l'intervalle $0 < u \leqq n^{-1}$ l'inégalité

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \leqq n.\quad 0 < |h| \leqq u\right)\right) \geqq \left(1+\frac{1}{n}\right) u \tag{3}$$

se trouve vérifiée. Evidemment $M = \sum_{n=3}^{\infty} M_n$.

Il suffit alors de démontrer que les ensembles L_n, M_n sont non denses. Pour cela, il suffit à son tour de démontrer les lemmes suivants:

Lemme 3ème. *Les ensembles L_n et M_n sont fermés.*

Lemme 4ème. *K étant une sphère quelconque de l'espace C et $n > 2$ étant un nombre entier, l'ensemble $K - (L_n + M_n)$ n'est pas vide.*

Démonstration du lemme 3ème. Il suffit de considérer L_n, la démonstration pour M_n étant tout-à-fait analogue. Soit alors $x_k(t) \varepsilon L_n$ pour $k = 1, 2, \ldots$; soit $x_k(t) \to x(t)$ uniformément pour $0 \leqq t \leqq 1$. Il faut démontrer que $x(t) \varepsilon L_n$. Il existe une suite $t_1, t_2, \ldots$ telle que $t_k \varepsilon [0, 1 - n^{-1}]$ et telle que les relations

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x_k(t_k + h) - x_k(t_k)}{h} \leqq n;\ 0 < h \leqq u\right)\right) \geqq \frac{u}{n},$$

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x_k(t_k + h) - x_k(t_k)}{h} \geqq -n;\ 0 < h \leqq u\right)\right) \geqq \frac{u}{n}$$

se trouvent satisfaites pour chaque u de l'intervalle $0 < u \leqq n^{-1}$. En nous bornant à une suite partielle de $x_1(t), x_2(t), \ldots$, nous pouvons supposer que la limite $\lim\limits_{k=\infty} t_k = t_0$ existe; on a donc $t_0 \varepsilon [0, 1 - n^{-1}]$. Soit u un nombre de l'intervalle $0 < u \leqq n^{-1}$; en posant[5])

$$F = F(u) = \limsup_{k=\infty} \underset{h}{E}\left(\frac{x_k(t_k + h) - x_k(t_k)}{h} \leqq n;\ 0 < h \leqq u\right)\cdot$$

on a $\mu F \geqq un^{-1}$. Soit $h \varepsilon F$; on aura

$$\frac{x_k(t_k + h) - x_k(t_k)}{h} \leqq n$$

pour une infinité de valeurs de k. Mais on a évidemment $x_k(t_k) \to x(t_0)$, $x_k(t_k + h) \to x(t_0 + h)$, d'où

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \leqq n.$$

On a donc

$$F \subset \underset{h}{E}\left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \leqq n;\ 0 < h \leqq u\right),$$

d'où

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \leqq n;\ 0 < h \leqq u\right)\right) \geqq \frac{u}{n}$$

et de la même manière on voit que

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \geqq -n;\ 0 < h \leqq u\right)\right) \geqq \frac{u}{n}\cdot$$

On a donc $x(t) \varepsilon L_n$, q. e. d.

Démonstration du lemme 4ème. Soit K une sphère de l'espace C; soit n un nombre entier, $n > 2$. Il existe alors un polynome $w(t) \varepsilon K$ et un nombre $r > 0$ tel que les relations

$$z(t) \varepsilon C, \quad \operatorname*{Max}_{0 \leq t \leq 1} |z(t)| \leqq r$$

entraînent $w(t) + z(t) \varepsilon K$. Il existe ensuite un nombre $p > 0$ tel que

---

[5]) Nous posons $\limsup\limits_{k=\infty} G_k = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{m=k}^{\infty} G_m$.

les relations $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq t' \leqq 1$, $t \neq t'$ entraînent l'inégalité

$$\left|\frac{w(t') - w(t)}{t' - t}\right| < p.$$

Soit m un nombre entier tel que

$$m > n, \quad \frac{2\,(n + p)}{rm} < \frac{1}{n} \quad (\text{d'où } rm > n + p); \tag{4}$$

soit ensuite δ un nombre tel que

$$0 < \delta < \tfrac{1}{2}, \quad \delta + \frac{2\,(n + p)}{rm} < \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Nous définissons $z(t)$ pour $t \,\varepsilon\, [0, 1]$ comme il suit:

Pour $t = \dfrac{s}{m}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m)$ on a $z(t) = 0$.

Pour $t = \dfrac{s + 1}{m} - \dfrac{\delta}{m}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$ on a $z(t) = r$.

Pour $\dfrac{s}{m} \leqq t \leqq \dfrac{s + 1 - \delta}{m}$

et pour $\dfrac{s + 1 - \delta}{m} \leqq t \leqq \dfrac{s + 1}{m}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$.

$z(t)$ est une fonction linéaire. On a donc $0 \leqq z(t) \leqq r$, d'où

$$w(t) + z(t) \,\varepsilon\, K. \tag{6}$$

D'autre part, soit t un nombre quelconque de l'intervalle $[0, 1 - n^{-1}]$. Si $sm^{-1} \leqq t < (s + 1 - \delta)\, m^{-1}$ pour une valeur s $(s = 0, 1, \ldots, m - 1)$, posons $u = (s + 1 - \delta)\, m^{-1} - t$; si, au contraire, $(s + 1 - \delta)\, m^{-1} \leqq$ $\leqq t < (s + 1)\, m^{-1}$ pour une valeur s $(s = 0, 1, \ldots, m - 1)$, posons $u = (s + 1)\, m^{-1} - t$; dans les deux cas, on a $0 < u < m^{-1} < n^{-1}$. Dans le premier cas, on a pour $0 < h \leqq u$:

$$\frac{z(t + h) - z(t)}{h} = r : \left(\frac{1}{m} - \frac{\delta}{m}\right) > rm > n + p,$$

d'où

$$\frac{w(t + h) + z(t + h) - w(t) - z(t)}{h} > n,$$

d'où

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{w(t + h) + z(t + h) - w(t) - z(t)}{h} \leqq n;\ 0 < h \leqq u\right)\right) = 0 < \frac{u}{n},$$

c'est-à-dire l'inégalité (1) est en défaut pour $x(t) = w(t) + z(t)$.

Dans le deuxième cas, on a pour $0 < h \leqq u$:

$$\frac{z(t + h) - z(t)}{h} = -\, r : \frac{\delta}{m} < -\, mr < -\, n - p,$$

d'où

$$\frac{w(t+h)+z(t+h)-w(t)-z(t)}{h} < -n,$$

d'où

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{w(t+h)+z(t+h)-w(t)-z(t)}{h} \geqq -n;\ 0 < h \leqq u\right)\right) = 0 < \frac{u}{n},$$

c'est-à-dire l'inégalité (2) est en défaut pour $x(t) = w(t) + z(t)$. Donc à tout $t \,\varepsilon\, [0, 1 - n^{-1}]$ correspond un nombre $u \,\varepsilon\, (0, n^{-1}]$ tel qu'au moins une des relations (1), (2) soit en défaut pour $x(t) = w(t) + z(t)$; donc

$$w(t) + z(t) \,\varepsilon\, C - L_n. \tag{7}$$

Soit enfin t un nombre quelconque de l'intervalle $[n^{-1}, 1 - n^{-1}]$. On a ou bien $sm^{-1} \leqq t \leqq (s + 1 - \delta)\, m^{-1}$ ou bien $(s + 1 - \delta)\, m^{-1} < t < (s + 1)\, m^{-1}$ pour une certaine valeur s ($s = 1, 2, \ldots, m - 2$). Si $sm^{-1} \leqq t \leqq (s + 1 - \delta)\, m^{-1}$, posons $u = \frac{1}{2}(1 - \delta)\, m^{-1}$; donc $0 < u \leqq n^{-1}$. Au moins un des deux intervalles $[t - u, t]$, $[t, t + u]$ est tout entier contenu dans l'intervalle $[sm^{-1}, (s + 1 - \delta)\, m^{-1}]$; mais pour $sm^{-1} \leqq t + h \leqq (s + 1 - \delta)\, m^{-1}$, $h \neq 0$ on a

$$\frac{z(t+h) - z(t)}{h} = r : \left(\frac{1}{m} - \frac{\delta}{m}\right) > rm > n + p,$$

d'où

$$\frac{w(t+h)+z(t+h)-w(t)-z(t)}{h} > n;$$

donc

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{w(t+h)+z(t+h)-w(t)-z(t)}{h} \leqq n,\ 0 < |\,h\,| \leqq u\right)\right) \leqq$$
$$\leqq u < \left(1 + \frac{1}{n}\right) u;$$

donc l'inégalité (3) est en défaut pour $x(t) = w(t) + z(t)$. Si, d'autre part, $(s + 1 - \delta)\, m^{-1} < t < (s + 1)\, m^{-1}$, posons $u = m^{-1}$, donc $0 < u \leqq n^{-1}$. Dans l'intervalle $[sm^{-1}, (s + 1 - \delta)\, m^{-1}]$, l'image de $z(t)$ est un segment rectiligne dont les points extrêmes ont les coordonnées sm^{-1}, 0 et $(s + 1 - \delta)\, m^{-1}$, r; pour $0 \leqq \alpha \leqq r$, on aura donc

$$\mu\left(\underset{t'}{E}(z(t') < \alpha;\ sm^{-1} \leqq t' \leqq (s + 1 - \delta)\, m^{-1})\right) = \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{1 - \delta}{m},$$

et d'une façon analogue

$$\mu\left(\underset{t'}{E}(z(t') > \alpha;\ (s + 1)\, m^{-1} \leqq t' \leqq (s + 2 - \delta)\, m^{-1})\right) = \frac{r - \alpha}{r} \cdot \frac{1 - \delta}{m}.$$

Par conséquent on a [remarquons que $t - u = t - m^{-1} < sm^{-1}$, $t + u = t + m^{-1} > (s + 2 - \delta)\, m^{-1}$; remarquons enfin que la première des inégalités suivantes est évidente pour $z(t) < (n + p)\, m^{-1}$ et la seconde pour $z(t) > r - (n + p)\, m^{-1}$]

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(z(t + h) < z(t) - \frac{n + p}{m};\ 0 > h \geqq - \frac{1}{m}\right)\right) \geqq \qquad (8)$$
$$\geqq \frac{z(t) - m^{-1}\,(n + p)}{r} \cdot \frac{1 - \delta}{m},$$

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(z(t + h) > z(t) + \frac{n + p}{m};\ 0 < h \leqq \frac{1}{m}\right)\right) \geqq \qquad (9)$$
$$\geqq \frac{r - z(t) - m^{-1}(n + p)}{r} \cdot \frac{1 - \delta}{m}.$$

Mais les relations $0 > h \geqq - m^{-1}$, $z(t + h) < z(t) - (n + p)\, m^{-1}$ entraînent

$$\frac{z(t + h) - z(t)}{h} > n + p, \qquad (10)$$

et, de même, les relations $0 < h \leqq m^{-1}$, $z(t + h) > z(t) + (n + p)\, m^{-1}$ entraînent aussi la relation (10); mais, à son tour, la relation (10) entraîne l'inégalité

$$\frac{w(t + h) + z(t + h) - w(t) - z(t)}{h} > n.$$

On a donc, à cause de (8), (9), (10) [voir aussi (4), (5)] pour $u = m^{-1}$:

$$\mu\left(\underset{h}{E}\left(\frac{w(t + h) + z(t + h) - w(t) - z(t)}{h} > n;\ 0 < |h| \leqq u\right)\right) \geqq$$
$$\geqq \frac{r - 2m^{-1}\,(n + p)}{r} \cdot \frac{1 - \delta}{m} > \left(1 - \delta - \frac{2\,(n + p)}{mr}\right) u > \left(1 - \frac{1}{n}\right) u;$$

donc la relation (3) se trouve en défaut pour $x(t) = w(t) + z(t)$. Donc: à tout $t\ \varepsilon\ [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$ on peut faire correspondre un nombre $u\ \varepsilon\ (0, n^{-1}]$ tel que la relation (3) soit en défaut pour $x(t) = w(t) + z(t)$; donc

$$w(t) + z(t)\ \varepsilon\ C - M_n. \qquad (11)$$

De (6), (7), (11) on conclut que l'ensemble $K - (L_n + M_n)$ n'est pas vide, q. e. d.

Praha, Université Charles, Séminaire mathématique, le 31 octobre 1933.