Vojtěch Jarník

Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen

Práce Mat.-Fiz. 39 (1932), pp. 135--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500730

Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen

(Twierdzenie o istnieniu z teorji przybliżeń diofantycznych)

von

V. Jarník

Es sei s eine ganze positive Zahl. Ein System von s reellen [1]) Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ möge ein **eigentliches** System heissen, wenn keine Relation

$$k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i = 0$$

mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $k_0, k_1, \ldots, k_s$ gilt; sonst heisse das System **uneigentlich** [2]). Wenn $f(x)$ eine für hinreichend grosse x definierte und positive Funktion ist, so wollen wir sagen, dass das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation $f(x)$ zulässt, wenn es zu jeder positiven Zahl A ein System von $s+1$ ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_s, q$ gibt, so dass

$$q > A, \quad \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < f(q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Bekanntlich lässt jedes System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation $x^{-\frac{s+1}{s}}$ zu. Wir werden nun in dieser Note folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha \geqq \frac{s+1}{s}$; dann gibt es mindestens ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welches die Appro-

[1]) Alle vorkommenden Zahlen sind reell.

[2]) Für $s = 1$ bedeutet „θ_1 ist ein eigentliches System" ebensoviel wie „θ_1 ist irrational".

ximation $x^{-\alpha+\varepsilon}$ bei jedem $\varepsilon > 0$ und die Approximation $x^{-\alpha-\varepsilon}$ bei keinem $\varepsilon > 0$ zulässt.

Und noch etwas schärfer:

Satz 2. Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha \geqq \frac{s+1}{s}$; dann gibt es mindestens ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welches zwar die Approximation $\frac{2}{x^\alpha}$, nicht aber die Approximation $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ zulässt.

Der Satz ist nicht neu; ich habe bereits sogar einen schärferen Satz bewiesen [3]); ich will aber heute für den Satz 2 einen wesentlich verschiedenen und einfacheren Beweis geben [4]).

Hilfssatz. Es sei $\alpha_1 \geqq 2$; dann gibt es eine irrationale Zahl θ_1, welche zwar die Approximation $\frac{1}{x^{\alpha_1}}$, nicht aber die Approximation $\frac{1}{10\,x^{\alpha_1}}$ zulässt.

Beweis (wohlbekannt): Wir wollen die Zahl θ_1 durch ihre Kettenbruchentwickelung darstellen:

$$\theta_1 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \cdots;$$

die Näherungszähler p_n und Näherungsnenner q_n genügen für $n \geqq 1$ den Beziehungen

$$p_{n+1} = b_{n+1}\,p_n + p_{n-1}, \qquad q_{n+1} = b_{n+1}\,q_n + q_{n-1}.$$

Wir wählen die b_n sukzessive so, dass $b_{n+1} \sim 2\,q_n^{\alpha_1-2}$ (für $n \to \infty$) [5]). Dann gilt nach bekannten Sätzen für hinreichend grosse n:

$$\frac{1}{10\,q_n^{\alpha_1}} < \frac{1}{4 q_n^2 b_{n+1}} < \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} < \left|\theta_1 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2 b_{n+1}} < \frac{1}{q_n^{\alpha_1}},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. (Man hat nur noch zu beachten, dass aus

---

[3]) V. Jarník, Über die simultanen diophantischen Approximationen, Mathem. Zeitschrift 33 (1931), S. 505—543; weiter mit S. D. A. zitiert.

[4]) Über den Zusammenhang des Satzes 2. mit dem Satz aus S. D. A. und mit einigen anderen Sätzen vgl. den Schluss dieser Note.

[5]) Also $b_{n+1} = 2$ für $\alpha_1 = 2$ und für grosse n.

$\left|\theta_1 - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}$ (r, s ganz) folgt, dass $\frac{r}{s}$ einem Näherungsbruch von θ_1 gleich ist und dass $(p_n, q_n) = 1$).

Bemerkung. Durch diesen Hilfssatz ist Satz 2. im Falle $s = 1$ offenbar bereits bewiesen.

Erst im Falle $s > 1$ beginnt die Schwierigkeit. Wir wollen den Satz 2. durch Induktion beweisen. Es sei also eine ganze Zahl $s > 1$ gegeben und wir wollen den Satz 2. für diesen Wert von s beweisen unter der Annahme, dass er für kleinere s bereits bewiesen ist. Es sei also noch eine Zahl $\alpha \geqq \frac{s+1}{s}$ gegeben; wir wollen die Existenz eines eigentlichen Systems $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ nachweisen, welches zwar die Approximation $\frac{2}{x^\alpha}$, nicht aber die Approximation $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ zulässt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall: es sei $\alpha \geqq \frac{s}{s-1}$.

Dieser Fall ist noch leicht zu erledigen. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es nämlich ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$, welches zwar die Approximation $\frac{2}{x^\alpha}$, nicht aber die Approximation $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ zulässt.

Wir wählen ein solches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ und finden noch eine Folge von positiven ganzen Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$, so dass

$$q_{n+1} > 4q_n, \quad q_{n+1} > q_n^\alpha \tag{1}$$

und so, dass mit geeigneten ganzen Zahlen $p_{n,i}$ die Ungleichungen

$$\left|\theta_i - \frac{p_{n,i}}{q_n}\right| < \frac{2}{q_n^\alpha} \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

gelten.

Wenn nun ein Bruch $\frac{p}{q_n}$ (p ganz) gegeben ist, so kann man die ganze Zahl p' auf mindestens zwei Arten so wählen, dass

$$\left|\frac{p}{q_n} - \frac{p'}{q_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Wir können also eine Folge ganzer Zahlen

$$p_{1,s}, p_{2,s}, \ldots \tag{3}$$

wählen, so dass für $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\left|\frac{p_{n,s}}{q_n} - \frac{p_{n+1,s}}{q_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{q_{n+1}}; \tag{4}$$

und zwar können wir, nachdem $p_{1,s}, p_{2,s}, \ldots, p_{n,s}$ bereits gewählt worden sind, die Zahl $p_{n+1,s}$ noch auf mindestens zwei verschiedene Arten wählen. Es gibt also unabzählbar viele Folgen (3), welche (4) erfüllen. Für jede solche Folge (3) definieren wir θ_s durch die Gleichung

$$\theta_s = \lim_{n=\infty} \frac{p_{n,s}}{q_n}; \tag{5}$$

aus (1), (4), (5) folgt

$$\left|\theta_s - \frac{p_{n,s}}{q_n}\right| \leqq \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+2}} + \ldots < \frac{2}{q_{n+1}} < \frac{2}{q_n^\alpha}. \tag{6}$$

Das System $\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_s$ lässt also wegen (2), (6) die Approximation $\frac{2}{x^\alpha}$ zu; offenbar lässt es aber die Approximation $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ nicht zu, da dies bereits für das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ gilt.

Endlich behaupten wir: wir können die Folge (3) (mit der Eigenschaft (4)) so wählen, dass $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ein eigentliches System ist. Denn ist $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ uneigentlich, so gilt eine Relation

$$k_0 + \sum_{l=1}^{s} k_l \theta_l = 0 \quad (k_0, \ldots, k_s \text{ ganz}, \sum_{l=1}^{s} k_l^2 > 0),$$

worin sicher $k_s \neq 0$ ist (da $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ eigentlich ist). Das gibt also für θ_s nur abzahlbar viele Möglichkeiten

$$\theta_s = -\frac{1}{k_s} \left(k_0 + \sum_{l=1}^{s-1} k_l \theta_l\right),$$

während wir für die Folge (3) unabzählbar viele Möglichkeiten haben, und je zwei verschiedene Folgen (3) führen auch zu verschiedenen Werten von θ_s. Den letzten Punkt beweist man so: es seien

$$p_{1,s}, p_{2,s}, \ldots; \quad p'_{1,s}, p'_{2,s}, \ldots$$

zwei verschiedene Folgen ganzer Zahlen und es gelte

$$\left|\frac{p_{n,s}}{q_n} - \frac{p_{n+1,s}}{q_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{q_{n+1}}, \quad \left|\frac{p'_{n,s}}{q_n} - \frac{p'_{n+1,s}}{q_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{q_{n+1}};$$

es sei

$$\theta = \lim_{n=\infty} \frac{p_{n,s}}{q_n}, \qquad \theta'_s = \lim_{n=\infty} \frac{p'_{n,s}}{q_n}.$$

Dann ist, wenn z. B. $p_{k,s} \neq p'_{k,s}$:

$$|\theta_s - \theta'_s| \geqq \left|\frac{p_{k,s}}{q_k} - \frac{p'_{k,s}}{q_k}\right| - \left|\theta_s - \frac{p_{k,s}}{q_k}\right| - \left|\theta'_s - \frac{p_{k,s}}{q_k}\right| \geqq \frac{1}{q_k} - \frac{4}{q_{k+1}} > 0$$

(man beachte (1)). Also ist $\theta_s \neq \theta'_s$, w. z. b. w. [6]).

Zweiter Fall: es sei $\frac{s+1}{s} \leqq \alpha < \frac{s}{s-1}$.

Wir setzen

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{s-(s-1)\alpha}, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{s\,\alpha_1}{1+(s-1)\alpha_1}$$

(man beachte $s \geqq 2$, also $\alpha_1 \geqq s+1 \geqq 3 \geqq 2$).

Nach dem Hilfssatz gibt es eine irrationale Zahl θ_1, welche zwar die Approximation $\frac{1}{x^{\alpha_1}}$, nicht aber die Approximation $\frac{1}{10\,x^{\alpha_1}}$ zulässt Für genügend grosse ganze q und für alle ganzen p ist daher

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{10\,q^{\alpha_1}};$$

daher gibt es eine (nur von θ_1 abhängige) positive Zahl c_1 so, dass für alle ganzen p und alle positiven ganzen q gilt

$$\left|\theta_1 - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_1\,q^{\alpha_1}}.$$

Wir wollen nun die Zahl θ_1 bis zum Ende des Beweises festhalten. Wir bemerken noch, dass

$$s+1-s\alpha \leqq s+1-s\,\frac{s+1}{s} = 0,$$

$$s-\alpha(s-1)-\frac{\alpha}{\alpha_1} = s-\alpha(s-1)-(s-(s-1)\alpha) = 0;$$

man kann daher eine ganze, nur von θ_1 abhängige Zahl T finden, so dass $T \geqq 2$, $2^{T(\alpha-1)} > 2$ und

$$(7) \qquad 2^{2s+3}\sum_{t=T}^{\infty}\frac{2^{t(s+1-s\alpha)}}{\log^{2(s-1)}(2^t)} + 2^{2s+1}\,c_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\sum_{t=T}^{\infty}\frac{2^{t\left(s-\alpha(s-1)-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)}}{\log^{2(s-1)}(2^t)} < \frac{1}{2}$$

(denn die beiden Reihen sind konvergent, wegen

$$\log^{2(s-1)}(2^t) = t^{2(s-1)}\log^{2(s-1)}2).$$

Wir wollen ein solches T wählen und im Folgenden festhalten.

---

[6]) Man könnte die mengentheoretischen Hilfsmittel im Fall I beseitigen; sie werden aber im Fall II doch erscheinen.

Es sei nun t eine ganze Zahl, $t \geqq T$. Unter einem „ausgezeichneten Zahlenpaar der Ordnung t" verstehen wir jedes (geordnete) Paar von ganzen Zahlen p, q, für welches gilt

$$2^t \leqq q < 2^{t+1}, \qquad \left| \theta_1 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\alpha}.$$

Die zweite Zahl q eines ausgezeichneten Zahlenpaars der Ordnung t heisst ein „ausgezeichneter Nenner der Ordnung t". Wir wollen nun die Anzahl $N(t)$ der ausgezeichneten Nenner der Ordnung t abschätzen [7]). Zu jedem ausgezeichneten Zahlenpaar p, q der Ordnung t gibt es genau ein Paar von ganzen Zahlen v, w mit

$$w > 0, \quad (v, w) = 1, \quad \frac{v}{w} = \frac{p}{q} \quad (\text{also } w < 2^{t+1});$$

es ist dann $\left| \theta_1 - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{q^\alpha}$, also unsomehr

$$\left| \theta_1 - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{2^{t\alpha}}.$$

Umgekehrt, zu jedem Paar ganzer Zahlen v, w mit $w > 0$, $(v, w) = 1$ gibt es höchstens $\frac{2^{t+1}}{w}$ ausgezeichnete Zahlenpaare p, q der Ordnung t, für welche $\frac{p}{q} = \frac{v}{w}$ ist (es muss nämlich $q = aw$, $p = av$ sein, wo $\frac{2^t}{w} \leqq a < \frac{2^{t+1}}{w}$, a ganz).

Wir definieren nun die ganze Zahl u_0 durch die Ungleichungen

$$2^{u_0} \leqq 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}} \frac{1}{c_1^{\frac{1}{\alpha_1}}} < 2^{u_0+1}, \tag{8}$$

nehmen ein ganzes u mit $u \leqq t$ und bezeichnen mit $N(t, u)$ die Anzahl aller Paare ganzer Zahlen v, w, für welche gilt

$$(v, w) = 1, \qquad 2^u \leqq w < 2^{u+1}, \qquad \left| \theta_1 - \frac{v}{w} \right| < \frac{1}{2^{t\alpha}}. \tag{9}$$

Dann gilt also

$$N(t) \leqq \sum_{u \leqq t} N(t, u) \frac{2^{t+1}}{2^u}. \tag{10}$$

Für alle ganzen Zahlen a, b mit $b > 0$ ist $\left| \theta_1 - \frac{a}{b} \right| > \frac{1}{c_1 b^{\alpha_1}}$; wenn also

[7]) Das ausgezeichnete Paar p, q ist übrigens durch die Angabe des ausgezeichneten Nenners q bestimmt, da $\frac{1}{q} > \frac{2}{q^\alpha}$ (denn $q^{\alpha-1} \geqq 2^{T(\alpha-1)} > 2$).

(9) gelten soll, so muss $\frac{1}{c_1 w^{\alpha_1}} < \frac{1}{2^{t\alpha}}$ sein, also

$$2^{u+1} > w > \frac{1}{c_1^{\frac{1}{\alpha_1}}} 2^{t\frac{\alpha}{\alpha_1}},$$

also $u \geqq u_0$. Je zwei verschiedene Zahlen $\frac{v}{w}$ mit (9) haben voneinander einen Abstand, der grösser als 2^{-2u-2} ist; im Intervall $(\theta_1 - 2^{-t\alpha}, \theta_1 + 2^{-t\alpha})$ können höchstens $2 \cdot 2^{-t\alpha} \cdot 2^{2u+2} + 1$ solche Zahlen liegen. Daher ist

$$N(t,u) = 0 \quad \text{für} \quad u < u_0, \qquad N(t,u) \leqq 2^{3+2u-t\alpha} + 1 \quad \text{für} \quad u_0 \leqq u \leqq t.$$

Also ist nach (8), (10)

$$N(t) \leqq \sum_{u_0 \leqq u \leqq t} (2^{3+2u-t\alpha} + 1) 2^{t+1-u} < 2^{(2-\alpha)t+5} + 2^{t+2-u_0} < 2^{(2-\alpha)t+5} + c_1^{\frac{1}{\alpha_1}} 2^{3+t\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)}.$$

Wir betrachten nun den Einheitswürfel W: $0 \leqq x_2 \leqq 1$, $0 \leqq x_3 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_s \leqq 1$ im $(s-1)$-dimensionalen Cartesischen Raume R_{s-1} der Punkte $[x_2, x_3, \ldots, x_s]$. Wir konstruieren zu jedem ganzen $t \geqq T$ alle „ausgezeichneten Würfel der Ordnung t^u; das sollen alle Würfel

$$\left| x_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^\alpha \log^2 q} \qquad (i = 2, 3, \ldots, s)$$

sein, wo q alle ausgezeichneten Nenner der Ordnung t durchläuft und die p_i bei jedem solchen q unabhängig voneinander die Zahlen $0, 1, 2, \ldots q$ durchlaufen. Die Summe der Inhalte aller ausgezeichneten Würfel der Ordnung t ist höchstens gleich

$$N(t) \cdot (2^{t+1})^{s-1} \left(\frac{2}{2^{t\alpha} \log^2 (2^t)} \right)^{s-1} < 2^{2s+3} \cdot \frac{2^{t(s+1-s\alpha)}}{\log^{2(s-1)} (2^t)} + c_1^{\frac{1}{\alpha_1}} 2^{2s+1} \cdot \frac{2^{t\left(s-(s-1)\alpha-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)}}{\log^{2(s-1)} (2^t)}.$$

Nach (7) ist also die Summe der Inhalte aller ausgezeichneten Würfel aller Ordnungen $t \geqq T$ kleiner als $\frac{1}{2}$.

Es sei V die Vereinigungsmenge aller ausgezeichneten Würfel aller Ordnungen $t \geqq T$; es sei $M = W - V \cdot W$. Die Menge M ist nicht leer; denn sonst könnte man nach dem Borelschen Überdeckungssatz den abgeschlossenen Würfel W auch mit endlichvielen ausgezeichneten Würfeln überdecken, deren Inhaltsumme also mindestens gleich 1 sein müsste, und dies ist nicht der Fall.

Wir greifen nun aus M einen Punkt $[\theta_2, \theta_3, \ldots \theta_s]$ heraus und betrachten das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$.

Behauptung 1: Das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ lässt nicht die Approximation $\frac{1}{x^\alpha \log^2 x}$ zu.

Beweis: wäre für ein ganzes $q \geqq 2^T$ und ganze p_i

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha \log^2 q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{11}$$

so wäre $\left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}$, also wäre q ein ausgezeichneter Nenner (irgendeiner Ordnung $t \geqq T$); dann wäre aber (nach den letzten $s-1$ Ungleichungen (11)) der Punkt $[\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s]$ in einem ausgezeichneten Würfel derselben Ordnung[8]), also in V enthalten — Widerspruch.

Behauptung 2: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ist ein eigentliches System.

Beweis: Gesetzt, es wäre $\sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i + k_0 = 0$, wo die $k_i\,(0 \leqq i \leqq s)$ ganz sind und mindestens eine von den Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_s$ — sagen wir k_j — von Null verschieden ist. Zu jedem $c > 0$ gibt es ein ganzes $q > c$ und $s-1$ ganze Zahlen p_i, so dass

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{\frac{s}{s-1}}} \qquad (1 \leqq i \leqq s,\ i \neq j);$$

dann wäre also

$$\left|\theta_j \pm \frac{k_0 q + \sum\limits_{\substack{1 \leqq i \leqq s \\ i \neq j}} k_i p_i}{|k_j|\, q}\right| < \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} |k_i|}{|k_j|\, q^{\frac{s}{s-1}}},$$

$$\left|\theta_i - \frac{|k_j|\, p_i}{|k_j|\, q}\right| < \frac{|k_j|^{\frac{s}{s-1}}}{(|k_j|\, q)^{\frac{s}{s-1}}} \qquad (1 \leqq i \leqq s,\ i \neq j);$$

daher würde das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation

$$\frac{|k_j|^{\frac{1}{s-1}} \sum\limits_{i=1}^{s} |k_i|}{x^{\frac{s}{s-1}}}$$

zulassen, was mit der bereits bewiesenen Behauptung 1 $\left(\text{wegen } \alpha < \frac{s}{s-1}\right)$ im Widerspruch steht.

---

[8]) Denn für $i = 2, 3, \ldots, s$ ist $0 \leqq \theta_i \leqq 1$, wegen $q \geqq 4$, $\alpha > 1$ würde also aus (11) folgen $0 \leqq p_i \leqq q$.

Behauptung 3: Das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ lässt die Approximation $\frac{2}{x^\alpha}$ zu.

Beweis: Es sei $c > 0$; dann gibt es zwei ganze Zahlen p_1, q, so dass

$$q > c, \quad \left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{1}{q^{\alpha_1}}.$$

Wir wollen noch q so gross wählen, dass

$$\left(\left[q^{\frac{\alpha_1-1}{s}}\right] + 1\right)^{s-1} < 2^{\frac{1}{\alpha}} q^{\frac{(\alpha_1-1)(s-1)}{s}}.$$

Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip gibt es dann s ganze Zahlen w, v_i $(i = 2, \ldots, s)$ so, dass

$$|w \cdot q\,\theta_i - v_i| < \frac{1}{q^{\frac{\alpha_1-1}{s}}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, s)$$

$$0 < w \leqq \left(\left[q^{\frac{\alpha_1-1}{s}}\right] + 1\right)^{s-1} < 2^{\frac{1}{\alpha}} q^{\frac{(\alpha_1-1)(s-1)}{s}}.$$

Dann ist also

$$\left|\theta_1 - \frac{p_1 w}{q w}\right| < \frac{1}{q^{\alpha_1}}, \quad \left|\theta_i - \frac{v_i}{w q}\right| < \frac{1}{w q^{\frac{\alpha_1+s-1}{s}}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, s).$$

Weiter ist

$$q^{\alpha_1} = \left(q^{\frac{(\alpha_1-1)(s-1)}{s}+1}\right)^{\frac{\alpha_1 s}{\alpha_1(s-1)+1}} > \left(2^{-\frac{1}{\alpha}} w q\right)^\alpha = \frac{(w q)^\alpha}{2};$$

$$w q^{\frac{\alpha_1+s-1}{s}} = w q^\alpha \cdot q^{\frac{\alpha_1+s-1}{s} - \frac{\alpha_1 s}{\alpha_1(s-1)+1}} = w q^\alpha\, q^{\frac{(\alpha_1-1)(s-1)}{s} \cdot \frac{(\alpha_1-1)}{\alpha_1(s-1)+1}}$$

$$> w q^\alpha \left(2^{-\frac{1}{\alpha}} w\right)^{\alpha-1} > \frac{(wq)^\alpha}{2};$$

also ist

$$\left|\theta_1 - \frac{p_1 w}{w q}\right| < \frac{2}{(w q)^\alpha}, \left|\theta_i - \frac{v_i}{w q}\right| < \frac{2}{(w q)^\alpha} \qquad (i = 2, 3, \ldots, s),$$

w. z. b. w.

Durch die Behauptungen 1, 2, 3 ist aber der zweite Fall vollständig erledigt.

Wie bereits erwähnt, ist der Satz 2 nicht neu, im Gegenteil, es sind noch schärfere Resultate bekannt. Für $\alpha = \frac{s+1}{s}$ ist nämlich folgender Satz bekannt:

Satz 3ª. Es sei s ganz, $s \geqq 1$; dann gibt es eine nur von s abhängige Zahl $c(s) > 0$ und ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welches zwar die Approximation $x^{-\frac{s+1}{s}}$, nicht aber die Approximation $c(s)\,x^{-\frac{s+1}{s}}$ zulässt [9]).

[9]) Dieser Satz (und noch wesentlich mehr) ist in der Arbeit O. Perron, Über diophantische Approximationen, Mathem. Annalen 83 (1921), S. 77—84 enthalten.

Für $\alpha > 2$ ist folgender Satz bekannt[10]:

Satz 3$^{\mathrm{b}}$. Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha > 2$; dann gibt es ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welches zwar die Approximation $x^{-\alpha}$, aber keine Approximation $cx^{-\alpha}$ $(0 < c < 1$, c von x unabhängig) zulässt.

Mit Hilfe des Satzes 3$^{\mathrm{a}}$ könnte man noch einige andere α erledigen:

Satz 3$^{\mathrm{c}}$. Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha = \frac{n+1}{n}$, wo n ganz, $1 \leqq n \leqq s$. Dann gibt es ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welches zwar die Approximation $x^{-\alpha}$, nicht aber die Approximation $c(n)x^{-\alpha}$ zulässt ($c(n)$ ist die Konstante aus dem Satz 3$^{\mathrm{a}}$).

Der Beweis des Satzes 3$^{\mathrm{c}}$ wäre ganz leicht: man wähle zuerst ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, welches die Approximation $c(n)\,x^{-\frac{n+1}{n}}$ nicht zulässt und dann füge man noch eventuell weitere Zahlen $\theta_{n+1}, \ldots, \theta_s$ hinzu, durch welche die Approximation $x^{-\frac{n+1}{n}}$ nicht gestört wird[11].

Aber auch für die übrigen Werte von α habe ich schon einen schärferen Satz bewiesen; in S. D. A. findet sich nämlich ein Satz (Satz 5), aus welchem sich als einfacher Spezialfall folgender Satz ergibt:[12]

Satz 3$^{\mathrm{d}}$. Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha > \frac{s+1}{s}$; es sei $f(x)$ eine für hinreichend grosse x definierte und positive Funktion; $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$.

Dann gibt es eigentliche Systeme $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welche zwar die Approximation $x^{-\alpha}$, nicht aber die Approximation $x^{-\alpha} f(x)$ zulassen.

Man sieht, dass die Sätze 3$^{\mathrm{a}}$ bis 3$^{\mathrm{d}}$ (ja sogar die Sätze 3$^{\mathrm{a}}$ und 3$^{\mathrm{d}}$ allein) zusammen ein schärferes Resultat geben als der Satz 2, in welchem eine logarithmische Ungenauigkeit übrigbleibt (diese ist bei unserem heutigen Beweis nicht zu beseitigen, da man die Konvergenz der Reihen in (7) braucht; freilich könnte man die Logarithmuspotenz noch etwas erniedrigen). Der Beweis der Sätze 3$^{\mathrm{a}}$, 3$^{\mathrm{b}}$, 3$^{\mathrm{c}}$ ist nicht besonders kompliziert; dagegen erschien der Satz 3$^{\mathrm{d}}$ in S. D. A. als eine Folge eines ziemlich schwierig zu beweisenden Satzes über das H a u s d o r f f'sche Mass gewisser Punktmengen; daher darf ich mir vielleicht erlauben, auch den heutigen, viel einfacheren Beweis des Satzes 2 mitzuteilen.

[10]) Spezialfall des Satzes 6 in S. D. A.

[11]) Man vergleiche ein analoges Verfahren bei dem Beweis des in der Fussnote 9 angeführten Satzes oder bei dem Beweis des „ersten Falles" in dieser Note.

[12]) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe $f(x)$ für $x \geqq 1$ eine stetige Ableitung und $f(x)$ sei monoton, $f(x) \leqq 1$ für $x \geqq 1$; man setze im Satz 5 (S. D. A.)

$$\omega(x) = x^{-\alpha}, \qquad \lambda(x) = x f^{-\frac{1}{\alpha}}(x);$$

dann bekommt man sofort den Satz 3$^{\mathrm{d}}$