Jarník, Vojtěch: Scholarly works

Vojtěch Jarník; Arnold Walfisz
Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden

Math. Zeitschr. 32 (1930), pp. 152--160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500723

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Von

Vojtěch Jarník in Prag und Arnold Walfisz in Warschau.

Es sei $x > 0$, $r \geqq 4$ ganz;

$$Q(u) = \sum_{\varrho, \sigma=1}^{r} a_{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma \qquad (a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho})$$

eine positiv definite quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten und der Determinante D.

$$A_Q(x) = \sum_{0 \leqq Q \leqq x} 1$$

stellt dann die Anzahl aller Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q \leqq x$ dar. Dieser Ausdruck wird durch das Ellipsoidvolumen

$$J_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} x^{\frac{r}{2}}$$

approximiert. Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - J_Q(x).$$

Sind die Koeffizienten $a_{\varrho\sigma}$ von Q rational (oder, was auf dasselbe hinauskommt, rationale Vielfache einer reellen Zahl a), so nennen wir die Form Q *rational*, anderenfalls aber *irrational*.

Bei rationalen Q gilt nach E. Landau für $r = 4$ [1])

(1) $$\mathsf{P}(x) = O(x \log^2 x) \text{ [2])}$$

---

[1]) E. Landau „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Zeitschrift 21 (1924), S. 126—132.

[2]) In einer z. Zt. nicht publizierten Arbeit hat Walfisz diese Abschätzung zu

(1a) $$\mathsf{P}(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right)$$

verschärft („Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Vierte Abhandlung" — erscheint in der Mathematischen Zeitschrift). Vordem hatte er dasselbe Restglied für die vierdimensionale Kugel

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \leqq x$$

erzielt; vgl. seine „Teilerprobleme", Mathematische Zeitschrift 26 (1927), S. 66–88, § 6.

und für $r \geqq 5$ [3])

$$(2) \qquad \mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Ferner ist nach Jarník [4])

$$(3) \qquad \mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

und, insbesondere für die vierdimensionale Kugel, nach Walfisz [5])

$$(4) \qquad \mathsf{P}(x) = \Omega(x \log\log x).$$

Ein Vergleich von (1) oder (1a) und (2) mit (3) und (4) zeigt, daß für $r \geqq 5$-dimensionale rationale Ellipsoide die Gitterrestordnung vollständig bestimmt ist, während bei vierdimensionalen nur noch eine logarithmische Spanne übrigbleibt.

Bei irrationalen Formen liegen die Verhältnisse, wie Untersuchungen von Walfisz [6]) und von Jarník [7]) gezeigt haben, ganz anders. Wir erwähnen hier vor allem folgenden Satz Jarníks (loc. cit. [7]), **1**):

Es sei

$$(5) \qquad Q = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2.$$

Dann ist für fast alle positiven Wertsysteme der α [8]) *und jedes feste* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right).$$

---

[3]) E. Landau, loc. cit. [1]). Den Fall $k \geqq 8$ hatte vorher Walfisz „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300—307, behandelt.

[4]) Bei E. Landau „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung", Mathematische Zeitschrift 24 (1925), S. 299—310. Seitdem ist das Ω-Ω_R-Ω_L-Problem für rationale Q in einer Reihe von Abhandlungen durch Landau, Müntz, Petersson, Jarník und Walfisz behandelt worden.

[5]) loc. cit. [2]), § 7.

[6]) „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Dritte Abhandlung", Mathematische Zeitschrift 27 (1927), S. 245—268.

[7]) **1.** „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Annalen **100** (1928), S. 699—721; **2.** „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung", Mathematische Annalen **101** (1929), S. 136—146; **3.** „O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech", Rozpravy 2. třídy české akademie **37** (1928), Nr. 27, S. 1—19; **4.** „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions", Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928, S. 1—10; **5.** „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", The Tôhoku Mathematical Journal **30** (1929), S. 354—371.

[8]) „Fast alle" bedeutet: alle bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null im r-dimensionalen Raume der $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Im folgenden werden wir uns nur mit *irrationalen Formen der Gestalt* (5) beschäftigen. Für diese ist nach Jarník (loc. cit. [7]), 2), sofern $r \geqq 6$,

$$(6) \qquad \mathsf{P}(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Der Anblick von (2) und (4) legt nun die Vermutung nahe, daß (6) zwar noch für $r = 5$, aber nicht mehr für $r = 4$ zutrifft. Wir werden in der Tat zeigen:

I. *Für* $r = 5$ *ist*

$$(7) \qquad \mathsf{P}(x) = o\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

II. *Es sei* $\varphi(x)$ *für* $x > 0$ *definiert und positiv,* $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. *Dann ist für ein geeignetes irrationales quaternäres* $Q(u) = Q(u; \varphi)$

$$(8) \qquad \mathsf{P}(x) = \Omega(x\,\varphi(x) \log\log x).$$

(7) ergibt sich bereits durch eine geringfügige Modifikation der Jarníkschen Methode und ist, ebenso wie (6), unverbesserlich, indem es zu jedem $\varphi(x)$ der oben genannten Art ein geeignetes Q mit

$$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{3}{2}}\varphi(x)\right) \quad \text{bzw.} \quad \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\varphi(x)\right)$$

gibt [9]).

§ 1.
Beweis von (7).

Bis zur Formel (17) der oben erwähnten Jarníkschen Arbeit (loc. cit. [7]), 2, S. 136—144) gelten alle Überlegungen unverändert auch für $r = 5$. Wir haben also nur den Schlußteil jener Arbeit entsprechend zu modifizieren. Hierbei schicken wir einige Formeln und Definitionen voraus (alles gleich für $r = 5$ spezialisiert), welche zum Verständnis des folgenden notwendig sind.

1. Vorbemerkungen. Wir setzen

$$A = \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_5}\right).$$

Weil die Zahlen $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_5}{\alpha_1}$ nicht alle rational sind, gibt es eine für $x > 0$ definierte positive Funktion $f(x)$ mit $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = \infty$, so daß aus

$$\left|\frac{h_j}{k_j}\frac{1}{\alpha_j} - \frac{h_1}{k_1}\frac{1}{\alpha_1}\right| \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}};$$

$$j = 1, \ldots, 5; \qquad h_j,\ k_j > 0 \ \text{ und ganz}$$

folgt

$$\operatorname{Max}(h_1, \ldots, h_5;\ k_1, \ldots, k_5) > f(x).$$

---

[9]) A. Walfisz, loc. cit. [6]), Satz 2.

Wir setzen

$$z = z(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}$$

und bezeichnen mit c unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ und z abhängen. Ferner setzen wir

$$\Theta(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 w} \quad \text{für} \quad \Re(w) > 0,$$

$$s = \frac{1}{x} + it \qquad (t \gtrless 0).$$

(7) wird dann bewiesen sein, wenn es gelingt zu zeigen, daß

$$(9) \qquad \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} = o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right)$$

ist.

Wir legen nun, bei gegebenem $x > 1$, auf die Achse $-\infty < t < \infty$ alle Fareybrüche $\frac{h}{k}$ mit $h \gtrless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$ und fügen auch die zugehörigen Medianten $\frac{h+h'}{k+k'}$ hinzu. Jeder Bruch $\frac{h}{k}$ bestimmt dann ein linksseitig abgeschlossenes, rechtsseitig offenes Intervall, das von ihm bis zu den beiden nächsten Medianten reicht. Dieses Intervall nennen wir $\mathfrak{B}_{h,k}$. Je zwei solche Intervalle sind punktfremd und in ihrer Gesamtheit bedecken sie lückenlos die ganze t-Achse. Dasselbe gilt demnach von jeder der 5 Intervallserien

$$\frac{2\pi}{\alpha_1} \mathfrak{B}_{h,k}, \ldots, \frac{2\pi}{\alpha_5} \mathfrak{B}_{h,k}. \text{ [10]}$$

Zu jedem $t \geqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}$ gehören eindeutig 10 ganze positive Zahlen

$$h_1, \ldots, h_5; \quad k_1, \ldots, k_5,$$

so daß t im Durchschnitt $\mathfrak{C}_{h,k}$ der 5 Intervalle

$$\frac{2\pi}{\alpha_1} \mathfrak{B}_{h_1,k_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\alpha_5} \mathfrak{B}_{h_5,k_5}$$

liegt. $M(h; k) = M(h_1, \ldots, h_5; k_1, \ldots, k_5)$ bedeute die durch $t \geqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}$ charakterisierte Teilmenge von $\mathfrak{C}_{h,k}$. Jedes $M(h; k)$ ist dann entweder leer oder ein halboffenes Intervall. Für $x > c$ ist $M(h; k)$ höchstens dann

---

[10]) Wenn $\beta < \gamma$, $\delta > 0$ und J das Intervall $\beta \leqq u < \gamma$ ist, so bedeute δJ das Intervall $\delta\beta \leqq u < \delta\gamma$.

nicht leer, wenn entweder

$$\operatorname{Max}(k_1, \ldots, k_5) > z^{-2}, \tag{10}$$

oder

$$\operatorname{Min}(h_1, \ldots, h_5) > c z^{-2} \tag{11}$$

ist. Aus (9) folgt demnach, daß es genügt

$$\sum_{h;k}{}' \int_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} = o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right) \tag{12}$$

zu beweisen, wobei den Zahlenquintupeln $h; k$ in $\sum'$ die Beschränkungen (10) oder (11) auferlegt werden.

Für Θ-Abschätzungen diene uns hierzu noch die Ungleichung

$$|\Theta(\alpha s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha k}\right)^2}}, \tag{13}$$

welche erfüllt ist, wenn α einen der 5 Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ annimmt und t in dem entsprechenden Intervall $\frac{2\pi}{\alpha} \mathfrak{B}_{h,k}$ liegt.

2. Beweis von (7). Wir betrachten zunächst den Beitrag derjenigen $M(h; k)$ zu der Summe in (12), bei welchen (10) gilt. Aus Symmetriegründen dürfen und wollen wir uns hierbei auf die $M(h; k)$ mit $k_1 > z^{-2}$ beschränken. Auf solchen $M(h; k)$ ist nach (13)

$$|\Theta(\alpha_1 s)| < c x^{\frac{1}{2}} k_1^{-\frac{1}{2}} < c x^{\frac{1}{2}} z,$$

also ist

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{\substack{h;k \\ k_1 > z^{-2}}} \int_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s)\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} \\ &\leqq c x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_1 s)|^{\frac{1}{2}} |\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} \text{ [11]} \\ &\leqq c x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{5} \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

---

[11]) An dieser Stelle weichen wir von der Jarníkschen Arbeit ab. Dort steht

$$\leqq c x^{\frac{1}{2}} z \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2};$$

es wird also der ganze Faktor $\Theta(\alpha_1 s)$ abgespalten. Das Integral hat hier die Form (9), nur daß es für ein $(r-1)$-dimensionales Ellipsoid gebildet wird. Dies schadet nichts, sobald $r \geqq 6$, da dann $r - 1 \geqq 5$. Im vorliegenden Falle käme man aber auf die so unangenehme vierte Dimension, die durch den obigen Kunstgriff auf die „$4\frac{1}{2}$"-te erhöht wird.

Es ist

$$I_j(x) = \int\limits_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq \sum_{\substack{h,k\\ h>0}} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}.$$

Wenn t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt $(h>0)$, so ist $\left|t-\frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}}$, also ist $c\frac{h}{k}<t<c\frac{h}{k}$ für $x>c$. Wegen (13) hat man mithin für $h>0$

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2} < c\frac{k}{h}\operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right)\frac{1}{k^{\frac{9}{4}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2}+\left(t-\frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right)^2\right)^{\frac{9}{8}}}$$

$$= \frac{c}{h k^{\frac{5}{4}}}\operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right)x^{\frac{5}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{9}{8}}} = \frac{c}{h k^{\frac{5}{4}}}\operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right)x^{\frac{5}{4}}.$$

Hieraus folgt

$$I_j(x) \leqq c x^{\frac{5}{4}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}\operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right)$$

$$= c x^{\frac{5}{4}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\sum_{k\leqq hz}\frac{1}{k^{\frac{1}{4}}} + z\sum_{k>hz}\frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}\right)$$

$$\leqq c x^{\frac{5}{4}} z^{\frac{3}{4}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^{\frac{5}{4}}} = c x^{\frac{5}{4}} z^{\frac{3}{4}},$$

$$I(x) \leqq c x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{4}} z^{\frac{3}{4}} = c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{5}{4}}$$

$$= o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right).$$

Nun bleibt uns noch übrig, den Beitrag derjenigen $M(h; k)$ zu der Summe in (12) abzuschätzen, für welche (11) gilt. Es ist

$$\sum_{\substack{h;k\\ \operatorname{Min} h > c z^{-2}}} \int\limits_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s)\dots\Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{5}\sum_{\substack{h;k\\ \operatorname{Min} h > c z^{-2}}} \int\limits_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_j s)|^5 \operatorname{Min}(zt, 1)\frac{dt}{t^2}.$$

Aus Symmetriegründen dürfen wir uns auf das Glied mit $j=1$ beschränken. Die Mengen $M(h; k)$ sind paarweise punktfremd, und $M(h; k)$ liegt in $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}$; also ist

$$\sum_{\substack{h;k\\ \operatorname{Min} h > c z^{-2}}} \int_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s)|^5 \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq \sum_{\substack{h_1, k_1\\ h_1 > c z^{-2}}} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}} |\Theta(\alpha_1 s)|^5 \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq c \sum_{\substack{h_1, k_1\\ h_1 > c z^{-2}}} \frac{1}{h_1 k_1^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k_1}{h_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h_1}{\alpha_1 k_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{4}}}$$

$$= c x^{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{h_1 k_1\\ h_1 > c z^{-2}}} \frac{1}{h_1 k_1^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k_1}{h_1}\right)$$

$$\leqq c x^{\frac{3}{2}} \sum_{h_1 > c z^{-2}} \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \sum_{k_1 \leqq h_1 z} \frac{1}{k_1^{\frac{1}{2}}} + z \sum_{k_1 > h_1 z} \frac{1}{k_1^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\leqq c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} \sum_{h_1 > c z^{-2}} \frac{1}{h_1^{\frac{3}{2}}} \leqq c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} z$$

$$= c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{3}{2}} = o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right).$$

Damit ist (12), also auch (7), bewiesen.

§ 2.

Beweis von (8).

Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

Für ganze $n, p, q > 0$ sei $r_{p,q}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die Form

$$q^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + p^2 u_4^2. \tag{14}$$

Dann gibt es eine positive absolute Konstante a, so daß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{p,q}(n)}{n \log\log n} > \frac{a}{p^2 q^2}.$$

Beweis. Jeder Darstellung von n durch die Form $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ entspricht eine Darstellung von $n p^2 q^2$ durch die Form (14), nämlich

$$n p^2 q^2 = q^2((p u_1)^2 + (p u_2)^2 + (p u_3)^2) + p^2 (q u_4)^2.$$

Also ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{p,q}(n)}{n \log\log n} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{p,q}(n p^2 q^2)}{n p^2 q^2 \log\log(n p^2 q^2)} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{1,1}(n)}{n p^2 q^2 \log\log(n p^2 q^2)}$$

$$= \frac{1}{p^2 q^2} \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{1,1}(n)}{n \log\log n}.$$

Nun ist aber

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{1,1}(n)}{n \log\log n} > 0, \text{ [12]}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Beweis von (8). Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varphi(x)$ monoton abnimmt und

$$\lim_{x=\infty} x\,\varphi(x) \log\log x = \infty$$

ist. Aus dem obigen Hilfssatz folgt, daß wir drei Folgen von ganzen positiven Zahlen

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots,$$
$$q_1 < q_2 < q_3 < \dots,$$
$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots$$

so wählen können, daß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$(15) \qquad r_{p_n, q_n}(t_n) > \frac{a}{p_n^2 q_n^2} t_n \log\log t_n > \frac{t_n}{q_n^2} \varphi\left(\frac{t_n}{2 q_n^2}\right) \log\log\left(\frac{t_n}{q_n^2}\right);$$

$$(16) \qquad t_n > q_n^3 (\geqq n);$$

$$(17) \qquad 0 < \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 < \frac{1}{2^{t_n}}.$$

Aus (16) und (17) folgt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = \alpha$$

existiert und die Ungleichung

$$(18) \qquad 0 < \alpha - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 < \frac{1}{2^{t_n}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{2}{2^{t_n}} < \frac{2}{2^{q_n}}$$

erfüllt. Also ist $\alpha > 0$ *irrational.*

Für die Form

$$Q(u) = Q(u; \varphi) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \alpha u_4^2$$

werden wir die Behauptung (8) nachweisen.

Die Gleichung

$$q_n^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + p_n^2 u_4^2 = t_n,$$

d. h. die Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 u_4^2 = \frac{t_n}{q_n^2}$$

ist nach (15), wenn wir $\frac{t_n}{q_n^2} = x_n$ und für spätere Zwecke

$$\frac{t_n}{q_n^2} - \frac{2 t_n}{2^{t_n}} = y_n, \qquad \frac{t_n}{q_n^2} + \frac{2 t_n}{2^{t_n}} = z_n$$

---

[12]) A. Walfisz, loc. cit. [5]).

setzen, für mehr als

$$x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n \tag{19}$$

Gitterpunkte (u_1, u_2, u_3, u_4) erfüllt. Für alle diese Gitterpunkte ist $u_4^2 \leqq t_n$, also nach (18)

$$0 \leqq \left(\alpha - \frac{p_n^2}{q_n^2}\right) u_4^2 < \frac{2\,t_n}{2^{t_n}}$$

und somit

$$y_n < x_n \leqq Q(u) < z_n.$$

Wegen (19) ist ferner

$$A_Q(z_n) - A_Q(y_n) > x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n.$$

Andererseits ist für wachsendes n

$$J_Q(z_n) - J_Q(y_n) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\alpha}}(z_n^2 - y_n^2) = O\left(x_n \frac{t_n}{2^{t_n}}\right) = O\left(\frac{t_n^2}{q_n^2\, 2^{t_n}}\right) = o(1).$$

Für hinreichend große n hat man daher

$$\mathsf{P}(z_n) - \mathsf{P}(y_n) > \frac{1}{2} x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n.$$

Wegen $\frac{z_n}{x_n} \to 1$, $\frac{y_n}{x_n} \to 1$ ist also für alle großen n mindestens eine von den beiden folgenden Ungleichungen erfüllt: entweder

$$\mathsf{P}_Q(z_n) > \frac{1}{4} x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n > \frac{1}{5} z_n \varphi(z_n) \log\log z_n,$$

oder

$$\mathsf{P}_Q(y_n) < -\frac{1}{4} x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n < -\frac{1}{5} y_n \varphi(y_n) \log\log y_n.$$

Wegen $y_n \to \infty$, $z_n \to \infty$ ist damit (8) bewiesen.

Prag und Warschau, im November 1929.

(Eingegangen am 9. November 1929.)