Vojtěch Jarník

Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen

Math. Zeitschr. 28 (1928), pp. 360-371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500705

Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Das Problem der Umordnung einer unendlichen Reihe wurde von Herrn E. Steinitz gelöst[1]), und zwar ganz allgemein für den Fall, daß die Glieder der Reihe komplexe Zahlen mit n komplexen Einheiten sind. Herr Steinitz betrachtet allerdings nur solche Umordnungen der gegebenen Reihe, wo die umgeordnete Reihe konvergiert. Ich möchte in dieser Note zeigen, daß auch die Frage nach dem Verhalten der *divergenten* Umordnungen einer Reihe $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ mit $\alpha_n \to 0$ eine einfache und vollständige Beantwortung gestattet. Wegen Raumersparnis betrachte ich nur den Fall, daß $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gewöhnliche komplexe Zahlen sind; dem mit den Methoden des Herrn Steinitz vertrauten Leser wird es nicht schwierig sein, die folgenden Resultate auf allgemeine komplexe Zahlen mit n komplexen Einheiten auszudehnen.

Ich betrachte zunächst die komplexe Zahlenebene, in welcher ich die komplexen Zahlen auf die übliche Weise darstelle; zu dieser Ebene rechne ich auch den „Punkt" oder die „Zahl" ∞ hinzu. Es sei eine Folge

$$(1) \qquad x_1, x_2, \dots$$

von endlichen komplexen Zahlen gegeben; eine endliche Zahl x soll Häufungswert der Folge (1) heißen, wenn es eine Teilfolge von (1) gibt, die gegen x konvergiert; die Zahl ∞ soll Häufungswert von (1) heißen,

---

1) E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal f. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 128–175; **144** (1914), S. 1–40; **146** (1916), S. 1–52.

Vgl. auch W. Groß, Bedingt konvergente Reihen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **28** (1917), S. 221—237; W. Threlfall, Bedingt konvergente Reihen, Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 212—214.

wenn (1) nicht beschränkt ist. Die Menge aller Häufungswerte der Folge (1) soll *Grenzmenge der Folge* (1) heißen und mit $m(x_1, x_2, \ldots)$ bezeichnet werden.

Es sei nun eine Reihe[2])

$$a_1 + a_2 + \ldots, \quad a_n \to 0 \tag{2}$$

vorgelegt. Ich setze

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$
$$M(a_1 + a_2 + \ldots) = m(s_1, s_2, \ldots)$$

und nenne die Menge $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ *Grenzmenge der Reihe* (2). Wenn die Reihe (2) konvergiert und die Summe s hat, so besteht ihre Grenzmenge offenbar aus dem einzigen Punkt s und umgekehrt.

Wir wollen in dieser Note folgende Frage lösen: Es sei eine Reihe (2) gegeben; welche Punktmengen μ der komplexen Zahlenebene haben die Eigenschaft, daß es eine aus (2) durch Umordnung entstandene Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ gibt mit $M(b_1 + b_2 + \ldots) = \mu$?

Um die Frage bequem angreifen zu können, bemerken wir zunächst folgendes:

1. Wir bilden die komplexe Zahlenebene, mit Einschluß des Punktes ∞, durch die bekannte stereographische Abbildung auf die Einheitskugel ab. Jedem Punkt der Ebene entspricht auf diese Weise auf der Kugel ein „Bildpunkt", jeder Punktmenge in der Ebene eine „Bildmenge" auf der Kugel.

Wenn a, b zwei komplexe Zahlen und μ eine Punktmenge in der komplexen Zahlenebene bedeuten, so bedeute $r(a, b)$ bzw. $r(a, \mu)$ die Kugeldistanz der Bildpunkte von a und b, bzw. die Kugeldistanz des Bildpunktes von a von der Bildmenge von μ.

2. Wegen der Stetigkeitseigenschaften der genannten Abbildung gilt offenbar folgendes: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$, so daß aus $r(a, b) < \eta$ entweder $|b - a| < \varepsilon$ oder $\min(|a|, |b|) > \frac{1}{\varepsilon}$ folgt. Umgekehrt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$, so daß $r(a, b) < \varepsilon$ gilt, sobald entweder $|b - a| < \eta$ oder $\min(|a|, |b|) > \frac{1}{\eta}$ ist.

3. Eine Punktmenge auf der Kugel heiße ein Kontinuum, wenn sie abgeschlossen und nicht leer ist und wenn sie sich nicht als Summe von zwei punktfremden, abgeschlossenen, nicht leeren Mengen darstellen läßt. Eine Punktmenge in der komplexen Zahlenebene soll ein $\mathfrak{K}$-Kontinuum heißen, wenn ihre Bildmenge ein Kontinuum ist.

---

[2]) Die Glieder einer *Reihe* sollen stets *endliche* komplexe Zahlen sein; dagegen soll als Element einer *Menge* von komplexen Zahlen auch die Zahl ∞ auftreten dürfen. In der ganzen Arbeit handelt es sich um gewöhnliche komplexe Zahlen.

4. Eine nicht leere Punktmenge M in der Ebene ist dann und nur dann ein $\mathfrak{K}$-Kontinuum, wenn folgendes gilt:

a) Die Bildmenge von M ist abgeschlossen.

b) Wenn $\varepsilon > 0$ und wenn a, b zwei beliebige (nicht notwendig voneinander verschiedene) Punkte aus M sind, so gibt es eine endliche Anzahl von Punkten aus M:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \qquad (a_0 = a,\ a_n = b),$$

so daß

$$r(a_{i-1}, a_i) < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dies folgt sofort aus einer grundlegenden Eigenschaft der Kontinua[3]).

5. Wegen 2. kann man diese Bedingungen folgendermaßen umformen: Eine nicht leere Punktmenge M in der komplexen Zahlenebene ist dann und nur dann ein $\mathfrak{K}$-Kontinuum, wenn folgendes gilt:

a) Die Bildmenge von M ist abgeschlossen.

b) Wenn $\varepsilon > 0$ und wenn a, b zwei beliebige Punkte aus M sind, so gibt es eine endliche Anzahl von Punkten aus M:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \qquad (a_0 = a,\ a_n = b),$$

so daß für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$|a_i - a_{i-1}| < \varepsilon, \quad \min(|a_{i-1}|, |a_i|) > \frac{1}{\varepsilon}$$

erfüllt ist.

Nun beweist man leicht den folgenden

Satz 1. *Wenn in einer Reihe*

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

gilt $a_n \to 0$, *so ist* $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ *ein* $\mathfrak{K}$-*Kontinuum.*

Beweis. Es sei $M(a_1 + a_2 + \ldots) = \mu$. Die Bildmenge von μ ist offenbar abgeschlossen und nicht leer. Es sei $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wegen $s_n - s_{n-1} \to 0$ ist auch $r(s_{n-1}, s_n) \to 0$. Weiter ist auch $r(s_n, \mu) \to 0$, denn sonst hätten die s_n einen Häufungswert außerhalb μ. Es sei $\varepsilon > 0$; ich wähle $n_0 > 0$ so groß, daß für ganze $n > n_0$ gilt

$$r(s_{n-1}, s_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad r(s_n, \mu) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es seien α, β zwei Punkte aus μ; man kann zwei ganze Zahlen n', n'' so wählen, daß

$$n'' > n' > n_0, \quad r(s_{n'}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad r(s_{n''}, \beta) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[3]) Vgl. z. B. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Bd. I, S. 83, Satz IV und S. 84, Satz V. (Berlin: Julius Springer 1921.)

Es sei nun n eine ganze Zahl, $n' < n < n''$; dann gibt es (wegen $n > n_0$) einen Punkt α_n in μ mit $r(s_n, \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Die Punkte $\alpha_{n'} = \alpha$, $\alpha_{n'+1}$, $\alpha_{n'+2}, \ldots, \alpha_{n''} = \beta$ gehören zu μ, und es ist für $n' < n \leqq n''$

$$r(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \leqq r(\alpha_{n-1}, s_{n-1}) + r(s_{n-1}, s_n) + r(s_n, \alpha_n) < \varepsilon,$$

woraus wegen 4. die Behauptung folgt.

Der Satz 1 läßt sich aber gewissermaßen auch umkehren; wir werden nämlich im folgenden Paragraphen beweisen: Wenn $a_1 + a_2 + \ldots$ eine Reihe mit $a_n \to 0$ ist und μ ein beliebiges $\mathfrak{K}$-Kontinuum, so kann man die Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$ zu einer Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ so umordnen, daß

$$M(b_1 + b_2 + \ldots) = \mu,$$

abgesehen von einigen trivialen und genau angebbaren Ausnahmefällen.

Bei dem Beweis dieser Behauptung (Satz 2) werde ich von den Ergebnissen des Herrn Steinitz ausgiebig Gebrauch machen und setze daher beim Leser die Kenntnis des ersten Teiles seiner Abhandlung voraus[4]).

§ 2.

Der Hauptsatz.

Zunächst erinnere ich an einige Definitionen und Ergebnisse des Herrn Steinitz. Wenn

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots + a_n \varepsilon_n, \qquad \beta = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \ldots + b_n \varepsilon_n$$

(a_i, b_i reell, ε_i komplexe Einheiten) zwei komplexe Zahlen sind, so werde ihr inneres Produkt[5]) durch die reelle Zahl $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ definiert; wenn also insbesondere α, β gewöhnliche komplexe Zahlen sind und $|\beta| = 1$, also $\beta = e^{i\varphi}$ (φ reell), so ist ihr inneres Produkt gleich $\Re(\alpha e^{-i\varphi})$.

Eine Menge M von endlichen komplexen Zahlen heißt in der Richtung φ beschränkt[6]), wenn die Menge der reellen Zahlen $\Re(\alpha e^{-i\varphi})$, wo α alle Zahlen aus M durchläuft, nach oben beschränkt ist.

Eine Menge M von endlichen komplexen Zahlen soll symmetrisch ausgedehnt[7]) heißen, wenn es kein reelles φ gibt, für welches M in der Richtung φ beschränkt, in der „entgegengesetzten" Richtung $\varphi + \pi$ unbeschränkt wäre.

---

[4]) Es handelt sich um den im Bd. 143 des Journ. f. reine u. angew. Math. enthaltenen Teil seiner Abhandlung, der weiter kurz mit St. zitiert wird.

[5]) St., S. 134.

[6]) St., S. 145. φ soll stets eine reelle Zahl bedeuten; zwei Richtungen φ und $\varphi + 2k\pi$ (k ganz) sollen als nicht untereinander verschieden gelten. In der Ausdrucksweise des Herrn Steinitz sollte man eigentlich von der „Richtung $e^{i\varphi}$" sprechen.

[7]) St., S. 145.

Eine symmetrisch ausgedehnte Menge M ist entweder in allen Richtungen beschränkt oder es gibt genau ein Paar von entgegengesetzten Richtungen, in welchen M beschränkt ist oder es ist M in keiner Richtung beschränkt[8]).

Wenn M eine Menge von endlichen komplexen Zahlen ist, so bedeute $\overline{M}$ die kleinste konvexe Punktmenge, die M enthält[9]).

Wenn (A) eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von endlichen komplexen Zahlen ist, so bedeute A_* die Menge aller „Partialsummen der Folge (A)", d. h. die Menge aller Zahlen

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n}$$

($n \geqq 0$ ganz, $k_i > 0$ ganz, $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$; für $n = 0$ soll die „leere Partialsumme" $a_{k_1} + \ldots + a_{k_n}$ Null bedeuten).

Nun zu unserer Frage!

Es sei eine unendliche Reihe

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + \ldots; \qquad a_n \to 0$$

vorgelegt. Wir bilden die Menge A_* aller Partialsummen der Folge $a_1, a_2, \ldots$.

Es sind folgende zwei Fälle möglich:

I. A_* ist nicht symmetrisch ausgedehnt; d. h. es gibt ein reelles φ, so daß[10]) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re(a_n e^{-i\varphi})$ konvergiert, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \Re(a_n e^{-i\varphi})$ divergiert. Dann besteht offenbar $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ aus dem einzigen Punkt ∞ und dasselbe gilt auch von jeder aus (2) durch Umordnung entstandenen Reihe.

II. A_* ist symmetrisch ausgedehnt. Dann sind drei Unterfälle möglich:

1. A_* ist in jeder Richtung beschränkt; mit anderen Worten: (2) ist absolut konvergent. Dieser Fall ist also trivial.

2. Es gibt genau ein Paar von entgegengesetzten Richtungen, φ und $\varphi + \pi$, in welchen A_* beschränkt ist; mit anderen Worten, es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \Re(a_n e^{-i\varphi})$ absolut konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} |\Im(a_n e^{-i\varphi})|$ divergent; unsere Untersuchung reduziert sich also auf die Untersuchung der Umordnungen der reellen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Im(a_n e^{-i\varphi})$, die ziemlich trivial ist und daher wohl unterdrückt werden darf.

3. A_* ist in keiner Richtung beschränkt. Dies ist der einzige schwierige Fall, der durch folgenden Satz erledigt wird:

Satz 2. *Es sei eine Reihe*

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + \ldots; \qquad a_n \to 0$$

[8]) St., S. 146.

[9]) St., S. 150.

[10]) Wenn a reell, so sei $\operatorname{pos} a = \max(a, 0)$, $\operatorname{neg} a = \min(a, 0)$.

gegeben; die Menge A_* *der Partialsummen der Folge*

$$(3) \qquad (A) \quad a_1, a_2, \ldots$$

sei in keiner Richtung beschränkt.

Es sei μ *ein beliebiges* $\mathfrak{K}$*-Kontinuum; dann gibt es eine Reihe*

$$b_1 + b_2 + \ldots,$$

die aus (2) durch Umordnung entsteht, so daß

$$M(b_1 + b_2 + \ldots) = \mu.$$

Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz. *Die Folge*

$$(3) \qquad a_1, a_2, \ldots$$

erfülle die Voraussetzungen des Satzes 2. Es sei $n_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, α *sei eine endliche komplexe Zahl. Dann gibt es eine Partialsumme*

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_m} \qquad (m > 0 \text{ ganz}, \; n_j > n_0, \; n_i \neq n_j \text{ für } i \neq j)$$

und m *reelle Zahlen* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *mit* $0 \leqq t_j \leqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, $t_m = 1$, *so daß*

$$\left|\sum_{j=1}^{l} a_{n_j} - t_l \alpha\right| < \varepsilon \qquad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

Beweis. Nach H. Steinitz gelten folgende Sätze[11]):

1. Wenn eine Menge M von endlichen komplexen Zahlen in keiner Richtung beschränkt ist, so ist $\overline{M}$ die Menge aller endlichen komplexen Zahlen[12]).

2. Ist (A) eine Folge endlicher komplexer Zahlen, deren absolute Werte die positive Zahl δ nicht überschreiten, so gibt es zu jeder Zahl γ aus $\bar{A}_*$ eine Zahl σ aus A_* mit

$$|\gamma - \sigma| \leqq 2\delta \text{ [13])}.$$

3. Hat man eine endliche Anzahl von endlichen komplexen Zahlen, deren absolute Werte $\leqq \delta$ sind, und hat ihre Summe σ einen absoluten Wert $\leqq q\delta$ ($q \geqq 0$ ganz), so lassen die gegebenen Zahlen eine solche Anordnung $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ zu, daß die absoluten Werte der Summen

$$\sigma_k = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

sämtlich $\leqq (4 + q)\delta$ sind[14]).

[11]) In einer für $n = 2$ spezialisierten und ein wenig modifizierten Form dargestellt.

[12]) St., S. 157, Satz 2.

[13]) St., S. 170, Satz I.

[14]) St., S. 172, Satz II.

Wenn wir nun in der Folge (3) endlich viele Glieder unterdrücken, so genügt die übriggebliebene Folge (B) offenbar wieder den Voraussetzungen des Satzes 2, also ist B_* in keiner Richtung beschränkt[15]. Wir wählen erstens eine ganze positive Zahl r so, daß $\frac{|\alpha|}{r} < \frac{\varepsilon}{5}$; dann wählen wir eine ganze Zahl $\nu > n_0$ so, daß $|a_n| < \frac{\varepsilon}{20}$ für $n \geqq \nu$. Aus der Folge

(4) $$a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots$$

greifen wir (was nach 1 und 2 möglich ist) endlich viele Glieder $b_1, b_2, \ldots, b_{k_1}$ so heraus, daß

(5) $$\left|\sum_{i=1}^{k_1} b_i - \frac{\alpha}{r}\right| < \frac{\varepsilon}{10}.$$ [16]

Dann greifen wir aus den dabei nicht verbrauchten Gliedern von (4) wieder endlich viele Glieder $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots, b_{k_2}$ so heraus, daß

$$\left|\sum_{i=k_1+1}^{k_2} b_i - \left(2\frac{\alpha}{r} - \sum_{i=1}^{k_1} b_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k_2} b_i - 2\frac{\alpha}{r}\right| < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Im allgemeinen, wenn die Zahlen

$$k_1, k_2, \ldots, k_l; \quad b_1, b_2, \ldots, b_{k_l} \qquad (1 \leqq l < r)$$

bereits definiert sind, greifen wir aus den bisher nicht verbrauchten Gliedern von (4) endlich viele Glieder

$$b_{k_l+1}, b_{k_l+2}, \ldots, b_{k_{l+1}}$$

so heraus, daß

$$\left|\sum_{i=1}^{k_{l+1}} b_i - (l+1)\frac{\alpha}{r}\right| < \frac{\varepsilon}{10}.$$

So bekommen wir im ganzen k_r Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_{k_r}$; es ist offenbar für $j = 0, 1, \ldots, r-1$ ($k_0 = 0$ gesetzt)

$$\left|\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} b_i\right| < \frac{|\alpha|}{r} + \frac{\varepsilon}{5} < \frac{2\varepsilon}{5};$$

nach 3. kann man also die b_i $(i = k_j + 1, k_j + 2, \ldots, k_{j+1})$ so anordnen, daß in der neuen Anordnung

$$c_{k_j+1}, c_{k_j+2}, \ldots, c_{k_{j+1}}$$

---

[15]) St., S. 173.

[16]) Wir dürfen und wollen voraussetzen, daß $\sum_{i=1}^{k_1} b_i$ nicht die „leere Partialsumme" ist; denn wir können zu ihr noch ein so kleines Glied von (4) hinzufügen, daß die Ungleichung (5) dadurch nicht gestört wird. Dieselbe Bemerkung bei $\sum_{i=k_1+1}^{k_2} b_i$ usw.

für $k_j + 1 \leqq l \leqq k_{j+1}$ gilt

$$\sum_{i=k_j+1}^{l} c_i \leqq (4+8)\frac{\varepsilon}{20} = \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Die Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{k_r}$ leisten aber schon alles Verlangte; denn es ist erstens

$$\left|\sum_{i=1}^{k_r} c_i - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon;$$

zweitens gibt es zu jedem ganzen l mit $1 \leqq l < k_r$ ein ganzes j mit $0 \leqq j < r$, $k_j < l \leqq k_{j+1}$; dann ist aber

$$\left|\sum_{i=1}^{l} c_i - j\frac{\alpha}{r}\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{k_j} c_i - j\frac{\alpha}{r}\right| + \left|\sum_{i=k_j+1} c_i\right| < \frac{\varepsilon}{10} + \frac{3\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

Beweis des Satzes 2. Wir erledigen zunächst den Fall, daß μ aus dem einzigen Punkt ∞ besteht. Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re(a_n)$ divergent. Es seien $c_1, c_2, \ldots$ diejenigen Glieder von (3), für welche $\Re(c_n) > 0$; die übrigen Glieder von (3) sollen mit $d_1, d_2, \ldots$ bezeichnet werden. Wir wählen eine Folge $k_1, k_2, \ldots$ von wachsenden natürlichen Zahlen derart, daß

$$\sum_{j=1}^{k_n} \Re(c_j) > n + \sum_{j=1}^{n} |\Re(d_j)|;$$

dann hat die Reihe

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{k_1} + d_1 + c_{k_1+1} + \ldots + c_{k_2} + d_2 + \ldots$$

offenbar für ihre Grenzmenge den Punkt ∞, da die Reihe der Realteile gegen $+\infty$ divergiert.

In den noch übrigbleibenden Fällen sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. μ besteht aus einem einzigen endlichen Punkt.

2. μ besteht aus mehr als einem Punkt; dann ist die Bildmenge von μ perfekt.

In jedem von diesen beiden Fällen wählen wir eine Folge von komplexen Zahlen

(6) $$y_1, y_2, \ldots$$

folgendermaßen:

Ad 1. Wenn μ aus einem einzigen endlichen Punkt x besteht, so sei $y_1 = y_2 = \ldots = x$; es ist also $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$.

Ad 2. Wenn μ aus mehr als einem Punkt besteht, so wähle ich zunächst eine abzählbare Teilmenge μ_1 von μ so, daß die Bildmenge von μ_1

in der Bildmenge von μ dicht ist. Die Punkte von μ_1 sollen mit $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnet werden. Weil die Bildmenge von μ in sich dicht ist, so gilt folgendes: Wenn wir aus μ_1 endlich viele Punkte unterdrücken, so liegen die Bildpunkte der übrigbleibenden Punkte von μ_1 auch dicht in der Bildmenge von μ. Wir dürfen und wollen daher voraussetzen, daß alle x_n endliche Zahlen sind.

Zu jedem ganzen $n > 0$ wählen wir nun eine endliche Anzahl von endlichen Punkten aus μ

$$x_n = z_n^0,\ z_n^1,\ z_n^2,\ \ldots,\ z_n^{l_n},\ z_n^{l_n+1} = x_{n+1} \qquad (l_n \geqq 0)$$

so, daß für jedes ganze i mit $1 \leqq i \leqq l_n + 1$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$|z_n^i - z_n^{i-1}| < \frac{1}{n}, \qquad \min(|z_n^{i-1}|, |z_n^i|) > n$$

erfüllt ist.

Wenn $\min(|z_n^{i-1}|, |z_n^i|) > n$, so wählen wir eine endliche Zahl y_n^i so, daß die beiden geradlinigen Strecken $\overline{z_n^{i-1} y_n^i}$, $\overline{y_n^i z_n^i}$ ganz außerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen; sonst wählen wir $y_n^i = z_n^i$. So bekommen wir eine Folge von endlichen Zahlen

$$\begin{aligned}(7)\qquad & z_1^0,\ y_1^1,\ z_1^1,\ y_1^2,\ \ldots,\ y_1^{l_1},\ z_1^{l_1},\ y_1^{l_1+1},\ z_2^0,\ y_2^1,\ z_2^1, \\ & y_2^{l_2},\ z_2^{l_2},\ y_2^{l_2+1},\ z_3^0,\ y_3^1,\ \ldots .\end{aligned}$$

Die Folge (7) hat offenbar folgende Eigenschaften. Erstens ist jeder Punkt von μ Häufungswert von (7). Umgekehrt ist aber jede Zahl aus (7) in der Menge μ enthalten, ausgenommen höchstens einige oder alle diejenigen y_n^i, für welche $|y_n^i| > n$ ist. Ein solches y_n^i kommt aber nur dann vor, wenn auch das zugehörige z_n^i absolut genommen größer als n ist. Wenn also μ beschränkt ist, d. h. wenn die Zahl ∞ nicht zu μ gehört, so sind alle Glieder von (7) in μ enthalten, ausgenommen höchstens endlich viele Glieder; nur wenn μ nicht beschränkt ist, d. h. wenn μ die Zahl ∞ enthält, kann es in (7) eine unendliche Teilfolge von Gliedern geben, die nicht zu μ gehören; diese Teilfolge konvergiert dann aber notwendig gegen ∞. Es ist also — weil die Bildmenge von μ abgeschlossen ist — in jedem Fall die Grenzmenge der Folge (7) gleich μ.

Wir bezeichnen die Glieder von (7) der Reihe nach mit

$$(6)\qquad y_1, y_2, y_3, \ldots;$$

damit haben wir in den beiden auf S. 367 angegebenen Fällen eine Folge (6) von endlichen Zahlen konstruiert, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$.

2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 > 0$ so, daß für jedes ganze $n > n_0$ tweder $|y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$ ist *oder* die Strecke $\overline{y_{n-1} y_n}$ ganz außerhalb des reises $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ liegt.

Wir ordnen nun die Reihe

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{2}$$

›lgendermaßen um:

Zunächst nehmen wir a_1 und dann eine gewisse Anzahl von Gliedern ›us der Folge $a_2, a_3, \ldots$, die wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_{k_1}$ bezeichnen, mit olgenden Eigenschaften:

1. $\left|\sum_{i=1}^{k_1} b_i - (y_1 - a_1)\right| < 1$.

2. Zu jedem j $(j = 1, 2, \ldots, k_1 - 1)$ gibt es eine Zahl t_j mit $0 \leqq t_j \leqq 1$ so, daß

$$\left|\sum_{i=1}^{j} b_i - t_j (y_1 - a_1)\right| < 1.$$

(Nach dem Hilfssatz mit $\varepsilon = 1$, $\alpha = y_1 - a_1$.) Dann nehmen wir aus der Folge

$$a_1, a_2, \ldots \tag{3}$$

das erste nichtverbrauchte Glied a_{r_2} und dann eine gewisse Anzahl von bisher nichtverbrauchten Gliedern aus (3), die wir mit $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots, b_{k_2}$ bezeichnen, mit nachstehenden Eigenschaften (wir setzen $r_1 = 1$):

1. $\left|a_{r_1} + a_{r_2} + \sum_{i=1}^{k_2} b_i - y_2\right| < \frac{1}{2}$.

2. Zu jedem j $(j = k_1 + 1, \ldots, k_2 - 1)$ gibt es eine Zahl t_j mit $0 \leqq t_j \leqq 1$, so daß

$$\left|\sum_{i=k_1+1}^{j} b_i - t_j\left(y_2 - a_{r_1} - a_{r_2} - \sum_{i=1}^{k_1} b_i\right)\right| < \frac{1}{2}.$$

(Nach dem Hilfssatz mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\alpha = y_2 - a_{r_1} - a_{r_2} - \sum_{i=1}^{k_1} b_i$.)

Im allgemeinen, wenn die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k_{n-1}}$ bereits gewählt sind, sei a_{r_n} das erste unter den Gliedern

$$b_1, b_2, \ldots, b_{k_{n-1}}, \quad a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_{n-1}} \tag{8}$$

nicht auftretende Glied der Folge (3), und $b_{k_{n-1}+1}, b_{k_{n-1}+2}, \ldots, b_{k_n}$ seien endlich viele Glieder von (3), unter welchen kein Glied von (8) und ebenso die Zahl a_{r_n} nicht auftritt, und welche folgende Eigenschaften haben:

1. $\left|a_{r_1}+a_{r_2}+\ldots+a_{r_n}-y_n+\sum_{i=1}^{k_n} b_i\right|<\frac{1}{n}.$

2. Zu jedem ganzen j $(k_{n-1}+1 \leqq j \leqq k_n-1)$ gibt es eine Zahl t_j $(0 \leqq t_j \leqq 1)$ so, daß

$$\left|\sum_{i=k_{n-1}+1}^{j} b_i - t_j\left(y_n - a_{r_1} - \ldots - a_{r_n} - \sum_{i=1}^{k_{n-1}} b_i\right)\right| < \frac{1}{n}.$$

(Nach dem Hilfssatz mit $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $\alpha=y_n-a_{r_1}-\ldots-a_{r_n}-\sum_{i=1}^{k_{n-1}} b_i$.)

Wir untersuchen nun die aus (2) durch Umordnung entstehende Reihe

(9) $\quad a_{r_1}+b_1+b_2+\ldots+b_{k_1}+a_{r_2}+b_{k_1+1}+b_{k_1+2}+\ldots+b_{k_2}+a_{r_3}+\ldots.$

Es sei s_m die Summe der ersten m Glieder der Reihe (9). Für ganzes $n>0$ ist[17])

$$s_{k_n+n}=y_n+\frac{\theta}{n};$$

also *enthält die Grenzmenge der Reihe* (9) sicher alle Häufungswerte von (6), also auch *die Menge* μ.

Es sei andererseits m eine natürliche Zahl, $m>k_1+1$; n sei so gewählt, daß

$$k_n+n<m \leqq k_{n+1}+n+1;$$

dann ist also

$$
\begin{aligned}
s_m &= s_{k_n+n}+a_{r_{n+1}}+\sum_{j=k_n+1}^{u} b_j{}^{18)} \qquad\qquad (k_n \leqq u \leqq k_{n+1})\\
&= s_{k_n+n}+a_{r_{n+1}}+\tau_m\left(y_{n+1}-\sum_{i=1}^{n+1} a_{r_i}-\sum_{i=1}^{k_n} b_i\right)+\frac{\theta}{n} \quad (0 \leqq \tau_m \leqq 1)\\
&= y_n+\frac{\theta}{n}+a_{r_{n+1}}+\tau_m\left(y_{n+1}-y_n-a_{r_{n+1}}-\frac{\theta}{n}\right)+\frac{\theta}{n};
\end{aligned}
$$

(10) $$s_m=(1-\tau_m)\,y_n+\tau_m\,y_{n+1}+o(1)$$

(das Zeichen o bezieht sich auf wachsendes m).

Bei $m \to \infty$ ist auch $n \to \infty$; zu jedem $\varepsilon>0$ gehört daher ein $m_0>0$, so daß für $m>m_0$ entweder $|y_n-y_{n+1}|<\varepsilon$ ist oder die ganze Strecke $\overline{y_n y_{n+1}}$ außerhalb des Kreises $|z|=\frac{1}{\varepsilon}$ liegt. D. h. für jedes $m>m_0$ ist

$$\text{entweder} \quad s_m=y_n+\theta\varepsilon+o(1) \qquad \text{oder} \quad |s_m|>\frac{1}{\varepsilon}+o(1).$$

---

17) Mit θ bezeichnen wir unterschiedslos komplexe Zahlen, deren absolute Werte kleiner als 1 sind.

18) $\sum_{i=m+1}^{m} x_i$ soll Null bedeuten.

Die Grenzmenge der Folge $s_1, s_2, \ldots$ kann also keinen Punkt enthalten, der nicht in $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$ enthalten wäre, ausgenommen höchstens den Punkt ∞. Wenn aber $m(s_1, s_2, \ldots)$ den Punkt ∞ enthält, so ist nach (10) die Folge $y_1, y_2, \ldots$ nicht beschränkt, also gehört der Punkt ∞ zu $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$. Es ist also

$$m(s_1, s_2, \ldots) = \mu,$$

w. z. b. w.

Bemerkungen. 1. Der Satz 2 enthält den Satz des Herrn Steinitz für gewöhnliche komplexe Zahlen; denn eine aus einem einzigen endlichen Punkte bestehende Menge ist ein $\mathfrak{K}$-Kontinuum; man kann daher die Reihe (2) unter den Voraussetzungen des Satzes 2 zu jeder endlichen Summe umordnen. Die übrigen, am Anfang des § 2 aufgezählten Fälle I, II 1, II 2 sind aber trivial.

2. Bei der Wahl der Zahlen $k_1, k_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ im Beweise des Satzes 2 besteht noch eine gewisse Willkür, die man aber leicht durch Angabe einer geeigneten Vorschrift, nach welcher die Wahl geschehen soll, beseitigen kann; vgl. z. B. St., S. 173—175. Auch eine bei der Wahl der Folge (6) auftretende Willkür kann man leicht beseitigen.

(Eingegangen am 8. Juni 1927.)