Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln

Math. Zeitschr. 30 (1929), pp. 768--786

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500703

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Es sei dauernd $k \geqq 5$, $x > 0$; k, x ganz. $F_k(x)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte in der abgeschlossenen k-dimensionalen Kugel

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 \leqq x;$$

weiter sei

$$\mathsf{P}_k(x) = F_k(x) - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}.$$

Dann ist bekanntlich [1])

$$\mathsf{P}_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),$$

aber für kein von x unabhängiges a [2])

$$\mathsf{P}_k(x) = a x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Mit anderen Worten: Wird

$$\varrho_k(x) = \frac{\mathsf{P}_k(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}}$$

[1]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 300—307; E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 126—132; H. Petersson, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Abhandl. a. d. math. Seminar Hamburg **5** (1926), S. 116—150; A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Math. Zeitschr. **27** (1927), S. 469—480.

[2]) E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden II, Math. Zeitschrift **24** (1924) S. 298—310, § 4. Folgt auch sofort aus den Resultaten von H. Petersson, loc. cit. [1]) und V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 154—160.

gesetzt, so ist die Folge

$$(1) \qquad \varrho_k(1),\ \varrho_k(2),\ \ldots,\ \varrho_k(n),\ \ldots$$

beschränkt, aber nicht konvergent.

Es drängen sich nun naturgemäß folgende Fragen auf:

1. Wie sieht die Ableitung[3]) der Folge (1) aus?

2. Wie sind die konvergenten Teilfolgen von (1) beschaffen?

Der Behandlung dieser beiden Fragen sind die folgenden Zeilen gewidmet.

Wir wollen von nun an stets k gerade und $k \geqq 8$ voraussetzen. Die Ableitung der Folge (1) bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_k$. Allgemeiner, wenn

$$(\mathfrak{D}) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist, so werde die Ableitung der Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3), \ldots$$

mit $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$ bezeichnet.

Mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen wir positive absolute Konstanten, mit $c_1(k), c_2(k), \ldots$ positive Zahlen, die nur von k abhängen usw.

Wir wollen beweisen:

Satz 1. *Die Menge $\mathfrak{M}_k$ ist perfekt.*

Die Beweismethode des Satzes 1 gibt uns aber auch noch ein anderes Ergebnis von einem mehr quantitativen Charakter; nämlich: die Menge $\mathfrak{M}_k$ ist nicht „allzu dünn"; genauer: zwei nicht sehr kleine, zu $\mathfrak{M}_k$ komplementäre Intervalle können nicht allzu nahe aneinander liegen; ganz genau:

Satz 2[4]). *Es gibt ein $c_1(k) > 0$, so daß für je zwei zu $\mathfrak{M}_k$ komplementäre Intervalle $(\gamma_1, \delta_1), (\gamma_2, \delta_2)$ mit $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2$ die Ungleichung gilt*

$$\gamma_2 - \delta_1 \geqq \operatorname{Min}\left(c_1(k),\ \frac{\delta_1 - \gamma_1}{400},\ \frac{\delta_2 - \gamma_2}{400}\right).$$

Weil es nicht mehr Mühe macht, beweise ich diese Sätze in einer etwas allgemeineren Form:

Satz 3. *Wenn $(\mathfrak{D})$ eine wachsende arithmetische Progression von natürlichen Zahlen ist[5]), so ist $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$ perfekt.*

---

[3]) Eine Zahl ξ heißt Häufungswert einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, wenn es eine Teilfolge dieser Folge gibt, die gegen ξ konvergiert. Die (offenbar abgeschlossene) Menge aller Häufungswerte der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißt die Ableitung dieser Folge.

[4]) Es wird auch $\gamma_1 = -\infty$ und $\delta_2 = +\infty$ zugelassen.

[5]) D. h. $x_1 > 0$ und ganz, $x_n - x_{n-1} > 0$, ganz und von n unabhängig.

Satz 4. *Wenn* $(\mathfrak{D})$ *eine wachsende arithmetische Progression von natürlichen Zahlen ist, so gibt es ein* $c_2(k, \mathfrak{D}) > 0$ [6]) *mit folgender Eigenschaft: Für je zwei zu* $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$ *komplementäre Intervalle* (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2) *mit* $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2$ *ist*

$$\gamma_2 - \delta_1 \geqq \operatorname{Min}\left(c_2(k, \mathfrak{D}),\ \frac{\delta_1 - \gamma_1}{400},\ \frac{\delta_2 - \gamma_2}{400}\right).$$

Die Sätze 1, 2 schließen noch nicht die Möglichkeit aus, daß $\mathfrak{M}_k$ vielleicht ein abgeschlossenes Intervall wäre; dies ist aber mindestens für große k nicht der Fall; denn es gilt

Satz 5. *Zu jedem* $m > 0$ *gibt es ein* $c_3(m) > 0$, *so daß für jedes (ganze, gerade)* $k > c_3(m)$ *die Menge* $\mathfrak{M}_k$ *mindestens* [7]) m *komplementäre Intervalle besitzt.*

Nun zu der zweiten Frage nach der Beschaffenheit der konvergenten Teilfolgen von (1)! Aus Satz 3 folgt: Es sei eine wachsende Folge

$$x_1, x_2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen gegeben; dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2), \ldots$$

sicher divergent, wenn die Differenz $x_n - x_{n-1}$ einer von n unabhängigen Zahl gleich ist. Wir werden beweisen, daß dieselbe Erscheinung allgemeiner auch dann auftritt, wenn $x_n - x_{n-1}$ *unter* einer von n unabhängigen Schranke liegt; d. h. wir beweisen den [8])

Satz 6. *Es sei*

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$$
$$x_n \text{ ganz}, \quad x_{n+1} - x_n = O(1) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3), \ldots$$

divergent.

Und noch etwas allgemeiner:

Satz 7. *Es sei*

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$$
$$x_n \text{ ganz}, \quad x_n = O(n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3), \ldots$$

divergent.

Und diese Sätze sind in einem gewissen Sinn scharf; denn wir werden noch die beiden folgenden Sätze beweisen:

---

[6]) D. h. eine positive Zahl, die nur von k und $(\mathfrak{D})$ abhängt.

[7]) Vielleicht auch unendlich viele.

[8]) In den Sätzen 6, 7, 8, 9 bezieht sich das Zeichen O auf ganzzahlig wachsendes n.

Satz 8. *Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}_k$ und $f(n)$ eine monotone Funktion der natürlichen Zahl n, für welche gilt*

$$f(n) \to +\infty \quad \textit{für} \quad n \to +\infty.$$

Dann gibt es eine Folge von ganzen Zahlen

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

so daß

$$0 < y_1 < y_2 < \ldots, \qquad y_n - y_{n-1} = O(f(n))$$

und

$$\lim_{n=\infty} \varrho_k(y_n) = \xi.$$

Satz 9. *Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}_k$ und $f(n)$ eine monotone Funktion der natürlichen Zahl n, für welche gilt*

$$f(n) \to +\infty \quad \textit{für} \quad n \to +\infty.$$

Dann gibt es eine Folge von ganzen Zahlen

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

so daß

$$0 < y_1 < y_2 < \ldots, \qquad y_n = O(n\,f(n))$$

und

$$\lim_{n=\infty} \varrho_k(y_n) = \xi.$$

Satz 9 folgt freilich aus Satz 8. Unsere Aufgabe besteht also darin, die Sätze 3, 4, 5, 7, 8 zu beweisen. Dabei ergeben sich die Sätze 5 und 8 durch geläufige Limesbetrachtungen.

§ 2.

Eine formale Umformung des Problems.

Nach Herrn Landau[9]) ist

$$F_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} + \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{(S_{p,q})^k}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

$\sum'$ bedeutet, daß nur über die zu q teilerfremden p zu summieren ist. $S_{p,q}$ ist die Gaußsche Summe

$$S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} m^2}.$$

[9]) In einer allgemeineren Form loc. cit. [1]), Formel (4); Formeln dieser Art gehen auf Herrn G. H. Hardy, On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five, Trans. Am. Math. Soc. 21 (1920), S. 255—284 zurück.

Nach bekannten Formeln[10] ist

$$S_{p,q} = 0 \quad \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4,$$
$$S_{p,q} = e^{\pi i \frac{q-1}{4}} \left(\frac{-2p}{q}\right) \sqrt{q} \quad \text{für} \quad q \equiv 1 \pmod 2,$$
$$S_{p,q} = \sqrt{2}\, e^{\pi i \frac{p}{4}} \left(\frac{2q}{p}\right) \sqrt{q} \quad \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4;$$

also ist

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{(S_{p,q})^k}{q^k} = \dfrac{\eta_{p,q}^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}}, \text{ wo} \\ \eta_{p,q} = 0 \text{ für } q \equiv 2 \pmod 4, \quad \eta_{p,q} = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \text{ für } q \equiv 1 \pmod 2, \\ \eta_{p,q} = 2 e^{\pi \frac{p}{2}} \text{ für } q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Es ist also immer

$$(3) \qquad |S_{p,q}| \leqq \sqrt{2q}.$$

Wir setzen für ganzes $q \geqq 2$

$$(4) \qquad A_q(k, x) = A_q(x) = \frac{1}{x^{\frac{k}{2}-1}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}^k}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}},$$

$$(5) \qquad B_q(k) = B_q = \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}^k}{q^k} \cdot \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r e^{-2\pi i r \frac{p}{q}},$$

$$(6) \qquad B_q'(k, x) = B_q'(x) = \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}^k}{q^k} \sum_{r=0}^{x} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}}.$$

Offenbar ist $B_q'(x_1) = B_q'(x_2)$, wenn $x_1 \equiv x_2 \pmod q$.

Es gilt nun[11] folgendes:

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} = \frac{2}{k} x^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

$$\left| \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq x^{\frac{k}{2}-1} \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right)$$
$$(\text{für } 0 < p < q,\ (p, q) = 1).$$

---

[10]) Vgl. z. B. P. Bachmann, Zahlentheorie 2, S. 145—187 (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1921 — anastatischer Nachdruck der 1. Aufl.). Auch bei Petersson, loc. cit. [1]), S. 138, findet man diese Formeln zusammengestellt.

[11]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 2. Mitteilung, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 311—316, Hilfssatz 1 und 3.

Also ist

$$|A_q(x)| \leqq \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{q^{\frac{k}{2}-1}}(\log q + 1);$$

die Reihe $\sum\limits_{q=2}^{\infty} A_q(x)$ ist also auf der Menge der natürlichen Zahlen x gleichmäßig konvergent; daher ist

$$(7) \qquad \varrho_k(x) = \frac{F_k(x) - \dfrac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}}{x^{\frac{k}{2}-1}} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\frac{1}{2} + \sum_{q=2}^{\infty} A_q(x) + o(1)\right).$$

Wegen der trivialen Abschätzung

$$|B_q| \leqq \frac{2^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}-2}}, \qquad |B'_q(x)| \leqq \frac{2^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}-2}}$$

sind auch die Reihen $\sum\limits_{q=2}^{\infty} |B_q|$, $\sum\limits_{q=2}^{\infty} |B'_q(x)|$ auf der Menge der natürlichen Zahlen x gleichmäßig konvergent; weiter ist für jedes feste $q \geqq 2$ [12])

$$A_q(x) = B_q + B'_q(x) + o(1),$$

wo sich das Zeichen o auf ganzzahlig wachsendes x bezieht. Daher ist nach (7)

$$(8) \qquad \varrho_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\sum_{q=2}^{\infty} B'_q(x) + \frac{1}{2} + \sum_{q=2}^{\infty} B_q + o(1)\right).$$

Es ist nach (2) und (6) für $q \geqq 2$:

$$(9) \qquad \begin{cases} B'_q(x) = 0 \quad \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4, \\ B'_q(x) = \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}\frac{q-1}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}} \displaystyle\sum_{r=0}^{x} \sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} \quad \text{für} \quad q \equiv 1 \pmod 2, \\ B'_q(x) = \dfrac{2^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}} \displaystyle\sum_{r=0}^{x} \sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i \left(r - \frac{kq}{8}\right)\frac{p}{q}} \quad \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

---

[12]) V. Jarník, loc. cit. [11]), Hilfssatz 2. Man beachte, daß

$$\sum_{r=0}^{x} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}},$$

wenn $x \equiv R \pmod q$, $0 \leqq R < q$.

Dabei ist die Summe nach p bei jedem r eine ganze rationale Zahl $\Big($nämlich die Summe der r-ten bzw. $\left(r-\frac{kq}{8}\right)$-ten Potenzen allen primitiven q-ten Einheitswurzeln$\Big)$; wir haben also den

Hilfssatz 1. *Es sei für ganzes* $q>1$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \textit{für} \quad q \equiv \begin{Bmatrix} 2 \pmod 4 \\ 1 \pmod 2 \\ 0 \pmod 4 \end{Bmatrix}.\text{[13]}$$

Dann ist $B'_q(x)$ *ein Multiplum von* $\left(\frac{\varepsilon_q}{q}\right)^{\frac{k}{2}}$.

Insbesondere ist also $B'_q(x)$ reell. Aus (8) sehen wir nun (da B_q von x unabhängig ist): Statt der Folge

(1) $$\varrho_k(1),\ \varrho_k(2),\ \ldots$$

können wir die Folge

(10) $$\sigma_k(1),\ \sigma_k(2),\ \ldots$$

untersuchen, wo

(11) $$\sigma_k(x) = \sum_{q=2}^{\infty} B'_q(x).$$

Genauer gesagt: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}_k$ die Ableitung der Folge (10); allgemeiner: Es sei

($\mathfrak{D}$) $$x_1,\ x_2,\ \ldots$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen; dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ die Ableitung der Folge

$$\sigma_k(x_1),\ \sigma_k(x_2),\ \ldots .$$

Wir haben dann fünf Sätze 3a, 4a, 5a, 7a, 8a zu beweisen, die bzw. aus den Sätzen 3, 4, 5, 7, 8 entstehen, indem wir dort $\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$, $\varrho_k(x)$ durch $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, $\sigma_k(x)$ ersetzen[14]. Ich brauche diese Sätze wohl nicht explizite aufzuschreiben.

§ 3.

Hilfssätze.

Wir benutzen folgende geläufige Bezeichnungen:

Wenn n eine natürliche Zahl ist, so sei $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Restklassen modulo n; $\mu(n)$ sei gleich Null, wenn n nicht

[13]) Diese Bedeutung von ε_q wollen wir im folgenden stets festhalten.

[14]) Die Konstante $c_2(k, \mathfrak{D})$ wird dadurch freilich auch abgeändert; dagegen bleibt die Konstante $c_3(m)$ offenbar dieselbe.

quadratfrei ist; sonst sei $\mu(n) = (-1)^t$, wo t die Anzahl der in n aufgehenden Primzahlen ist.

Es sei T_n die Summe der n-ten primitiven Einheitswurzeln; es ist bekanntlich $T_1 = 1$; $T_n = -1$, wenn n eine Primzahl; $T_n = 0$, wenn $n = p^a$, p eine Primzahl, $a > 1$ ganz; $T_{nn'} = T_n T_{n'}$, wenn $(n, n') = 1$. Also ist stets $T_n = \mu(n)$.

Hilfssatz 2. *Es sei r ganz, $q > 0$ ganz, $(r, q) = d$. Dann ist*

$$\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right);$$

$\sum'$ bedeutet, daß nur über die zu q teilerfremden p zu summieren ist.

Beweis.
$$\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r' \frac{p}{q'}},$$

wo $r' = \frac{r}{d}$, $q' = \frac{q}{d}$; also $(q', r') = 1$. Wir haben nur zu zeigen, daß unter den Zahlen $-r'p$ nur die zu q' teilerfremden Restklassen modulo q' vorkommen, und zwar jede genau $\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}$-mal; denn dann ist

$$\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r' \frac{p}{q'}} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} T_{q'} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right),$$

was zu beweisen ist.

Nun hat die Kongruenz

$$-r'x \equiv a \pmod{q'},$$

wenn $(a, q') = 1$, genau eine Lösung $x = p_1$ modulo q', die von selbst zu q' teilerfremd ist. Diese gibt modulo $q = dq'$ zu d Lösungen Anlaß,

$$(12) \qquad p_1,\ p_1 + q',\ p_1 + 2q',\ \ldots,\ p_1 + (d-1)q';$$

alle diese Zahlen sind zu q' teilerfremd; es bleibt nur noch zu zeigen, daß genau $\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}$ unter ihnen auch zu d teilerfremd sind. Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ die in q aufgehenden Primzahlen; $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ diejenigen unter ihnen, die nicht in q' aufgehen. Es sind unter den Zahlen (12) diejenigen aufzufinden, die teilerfremd zu $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t$ sind. Die Zahlen (12) durchlaufen aber offenbar $\frac{d}{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t}$ vollständige Restsysteme modulo $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t$; daher ist die Anzahl derjenigen unter ihnen, die zu $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t$ teilerfremd sind, gleich $\varphi(\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t) \frac{d}{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t}$. Es ist aber

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')} = \frac{q\left(1-\frac{1}{\pi_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\pi_s}\right)}{q'\left(1-\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\pi_s}\right)} = d\left(1-\frac{1}{\pi_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\pi_t}\right)$$
$$= \varphi(\pi_1 \ldots \pi_t) \frac{d}{\pi_1 \ldots \pi_t}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn q, x, y natürliche Zahlen sind, $q > 1$, $x > y$, so ist nach (9)

$$(13) \qquad B_q'(x) - B_q'(y) = \pm \frac{\varepsilon_q^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}} \sum_{r=a}^{b} {\sum_{p=0}^{q-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}},$$

wo $a = y+1$, $b = x$ für $q \not\equiv 0 \pmod 4$, $a = y + 1 - \frac{kq}{8}$, $b = x - \frac{kq}{8}$ für $q \equiv 0 \pmod 4$.

Hilfssatz 3. *Es seien q_1, l, x, y natürliche Zahlen*, $1 < l < q_1$, *q_1 eine ungerade Primzahl*, $q = l q_1$. *Dann ist*

$$|B_q'(x) - B_q'(y)| \leqq \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}(\log l + 1)}{q_1^{\frac{k}{2}-1} l^{\frac{k}{2}-1}} + 2 \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}}{q_1^{\frac{k}{2}} l^{\frac{k}{2}-2}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x > y$. Wir benutzen die Formel (13); dabei ist hier offenbar $\varepsilon_q = \varepsilon_{l q_1} = \varepsilon_l$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \leqq b < a + q$ (denn $\sum_{r=c}^{c+q-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = 0$).

Wir setzen $d = (r, q)$, $d' = (r, l)$; nach Hilfssatz 2 ist[15])

$$(14) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=a}^{b} {\sum_{p=0}^{q-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) = \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) \\ \displaystyle - \sum_{\substack{r=a \\ q_1 | r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) + \sum_{\substack{r=a \\ q_1 | r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(\frac{q_1 l}{d}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d}\right) = A_{\mathrm{I}} - A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}}. \end{cases}$$

Dabei ist nach Hilfssatz 2 (wegen $(l, q_1) = 1$)

$$A_{\mathrm{I}} = \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) = - \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{l}{d'}\right) = - \sum_{r=a}^{b} {\sum_{p'=0}^{l-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p'}{l}},$$

[15]) $q_1 | r$ bedeutet: q_1 teilt r.

wobei über die zu l teilerfremden p' zu summieren ist. Wegen

$$\sum_{r=c}^{c+l-1} e^{-2\pi i r \frac{p'}{l}} = 0$$

ist also

(15) $$|A_{\mathrm{I}}| \leqq l^2.$$

Weiter ist

$$A_{\mathrm{II}} = \sum_{\substack{r=a \\ q_1 | r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) = -\sum_{\substack{r=a \\ q_1 | r}}^{b} \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{l}{d'}\right);$$

die Anzahl der Glieder ist höchstens l, also ist

(16) $$|A_{\mathrm{II}}| \leqq l^2.$$

Endlich sollen wir

$$A_{\mathrm{III}} = \sum_{\substack{r=a \\ q_1 | r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(\frac{q_1 l}{d}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d}\right)$$

abschätzen. Es ist

$$A_{\mathrm{III}} = \varphi(q_1) \sum_{\frac{a}{q_1} \leqq s \leqq \frac{b}{q_1}} \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d''}\right)} \mu\left(\frac{l}{d''}\right),$$

wo $d'' = (l, s)$. Also nach Hilfssatz 2

$$A_{\mathrm{III}} = \varphi(q_1) \sum_{p'=0}^{l-1}{}' \sum_{\frac{a}{q_1} \leqq s \leqq \frac{b}{q_1}} e^{-2\pi i s \frac{p'}{l}},$$

wo über die zu l teilerfremden p' zu summieren ist. Es ist aber

$$\left| \sum_{\frac{a}{q_1} \leqq s \leqq \frac{b}{q_1}} e^{-2\pi i s \frac{p'}{l}} \right| \leqq \frac{1}{2} \operatorname{Max}\left(\frac{l}{p'}, \frac{l}{l-p'}\right),$$

also

(17) $$|A_{\mathrm{III}}| \leqq q_1 l (\log l + 1).$$

Aus (13), (14), (15), (16), (17) folgt aber die Behauptung.

Hilfssatz 4. *Wenn x, y, q natürliche Zahlen sind, $q > 1$, so ist*

$$|B_q'(x) - B_q'(y)| \leqq \frac{c_4(k) \log q}{q^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x > y$; aus (13) folgt dann unmittelbar die Behauptung, da

$$\left| \sum_{r=a}^{b} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} \right| \leqq \frac{1}{2} \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right).$$

Hilfssatz 5. *Zu jeder (ganzen, geraden) Zahl $k \geqq 8$ gibt es ein $c_5(k) > 0$, so daß für jede Primzahl $q_1 > c_5(k)$ und jedes Paar x, y von natürlichen Zahlen die Ungleichung gilt*

$$\sum_{q=q_1^2}^{\infty} |B_q'(x) - B_q'(y)| + \sum_{l=2}^{q_1-1} |B_{lq_1}'(x) - B_{lq_1}'(y)| < 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3 und 4 ist

$$\sum_{l=2}^{q_1-1} |B_{lq_1}'(x) - B_{lq_1}'(y)| + \sum_{q=q_1^2}^{\infty} |B_q'(x) - B_q'(y)|$$

$$\leqq \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} \sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}(\log l + 1)}{l^{\frac{k}{2}-1}} + \frac{2}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}}{l^{\frac{k}{2}-2}} + c_4(k) \sum_{q=q_1^2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Dabei ist, wie man leicht nachrechnet,

$$\sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}(\log l + 1)}{l^{\frac{k}{2}-1}} < \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_l^4(\log l + 1)}{l^3} < 0{,}93$$

und für $q_1 > c_5(k)$ ist

$$\frac{2}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}}{l^{\frac{k}{2}-2}} < \frac{2}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2^4}{l^2} < \frac{0{,}01}{q_1^{\frac{k}{2}-1}},$$

$$c_4(k) \sum_{q=q_1^2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}} < c_4(k) \sum_{q=q_1^2}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}} < c_6(k) \frac{1}{q_1^{k-\frac{9}{2}}} < \frac{0{,}01}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}$$

$\left(\text{denn } k - \frac{9}{2} > \frac{k}{2} - 1\right)$. Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 6. *Es sei q_1 eine ungerade Primzahl; dann ist*

$$B_{q_1}'(x) = (-1)^{\frac{q_1-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{q_1 - s - 1}{q_1^{\frac{k}{2}}},$$

wenn $x \equiv s \pmod{q_1}$, $0 \leqq s \leqq q_1 - 1$.

Beweis. Nach (9) ist

$$B_{q_1}'(x) = (-1)^{\frac{q_1-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{r=0}^{x} \sum_{p=0}^{q_1-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}}$$

und

$$\sum_{p=0}^{q_1-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}} = \left\{\begin{array}{lll} q_1 - 1 & \text{für} & q_1 \mid r \\ -1 & \text{für} & q_1 \nmid r \end{array}\right\}.$$

§ 4.

Beweis der Sätze 3a und 4a.

Wir denken uns jetzt ein gerades $k \geqq 8$ gewählt; x_1, D seien zwei natürliche Zahlen, $x_n = x_1 + (n-1)D$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $(\mathfrak{D})$ sei die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Es sei ξ ein fest gewählter Punkt von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, ε eine fest gewählte positive Zahl. Weiter wählen wir eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$|\xi - \sigma_k(x_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{40}.$$

Endlich wählen wir eine ungerade Primzahl $q_1 > D$, so daß $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$, was für $\varepsilon < c_7(k, \mathfrak{D})$ möglich ist. Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ alle Primzahlen, die von q_1 verschieden und kleiner als q_1^2 sind; weiter sei

$$\alpha_i = \left[\frac{\log q_1^2}{\log \pi_i}\right] \quad (\text{also} \quad \pi_i^{\alpha_i} < q_1^2 < \pi_i^{\alpha_i+1}).$$

Endlich setzen wir

$$M = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \ldots \pi_s^{\alpha_s}.$$

Wegen $(q_1, D) = 1$ ist es offenbar möglich, aus der Folge $(\mathfrak{D})$ zwei Teilfolgen

$$y_1, y_2, y_3, \ldots; \qquad z_1, z_2, z_3, \ldots$$

herauszugreifen, so daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$y_n \equiv z_n \equiv x_{n_0} \pmod{M}, \qquad y_n \equiv 0 \pmod{q_1}, \qquad z_n \equiv q_1 - 1 \pmod{q_1}.$$

Nach Hilfssatz 5, 6 gilt dann für $q_1 > \operatorname{Max}(c_5(k), 100)$ — also für $\varepsilon < c_8(k, \mathfrak{D})$ — einerseits

$$\begin{aligned} |\sigma_k(y_n) - \xi| &< |\sigma_k(y_n) - \sigma_k(x_{n_0})| + \frac{\varepsilon}{40} \\ &\leqq |B'_{q_1}(y_n) - B'_{q_1}(x_{n_0})| + \sum_{l=2}^{q_1-1} |B'_{l q_1}(y_n) - B'_{l q_1}(x_{n_0})| \\ &+ \sum_{q=q_1^2}^{\infty} |B'_q(y_n) - B'_q(x_{n_0})| + \frac{\varepsilon}{40} \leqq 1{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} + \frac{\varepsilon}{40} < \varepsilon \end{aligned}$$

und ebenso

$$|\sigma_k(z_n) - \xi| < \varepsilon,$$

andererseits

$$\begin{aligned} |\sigma_k(y_n) - \sigma_k(z_m)| &\geqq |B'_{q_1}(y_n) - B'_{q_1}(z_m)| - 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} \\ &= \frac{q_1 - 1}{q_1^{\frac{k}{2}}} - 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} > 0{,}04 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} > 0{,}01\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Es sei η ein Häufungswert der Folge $\sigma_k(y_1), \sigma_k(y_2), \ldots$; ζ ein Häufungswert der Folge $\sigma_k(z_1), \sigma_k(z_2), \ldots$; dann ist also

$$|\xi - \eta| \leqq \varepsilon, \quad |\xi - \zeta| \leqq \varepsilon, \quad |\eta - \zeta| \geqq \frac{\varepsilon}{100}.$$

Also: Zu jedem Punkt ξ von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ und zu jedem positiven $\varepsilon < c_8(k, \mathfrak{D})$ gibt es einen Punkt ξ' von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, so daß

$$\frac{\varepsilon}{200} \leqq |\xi - \xi'| \leqq \varepsilon.$$

Daraus folgt:

1. Jeder Punkt von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ ist Häufungspunkt von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, womit Satz 3a bewiesen ist.

2. Es seien (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2) zwei zu $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ komplementäre Intervalle, $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2$. Wir wählen $\xi = \delta_1$ und setzen

$$\varepsilon = \min\left(\frac{c_8(k, \mathfrak{D})}{2}, \frac{\delta_1 - \gamma_1}{2}, \frac{\delta_2 - \gamma_2}{2}\right).$$

Der eben genannte Punkt ξ' liegt wegen $\gamma_1 < \delta_1 - \varepsilon$ rechts von ξ; also ist $\xi + \frac{\varepsilon}{200} \leqq \xi' \leqq \xi + \varepsilon$; daher muß wegen $\delta_2 - \gamma_2 > \varepsilon$ gelten $\gamma_2 \geqq \xi' \geqq \delta_1 + \frac{\varepsilon}{200}$, d. h.

$$\gamma_2 - \delta_1 \geqq \frac{\varepsilon}{200} = \min\left(\frac{c_8(k, \mathfrak{D})}{400}, \frac{\delta_1 - \gamma_1}{400}, \frac{\delta_2 - \gamma_2}{400}\right),$$

womit auch Satz 4a bewiesen ist.

§ 5.

Beweis des Satzes 7a.

Hilfssatz 7. *Es sei*

$$(\mathfrak{D}) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen, $x_n = O(n)$.

Ich behaupte: Zu jeder Zahl $\beta < 1$ *gibt es eine Zahl* $c_9(\beta, \mathfrak{D})$, *so daß jede Primzahl* $q > c_9(\beta, \mathfrak{D})$ *folgende Eigenschaft besitzt:*

Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ *alle Primzahlen, die kleiner als* q^2 *und von* q *verschieden sind; es sei*

$$\alpha_i = \left[\frac{\log q^2}{\log \pi_i}\right] \quad \left(\textit{also } \pi_i^{\alpha_i} < q < \pi_i^{\alpha_i+1}\right).$$

Es werde

$$M(q) = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \ldots \pi_s^{\alpha_s}$$

gesetzt.

Dann gibt es eine ganze Zahl a und mehr als βq modulo q paarweise inkongruente Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_t$[16]*, so daß jedes der t Kongruenzsysteme*

$$x_n \equiv a \,(\mathrm{mod}\; M(q)), \qquad x_n \equiv b_i \,(\mathrm{mod}\; q)$$

$(i = 1, 2, \ldots, t)$ für unendlich viele n erfüllt ist.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so könnte man eine Zahl β $(0 < \beta < 1)$ und eine wachsende Folge von Primzahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ finden mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem ganzen $i > 0$ und jedem ganzen a gibt es *höchstens* βq_i modulo q_i paarweise inkongruente Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_t$, für welche das Kongruenzsystem

$$x_n \equiv a \,(\mathrm{mod}\; M(q_i)), \qquad x_n \equiv b_l \,(\mathrm{mod}\; q_i)$$

für unendlich viele n erfüllt ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $q_{i+1} > q_i^2$; dann ist offenbar $M(q_{i+1})$ durch $q_i M(q_i)$ teilbar, also

$$M(q_{i+1}) = M(q_i)\, q_i^f N,$$

wo f, N ganze positive Zahlen sind, $(N, q_i) = 1$.

Es sei A_i die Anzahl derjenigen Restklassen modulo $M(q_i)$, die in $(\mathfrak{D})$ unendlich viele Repräsentanten besitzen.

Wenn eine Restklasse a modulo $M(q_{i+1})$ in $(\mathfrak{D})$ unendlich viele Repräsentanten besitzt, so hat auch die Restklasse a, modulo $M(q_i)$ betrachtet, und ebenso die Restklasse a, modulo q_i betrachtet, unendlich viele Repräsentanten in $(\mathfrak{D})$. Für die Klasse a gibt es also modulo $M(q_i)$ genau A_i Möglichkeiten, und für jede von diesen Möglichkeiten gibt es nach Voraussetzung höchstens βq_i Möglichkeiten modulo q_i. Also gibt es höchstens $\beta A_i q_i$ Restklassen modulo $M(q_i) q_i$, die in $(\mathfrak{D})$ unendlich viele Repräsentanten besitzen. Jede Restklasse modulo $M(q_i) q_i$ zerfällt aber modulo $M(q_{i+1})$ in genau $q_i^{f-1} N$ Restklassen; daher ist

$$A_{i+1} \leqq \beta A_i q_i q_i^{f-1} N = \beta A_i \frac{M(q_{i+1})}{M(q_i)}.$$

Daher ist, wegen $A_1 \leqq M(q_1)$,

$$A_i \leqq \beta^{i-1} M(q_i).$$

Es gibt eine Zahl $b > 0$, so daß $x_n < bn$ für alle n; wir wählen ein festes ganzes $i > 0$ so groß, daß $\beta^{i-1} < \frac{1}{b}$. In denjenigen Restklassen modulo $M(q_i)$, die in $(\mathfrak{D})$ nicht unendlich viele Repräsentanten haben, mögen K Glieder von $(\mathfrak{D})$ liegen. Es sei nun $l > 0$ ganz; die Anzahl

[16]) Also $t > \beta q$.

der x_n, die $\leqq l M(q_i)$ sind, ist höchstens

$$K + l A_i \leqq l \beta^{i-1} M(q_i) + K < \frac{1}{b} l M(q_i) - 1$$

für genügend große l. Daher ist für große l

$$x_{\left[\frac{1}{b} l M(q_i)\right]} > l M(q_i) \geqq b \left[\frac{1}{b} l M(q_i)\right],$$

gegen die Voraussetzung $x_n < b n$; w. z. b. w.

Beweis des Satzes 7a. Es sei

$$(\mathfrak{D}) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen, $x_n = O(n)$. Es sei q_1 eine Primzahl, $q_1 > c_5(k)$, $q_1 > c_9(0{,}995, \mathfrak{D})$, $q_1 > 200$. Es sei $M(q_1)$ die im Hilfssatz 7 definierte Zahl. Dann gibt es nach Hilfssatz 7 eine ganze Zahl a und mehr als $0{,}995\, q_1$ modulo q_1 paarweise inkongruente Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_t$, so daß jedes der t Kongruenzsysteme

$$x_n \equiv a \pmod{M(q_1)}, \qquad x_n \equiv b_i \pmod{q_1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, t)$ für unendlich viele Werte von n erfüllt ist. Wenn wir (was offenbar erlaubt ist) $0 \leqq b_i < q_1$ voraussetzen, so muß wegen $q_1 > 200$, $t > 0{,}995\, q_1$ unter den Zahlen b_i mindestens eine, sagen wir b_1, vorkommen, so daß

$$0 \leqq b_1 < 0{,}01\, q_1$$

und mindestens eine, sagen wir b_2, so daß

$$0{,}99\, q_1 \leqq b_2 < q_1.$$

Es gibt also in $(\mathfrak{D})$ zwei Teilfolgen

$$y_1, y_2, \ldots; \qquad z_1, z_2, \ldots,$$

so daß für alle natürlichen n

$$y_n \equiv z_n \equiv a \pmod{M(q_1)}, \qquad y_n \equiv b_1 \pmod{q_1}, \qquad z_n \equiv b_2 \pmod{q_1}.$$

Daher ist für alle natürlichen n

$$|\sigma_k(y_n) - \sigma_k(z_n)|$$

$$= \left| (B'_{q_1}(y_n) - B'_{q_1}(z_n) + \sum_{l=2}^{q_1-1} (B'_{l q_1}(y_n) - B'_{l q_1}(z_n)) + \sum_{q=q_1^2}^{\infty} (B'_q(y_n) - B'_q(z_n)) \right|$$

$$\geqq 0{,}98 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} - 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} = 0{,}03 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}$$

(nach Hilfssatz 5 und 6). Also ist die Folge

$$\sigma_k(x_1), \sigma_k(x_2), \sigma_k(x_3), \ldots$$

nicht konvergent, w. z. b. w.

§ 6.

Beweis des Satzes 5a.

Für zwei ganze Zahlen a, b mit $a < b$, die größer als 1 und nicht kongruent 2 modulo 4 sind, ist $\frac{\varepsilon_a}{a} \neq \frac{\varepsilon_b}{b}$. Denn aus $\frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{\varepsilon_b}{b}$, $a < b$, würde $\varepsilon_a = 1$, $\varepsilon_b = 2$ folgen, also einerseits $b = 2a$, andererseits $a \equiv 1 \pmod 2$, $b \equiv 0 \pmod 4$, was einen Widerspruch liefert. Man kann also alle ganzen Zahlen, die größer als 1 und nicht kongruent 2 modulo 4 sind, in eine Folge

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

umordnen, so daß

$$\frac{\varepsilon_{a_1}}{a_1} > \frac{\varepsilon_{a_2}}{a_2} > \frac{\varepsilon_{a_3}}{a_3} > \ldots. \tag{18}$$

Es ist

$$\sigma_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_{a_n}(x),$$

wo die Reihe rechts absolut konvergiert.

Wir wählen nun eine ungerade Primzahl q und halten sie fest. Es sei $q = a_s$, also

$$\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n} > \frac{1}{q} \quad \text{für} \quad n < s, \qquad \frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n} < \frac{1}{q} \quad \text{für} \quad n > s. \tag{19}$$

Eine geläufige Limesbetrachtung ergibt infolge (18), (19) folgendes: Man kann ein $c_{10}(q)$ wählen, so daß für alle $k > c_{10}(q)$ folgendes gilt:

$$1. \quad \left| \sum_{n=1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} \right| > \frac{10}{q^{\frac{k}{2}-1}}$$

für alle Systeme von ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots, g_{s-1}, \tag{20}$$

für welche

$$|g_n| \leqq a_n^2 \quad (n = 1, 2, \ldots, s-1), \qquad \sum_{n=1}^{s-1} g_n^2 > 0.$$ [17]

$$2. \quad \sum_{n=s+1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} < \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}}.$$

[17]) Man beweist dies wie folgt: Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_{s-1}$ ganz und fest gewählt; g_m sei die erste unter diesen Zahlen, die von Null verschieden ist; also $|g_m| \geqq 1$. Wegen (18) ist (bei wachsendem k)

$$\sum_{n=m+1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} = o\left(\left(\frac{\varepsilon_{a_m}}{a_m}\right)^{\frac{k}{2}}\right).$$

(Fortsetzung der Fußnote [17]) auf nächster Seite.)

Wir denken uns jetzt ein $k > c_{10}(q)$ fest gewählt. Nach (9) ist erstens

$$B'_{a_n}(x) = 0$$

für $x \equiv -1 \pmod{a_n}$, zweitens (ganz roh abgeschätzt)

$$|B'_{a_n}(x)| \leqq \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} a_n^2.$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$B'_{a_n}(x) = \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} g_n(x),$$

wo $g_n(x)$ eine ganze Zahl ist, die also der Ungleichung

$$|g_n(x)| \leqq a_n^2$$

genügt.

Wir teilen jetzt die Folge aller natürlichen Zahlen x in Restklassen modulo $M = a_1 a_2 \ldots a_{s-1}$; es seien $A_1, A_2, \ldots, A_u$ diejenigen Restklassen, in welchen

$$g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_{s-1}(x) = 0$$

(zu diesen Restklassen gehört z. B. die Restklasse $x \equiv -1 \pmod{M}$). In diesen Restklassen ist

$$\sum_{n=1}^{s-1} B'_{a_n}(x) = 0; \tag{21}$$

in allen übrigen (vielleicht existierenden) Restklassen ist aber nach 1.

$$\left|\sum_{n=1}^{s-1} B'_{a_n}(x)\right| > \frac{10}{q^{\frac{k}{2}-1}}.$$

also nach 2. und Hilfssatz 6

$$\begin{aligned} |\sigma_k(x)| &\geqq \left|\sum_{n=1}^{s-1} B'_{a_n}(x)\right| - |B'_q(x)| - \left|\sum_{n=s+1}^{\infty} B'_{a_n}(x)\right| \\ &> \frac{10}{q^{\frac{k}{2}-1}} - \frac{1}{q^{\frac{k}{2}-1}} - \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}} > \frac{8}{q^{\frac{k}{2}-1}}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\left|\sum_{n=1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}}\right| > \left(\frac{\varepsilon_{a_m}}{a_m}\right)^{\frac{k}{2}} (1 + o(1)).$$

Wegen (19) ist also für genügend große k

$$\left|\sum_{n=1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}}\right| > 10\, q \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{k}{2}}$$

Weil aber für (20) nur endlichviele Möglichkeiten bestehen, folgt daraus schon 1.

Jede Restklasse A_i $(i = 1, 2, \ldots, u)$ zerfällt in genau q Restklassen $A_{i,0}, A_{i,1}, \ldots, A_{i,q-1}$ modulo Mq (denn offenbar ist $q \nmid M$); es sei $x \equiv q - 1 - l \pmod q$ in $A_{i,l}$. In der Restklasse $A_{i,l}$ gilt nach Hilfssatz 6

$$B_q'(x) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}},$$

also wegen (21) und 2.

$$\sigma_k(x) - (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}} < \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}}.$$

In jedem der q abgeschlossenen Intervalle

$$\left\langle (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}} - \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}},\ (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}} + \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}} \right\rangle$$

$(l = 0, 1, \ldots, q-1)$ liegt also mindestens ein Punkt von $\mathfrak{R}_k$, im Rest des offenen Intervalls

$$\left(-\frac{8}{q^{\frac{k}{2}-1}},\ \frac{8}{q^{\frac{k}{2}-1}} \right)$$

liegt aber kein Punkt von $\mathfrak{R}_k$. Daher besitzt $\mathfrak{R}_k$ für $k > c_{10}(q)$ mindestens $q + 1$ komplementäre Intervalle, w. z. b. w.

§ 7.

Beweis des Satzes 8a.

Wir denken uns k fest. Es sei $f(n)$ eine monotone Funktion der natürlichen Zahl n; es sei $f(n) \to +\infty$ für $n \to +\infty$. Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{R}_k$ und $x_1, x_2, \ldots$ eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen mit $\sigma_k(x_n) \to \xi$.

Wir wählen erstens eine wachsende Folge

$$l_1, l_2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen so, daß

$$f(l_n) > (n+1)! \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dann wählen wir eine wachsende Folge

$$y_1, y_2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen folgendermaßen:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ \ldots,\ y_{l_1} = l_1;$$

wenn nun für ein $n \geqq 1$ die Zahl y_{l_n} bereits definiert ist, so sei

$$y_{l_n} < y_{l_n+1} \leqq y_{l_n} + (n+1)!, \qquad y_{l_n+1} \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!},$$
$$y_{l_n+i} = y_{l_n+i-1} + (n+1)! \qquad (i = 2, 3, \ldots, l_{n+1} - l_n).$$

Wenn nun ein ganzes $m > l_1$ vorliegt, so sei $l_n < m \leqq l_{n+1}$; dann ist

$$0 < y_m - y_{m-1} \leqq (n+1)! < f(l_n) \leqq f(m),$$

also

$$y_m - y_{m-1} = O(f(m)).$$

Zweitens ist für $l_n < m \leqq l_{n+1}$

$$y_m \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!},$$

also

$$B'_q(y_m) = B'_q(x_{n+1}) \quad \text{für} \quad q \leqq n+1,$$

also nach Hilfssatz 4

$$|\sigma_k(y_m) - \sigma_k(x_{n+1})| \leqq \sum_{q=n+2}^{\infty} |B'_q(y_m) - B'_q(x_{n+1})| \leqq c_4(k) \sum_{q=n+2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}};$$

daher ist

$$\lim_{m=\infty} \sigma_k(y_m) = \lim_{n=\infty} \sigma_k(x_n) = \xi,$$

w. z. b. w.

Prag, den 21. Februar 1929.

(Eingegangen am 23. Februar 1929.)