Vojtěch Jarník

Eine Bemerkung über diophantische Approximationen

Math. Zeitschr. 72 (1959), pp. 187--191

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500684

JARNÍK, V.
Math. Zeitschr. 72, 187—191 (1959)

Eine Bemerkung über diophantische Approximationen

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

VOJTĚCH JARNÍK

Alle Zahlen in dieser Note sind reell. Es sei

(1) $$\Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \dots \vartheta_{1m} \\ \dots\dots \\ \vartheta_{n1} \dots \vartheta_{nm} \end{pmatrix}$$

eine Matrix von $n\,m$ Zahlen. Für $t \geqq 1$ setze man

$$\psi_\Theta(t) = \underset{0<x\leqq t}{\mathrm{Min}} \left(\underset{1\leqq i\leqq n}{\mathrm{Max}} \left| \sum_{j=1}^{m} \vartheta_{ij}\, x_j + x_{m+i} \right| \right)$$

mit $x = \mathrm{Max}\,(|x_1|, \dots, |x_m|)$, wobei sich Min nur auf *ganze* Zahlen $x_1, \dots, x_{m+n}$ bezieht. Die Funktion ψ_Θ mißt die Genauigkeit, mit welcher das System

$$\sum_{j=1}^{m} \vartheta_{ij}\, x_j + x_{m+i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

in ganzen $x_1, \dots, x_{m+n}$ lösbar ist (mit Ausschluß der trivialen Nullösung). Wir stellen zunächst einige teils triviale, teils bekannte Tatsachen zusammen.

A. Bekanntlich ist $\psi_\Theta(t) < t^{-\frac{m}{n}}$ (vgl. z.B. [*1*], S. 13).

B. Die Menge derjenigen Θ, für welche $\psi_\Theta(t) = o\left(t^{-\frac{m}{n}}\right)$ $(t \to +\infty)$, hat das Maß Null ([*1*], S. 92 oder [*5*], S. 172); solche Θ nennt KHINTCHINE singulär. Dabei wird in dieser Note jede Matrix Θ als Punkt des $n\,m$-dimensionalen Raumes E^{nm} mit den Koordinaten $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \dots, \vartheta_{nm}$ gedeutet.

C. Ist $m = n = 1$, ϑ_{11} irrational, so ist $\psi_\Theta(t) = \Omega(t^{-1})$; man vergleiche dies mit **A** ([*1*], S. 92 oder [*4*], S. 172, Satz I).

D. Ein System von Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ heiße *linear unabhängig*, wenn für ganze c_i stets $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k + c_0 \neq 0$ ist, mit Ausnahme des Falles $c_0 = c_1 = \dots = c_k = 0$. Das System $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ heiße *algebraisch unabhängig*, wenn für jedes Polynom $F(x_1, \dots, x_k)$ mit ganzen Koeffizienten $F(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0$ ist, solange F nicht das Polynom Null ist.

E. Im Falle $m = 1$, $n > 1$ ist $\limsup_{t\to+\infty} t\,\psi_\Theta(t) = +\infty$ dann und nur dann, wenn es unter den Zahlen $\vartheta_{11}, \dots, \vartheta_{n1}$ mindestens zwei linear unabhängige gibt (vgl. [*3*], S. 199, Satz 9; dort erscheint dieses Resultat als eine Folge allgemeinerer Sätze, man kann es aber auch direkt ziemlich einfach beweisen).

F. Falls die ϑ_{ij} in (1) linear unabhängig sind, so ist offenbar $\psi_\Theta(t)>0$ für jedes $t\geqq 1$.

G. Wenn Ξ aus Θ durch Hinzufügung einer Spalte entsteht, so ist $\psi_\Xi(t)\leqq\psi_\Theta(t)$.

H. Es sei $F(x_1,\ldots,x_p)$ ein Polynom, das in jeder Veränderlichen höchstens vom Grad k ist. Für $i=1,2,\ldots,p$ sei N_i eine Menge von $k+1$ Zahlen. Wenn für jedes System $b_1,\ldots,b_p$ mit $b_1\in N_1,\ldots,b_p\in N_p$ gilt $F(b_1,\ldots,b_p)=0$, so sind alle Koeffizienten von F gleich Null. Beweis durch Induktion nach p (man entwickle F nach Potenzen von x_p).

J. Es seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ algebraisch unabhängig. Dann bilden diejenigen α_{k+1}, für welche das System $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$ algebraisch abhängig ist, eine abzählbare Menge.

Satz. *Es sei $m\geqq 1$, $n\geqq 1$, $m+n>2$; $\varphi(t)$ sei positiv und abnehmend für $t\geqq 1$, $\varphi_1(t)$ sei positiv für $t\geqq 1$, $\varphi_1(t)\to+\infty$ für $t\to+\infty$. Es sei $M_{n,m}$ die Menge derjenigen Matrizen* (1), *für welche folgendes gilt:*

I. Das System der Zahlen ϑ_{ij} $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq m)$ ist algebraisch unabhängig.

II. Im Falle $m=1$ ist $\psi_\Theta(t)=O\left(\frac{\varphi_1(t)}{t}\right)$; im Falle $m>1$ ist $\psi_\Theta(t)=O\left(\varphi(t)\right)$.

Dann ist $M_{n,m}$ eine nichtleere Menge. Genauer: Ist G eine beliebige nichtleere offene Menge in E^{nm}, so hat die Projektion des Durchschnitts $G\cap M_{n,m}$ auf jede Koordinatenachse die Mächtigkeit des Kontinuums.

Bemerkung. Der Satz zeigt, daß die in **E** für den Fall $m=1$, $n>1$ gegebene Abschätzung definitiv ist. Satz und Beweis gelten auch für $m=n=1$, haben aber dann wegen **A** keinen Wert. Die Existenz von algebraisch unabhängigen ϑ_{ij} mit der Eigenschaft II wurde im Falle $n<m$ von CHABAUTY und LUTZ [*2*] bewiesen; im Falle $n\geqq m$ bekommen sie weniger vollständige Resultate. Fordert man nur *lineare* Unabhängigkeit, so findet man derartige Existenzsätze bereits bei KHINTCHINE ([*4*], S. 173—177, vgl. auch [*1*], S. 94). Zum Unterschied zu den mehr geometrisch gehaltenen Beweisen von KHINTCHINE und CHABAUTY-LUTZ ist der folgende Beweis rein arithmetisch.

Beweis. 1. Die Fälle $m=1$, $m=2$. Es seien φ, φ_1 den Voraussetzungen gemäß gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $t^{-1}\varphi_1(t)$ für $t\geqq 1$ nicht wächst. In der Tat, man kann offenbar zunächst annehmen, daß $\varphi_1(t)\geqq 1$ für $t\geqq 1$, und dann ersetze man $\varphi_1(t)$ durch

$$\varphi_2(t)=t\cdot\inf_{1\leqq\tau\leqq t}\tau^{-1}\varphi_1(\tau)\leqq\varphi_1(t).$$

Wegen $\varphi_1(t)\to+\infty$ ist nämlich auch $\varphi_2(t)\to+\infty$; denn, ist $\varphi_1(t)\geqq K>0$ für $t\geqq C\geqq 1$, so ist

$$\varphi_2(t)\geqq t\cdot\operatorname{Min}\left(\frac{1}{C},\frac{K}{t}\right)=K\quad\text{für}\quad t\geqq\operatorname{Max}(KC,1).$$

Man ordne nun alle Polynome $F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und mit Ausschluß des Polynoms Null in eine Folge

$$(\mathfrak{F})\qquad F_1,F_2,F_3,\ldots$$

so, daß jedes derartige Polynom auf unendlich vielen Stellen der Folge auftritt und daß der Grad von F_r in jeder Veränderlichen höchstens gleich r ist. Dann wähle man eine Folge von natürlichen Zahlen

$$q_1 < Q_1 < q_2 < Q_2 < \cdots \tag{2}$$

so, daß für $r = 1, 2, \ldots$ folgendes gilt:

$$\frac{r+1}{q_{r+1}} < \frac{1}{q_r^r Q_r^r}, \tag{3}$$

$$\frac{2(r+1)\,q_r}{q_{r+1}} < \varphi(Q_r), \quad \frac{2(r+1)\,Q_r}{Q_{r+1}} < \varphi(q_{r+1}), \tag{4}$$

$$2(r+1)\,q_r < \varphi_1(q_{r+1}); \tag{5}$$

dazu genügt es, daß (2) hinreichend rasch wächst. Aus (2), (3) folgt noch für $r \geqq 1$

$$\frac{r+2}{Q_{r+2}} < \frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{4Q_{r+1}} < \frac{1}{2}\,\frac{r+1}{Q_{r+1}}, \quad \frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{4q_{r+1}} < \frac{1}{2}\,\frac{r+1}{q_{r+1}}. \tag{6}$$

Wir gehen nun von einer bestimmten Folge (2) aus, wählen $2n$ ganze Zahlen $p_{1,i}$, $P_{1,i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ und ordnen jeder Folge

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \ldots \quad (\varepsilon_r = 1 \quad \text{oder} \quad -1) \tag{7}$$

$2n$ Zahlen ϑ_i, η_i $(i = 1, \ldots, n)$ auf folgende Weise zu:

Man konstruiere für $r \geqq 2$, $1 \leqq i \leqq n$ ganze Zahlen $p_{r,i}, P_{r,i}$ nach folgender Vorschrift: Sind diese Zahlen für ein $r \geqq 1$ definiert, so wähle man $p_{r+1,i}$, $P_{r+1,i}$ (vgl. **H**) so, daß

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_r \left(\dfrac{p_{r+1,i}}{q_{r+1}} - \dfrac{p_{r,i}}{q_r} \right) \leqq \dfrac{r+1}{q_{r+1}}, \\[2ex] 0 < \varepsilon_r \left(\dfrac{P_{r+1,i}}{Q_{r+1}} - \dfrac{P_{r,i}}{Q_r} \right) \leqq \dfrac{r+1}{Q_{r+1}}, \end{cases} \tag{8}$$

$$F_r\left(\frac{p_{r+1,1}}{q_{r+1}}, \ldots, \frac{p_{r+1,n}}{q_{r+1}}, \frac{P_{r+1,1}}{Q_{r+1}}, \ldots, \frac{P_{r+1,n}}{Q_{r+1}} \right) \neq 0. \tag{9}$$

Dabei denke man sich alle Systeme $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ $(a_i, b_i$ ganz) von vornherein in eine Folge geordnet, und nehme für $(p_{r+1,1}, \ldots, p_{r+1,n}, P_{r+1,1}, \ldots, P_{r+1,n})$ das erste Glied dieser Folge, für welches (8), (9) gilt, so daß die Zahlen $p_{r+1,i}, P_{r+1,i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ durch $p_{11}, \ldots, p_{1n}, P_{11}, \ldots, P_{1n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ eindeutig bestimmt sind. Man setze dann

$$\vartheta_i = \lim_{r \to \infty} \frac{p_{r,i}}{q_r}, \qquad \eta_i = \lim_{r \to \infty} \frac{P_{r,i}}{Q_r},$$

so daß [vgl. (6)]

$$\left| \vartheta_i - \frac{p_{r,i}}{q_r} \right| = \left| \sum_{s=r}^{\infty} \left(\frac{p_{s+1,i}}{q_{s+1}} - \frac{p_{s,i}}{q_s} \right) \right| \leqq \sum_{s=r}^{\infty} \frac{s+1}{q_{s+1}} < 2\,\frac{r+1}{q_{r+1}} \tag{10}$$

und analog

(11) $$\left|\eta_i - \frac{P_{r,i}}{Q_r}\right| < 2\,\frac{r+1}{Q_{r+1}}\,.$$

Daraus sieht man:

1. Wenn bei gegebener Folge (2) und bei gegebenen $p_{1,i}$, $P_{1,i}$ statt (7) eine andere Folge ε_1', ε_2', ... gewählt wird, wo also für ein $k \geqq 1$ gilt $\varepsilon_k' \neq \varepsilon_k$, $\varepsilon_g' = \varepsilon_g$ für $1 \leqq g < k$, so bekommt man neue Zahlen $p_{r,i}'$, ϑ_i', $P_{r,i}'$, η_i', und es ist [vgl. (8), (10), (6)]

$$p_{k,i}' = p_{k,i}, \quad p_{k+1,i}' \neq p_{k+1,i}, \qquad |\vartheta_i' - \vartheta_i| \geqq \frac{1}{q_{k+1}} - 4\,\frac{k+2}{q_{k+2}} > 0,$$

also $\vartheta_i' \neq \vartheta_i$ und ebenso $\eta_i' \neq \eta_i$.

2. Ist G eine nichtleere offene Menge, so kann man durch eine geeignete Wahl von q_1, $p_{1,i}$, Q_1, $P_{1,i}$ erreichen, daß alle Punkte $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ (für alle Folgen (7)) in G liegen. Denn nach (10), (11) ist

$$\left|\vartheta_i - \frac{p_{1,i}}{q_1}\right| < \frac{4}{q_2} < \frac{4}{q_1}, \qquad \left|\eta_i - \frac{P_{1,i}}{Q_1}\right| < \frac{4}{Q_1}\,.$$

3. Man setze

$$\Xi = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vartheta_n \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Z} = \begin{pmatrix} \vartheta_1, & \eta_1 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \vartheta_n, & \eta_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist für $q_r \leqq t < q_{r+1}$ [nach (10), (5)]

$$\psi_\Xi(t) \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |q_r \vartheta_i - p_{r\,i}| < \frac{\varphi_1(q_{r+1})}{q_{r+1}} \leqq \frac{\varphi_1(t)}{t}\,.$$

Weiter ist [nach (4), (10), (11)] für $q_r \leqq t < Q_r$:

$$\psi_{\mathsf{Z}}(t) \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |q_r \vartheta_i + 0 \cdot \eta_i - p_{r,i}| < \varphi(Q_r) < \varphi(t),$$

und für $Q_r \leqq t < q_{r+1}$:

$$\psi_{\mathsf{Z}}(t) \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |0 \cdot \vartheta_i + Q_r \eta_i - P_{r,i}| < \varphi(q_{r+1}) < \varphi(t)\,.$$

Es bleibt noch übrig, die algebraische Unabhängigkeit der Zahlen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ zu beweisen. Es sei also

$$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum a(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n)\, x_1^{g_1} \ldots x_n^{g_n}\, y_1^{h_1} \ldots y_n^{h_n}$$

ein Polynom mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten; sein Grad in jeder Veränderlichen sei höchstens k. Man setze voraus, daß

(12) $$F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0;$$

daraus wird sich ein Widerspruch ergeben.

Es gibt eine Folge $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ so, daß $F = F_{r_a}$ für $a = 1, 2, \ldots$ (s. die Folge $(\mathfrak{F})$]. Im Folgenden soll r nur die Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ durchlaufen. Bezieht sich O auf $r \to +\infty$, so kann man (12) nach (10), (11) folgendermaßen schreiben:

$$0 = \sum a(g_1, \ldots, h_n) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{r+1,i}}{q_{r+1}} + O\left(\frac{r+2}{q_{r+2}}\right)\right)^{g_i} \left(\frac{P_{r+1,i}}{Q_{r+1}} + O\left(\frac{r+2}{Q_{r+2}}\right)\right)^{h_i}$$

$$= F\left(\frac{p_{r+1,1}}{q_{r+1}}, \ldots, \frac{p_{r+1,n}}{q_{r+1}}, \frac{P_{r+1,1}}{Q_{r+1}}, \ldots, \frac{P_{r+1,n}}{Q_{r+1}}\right) + O\left(\frac{r+2}{q_{r+2}}\right).$$

Wegen $F = F_r$ und nach (9) ist der erste Summand rechts von der Gestalt $\frac{c}{q_{r+1}^{nk} Q_{r+1}^{nk}}$ ($c \neq 0$ ganz), während nach (3)

$$\frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{q_{r+1}^{r+1} Q_{r+1}^{r+1}}$$

ist, was für $r \to +\infty$ den gesuchten Widerspruch liefert.

2. Der Fall $m > 2$. Man füge der Matrix **Z** nacheinander weitere Glieder hinzu, bis man m Spalten bekommt. Nach **J** kann man es auf „hinreichend viele" Arten so machen, daß das resultierende System algebraisch unabhängig ist; dann benutze man **G**.

Bemerkung 1. Für die Matrizen Ξ aus dem Beweis des Satzes (Fall $m = 1$) ist nach (10), (4)

$$\psi_{\Xi}(q_r) \leqq \frac{2(r+1)q_r}{q_{r+1}} < \varphi(Q_r) < \varphi(q_r),$$

so daß

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\psi_{\Xi}(t)}{\varphi(t)} < +\infty.$$

Bemerkung 2. Ist $t^{-1}\varphi_1(t) = o\left(t^{-\frac{1}{n}}\right)$ (für $m = 1$), bzw. $\varphi(t) = o\left(t^{-\frac{m}{n}}\right)$ (für $m > 1$), so ist die Menge $M_{n,m}$ von erster Kategorie in E^{nm}. In der Tat, es sei $N_{T,k}$ die Menge derjenigen Θ, für welche gilt

$$\psi_{\Theta}(t) \leqq k\,\varphi(t) \qquad \text{für alle } t \geqq T$$

[für $m = 1$ schreibe man $t^{-1}\varphi_1(t)$ statt $\varphi(t)$]. Dann ist $N_{T,k}$ abgeschlossen und besteht aus lauter singulären Systemen, hat also (vgl. **B**) das Maß Null. Also ist $N_{T,k}$ nirgendsdicht, und offenbar ist $M_{n,m} \subset \bigcup_{T=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{T,k}$.

Literatur

[*1*] Cassels, J. W. S.: An Introducion to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 1957. — [*2*] Chabauty, C., et E. Lutz: Sur les approximations diophantiennes linéaires réelles (I). Problème homogène. Comptes rendus **231**, 887—889 (1950). — [*3*] Jarník, V.: Zum Khintchineschen „Übertragungssatz". Travaux de l'Institut Mathématique de Tbilissi **3**, 193—216 (1938). — [*4*] Khintchine, A.: Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo **50**, 170—195 (1926). — [*5*] Khintchine, A.: Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. Acta Arithmetica **2**, 161—172 (1937).

Praha II, Ke Karlovu 3 (Tschechoslowakei)

(Eingegangen am 12. Juni 1959)