Vojtěch Jarník

Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXIV (1925), No. 27, 13 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500524

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXIV. ČÍSLO 27.

Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu.

Napsal

Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 6. listopadu 1925.

Budiž $x > 0$ a označme znakem $A(x)$ počet mřížových bodů uvnitř kružnice $u^2 + v^2 = x$ a na jejím obvodě. Položme pro reálné y

$$\Phi(y) = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{3/2}} \cos(2\pi\sqrt{n}\, y), \tag{1}$$

kde $U(n)$ je počet mřížových bodů *na obvodě* kružnice $u^2 + v^2 = n$. Jak známo, jest $U(n) = O(n^\varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$, takže řada v (1) konverguje absolutně a stejnoměrně pro $-\infty < y < \infty$.

Položme

$$P(x) = A(x) - \pi x;$$

potom platí[1])

$$\int_0^y P^2(x)\, dx = \Phi(0)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}) \tag{2}$$

pro každé $\varepsilon > 0$. V tomto pojednání dokáži v § 1. pro každé $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ obdobný vztah

$$\int_0^y P((\sqrt{x} + \alpha)^2)\, P((\sqrt{x} + \beta)^2)\, dx = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}). \tag{3}$$

Důkaz jest obdobný Landauovu dukazu rovnice (2) (hlavně důkaz 2. a 3. pomocné věty jest veden zcela obdobně jako důkaz 2. a 3. pomocné věty v citovaném pojednání Landauově), vyžaduje však vzhledem k „fázovému posunutí" argumentů funkce P četných dodatků.

---

[1]) Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise IV, Göttinger Nachrichten, 1924, str. 58—65; srovnej též Cramér, Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy, Mathematische Zeitschrift, XV (1922), str. 201—210; Hardy, The average ordre of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 15 (1916), str. 192—213.

Rovnice (3) dovoluje nám velmi snadno odvoditi některé důsledky o průběhu funkce $P(x)$, jež jsou obsaženy v § 2. Místo funkce $P(x)$ jest při tom pohodlnější, uvažovati funkci $Q(x) = \frac{P(x^2)}{x^{1/2}}$ (t. j. v podstatě: vzíti za nezávisle proměnnou *poloměr* kružnice a děliti funkcí $x^{1/2}$, jež udává střední vzrůst funkce $P(x^2)$).

V následujícím užívám označení:

$$\Delta_x f(x) = f(x+1) - f(x);$$

písmenem c značím kladné konstanty, závislé nejvýše na α, β, γ; pouze v 1. pomocné větě závisí c ještě na povaze funkce $f(x)$. Různá c neodlišuji indexy.

Konečně všechny řady, jež se v následujícím vyskytují, konvergují absolutně a stejnoměrně v intervalech, v nichž je uvažujeme. Odmocniny, jež se vyskytují, jest vždy bráti kladně.

§ 1.

1. pomocná věta. *Budiž $f(x)$ funkce integrace schopná a ohraničená v každém intervalu* $(1, a)$, *kde a je libovolné číslo větší než 1. Budiž* $r > 0$, $s < 0$, $r + s \geqq 0$. *Konečně budiž pro* $y \to \infty$

$$\int_1^y f(x)\,dx = O(y^r). \tag{4}$$

Potom jest

$$\int_1^y f(x)\,x^s\,dx = \begin{cases} O(y^{r+s}), \text{ je-li } r+s > 0, \\ O(\log y), \text{ je-li } r+s \quad 0. \end{cases}$$

Důkaz. Podle (4) jest

$$\left|\int_1^y f(x)\,dx\right| < c\,y^r$$

pro všechna $y > 1$; tedy

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| < 2\,c\,y_2^r$$

pro $y_2 > y_1 \geqq 1$. Tedy podle 2. věty o střední hodnotě jest pro $y_2 > y_1 \geqq 1$

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,x^s\,dx\right| = y_1^s \left|\int_{y_1}^{\eta} f(x)\,dx\right| < 2\,c\,y_1^s\,\eta^r \leqq 2\,c\,y_1^s\,y_2^r \tag{5}$$

$$(y_2 \geqq \eta \geqq y_1).$$

Budiž nyní $y > 2$ a definujme celé číslo N nerovninami $1 \leqq \frac{y}{2^N} < 2$; potom jest předně $N = O(\log y)$, a za druhé

$$\left|\int_1^y f(x)\,x^s\,dx\right| < \left|\int_1^{\frac{y}{2^N}} f(x)\,x^s\,dx\right| + \sum_{n=1}^{N}\left|\int_{\frac{y}{2^n}}^{\frac{y}{2^{n-1}}} f(x)\,x^s\,dx\right| \leqq O(1) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} 2\,c\left(\frac{y}{2^n}\right)^s \left(\frac{y}{2^{n-1}}\right)^r \text{ (podle (5))} = O(1) \quad y^{r+s}\,O\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2^{r+s}}\right)^n;$$

a poslední výraz jest patrně

$$O(y^{r+s}) \text{ pro } r+s>0,\ O(N) = O(\log y) \text{ pro } r-s=0.$$

2. pomocná věta. *Budiž* $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Položme, pro* $x > 0$, $\gamma > 0$

$$\psi(x,\gamma) = \frac{(\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n^{3/4}}\,\Delta_x \cos\left(2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right);$$

potom jest pro $y > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$

$$\int_0^y \psi(x,\alpha)\,\psi(x,\beta)\,dx = \Phi(\beta-\alpha)\,y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}) \tag{6}$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Bez újmy obecnosti budiž $y > 1$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Očividně jest

$$\int_0^1 \psi(x,\alpha)\,\psi(x,\beta)\,dx = c. \tag{7}$$

Dále jest pro $x > 1$

$$(\sqrt{x}+\alpha)^{3/2}(\sqrt{x}+\beta)^{3/2} = x^{3/2} + c\,x + c\,x^{1/2} + r(x),$$

kde $|r(x)| < c$. Položme

$$\varrho_{m,n}(x) = \frac{U(m)\,U(n)}{m^{3/4}\,n^{3/4}}\,\Delta_x \cos\left(2\pi\sqrt{m}\,(\sqrt{x}+\alpha)-\frac{\pi}{4}\right).$$
$$.\,\Delta_x \cos\left(2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\beta)-\frac{\pi}{4}\right).$$

Abychom dokázali vzorec (6), stačí dokázati

$$\int_1^y x^{3/2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}(x)\,dx = \pi^4\,\Phi(\beta-\alpha)\,y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}); \tag{8}$$

neboť podle 1. pomocné věty jest potom

$$\int_1^y x\sum_{m,n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}(x)\,dx = O(y), \tag{9}$$

$$\int_1^y x^{1/2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}(x)\,dx = O(y^{1/2}), \tag{10}$$

a konečně jest očividně

$$\int_1^y r(x)\sum_{m,n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}(x)\,dx = O(y). \tag{11}$$

Ale

$$\begin{aligned}\int_0^y \psi(x,\alpha)\,\psi(x,\beta)\,dx &= \int_0^1 \psi(x,\alpha)\,\psi(x,\beta)\,dx + \\ &\frac{1}{\pi^4}\int_1^y \left(x^{3/2} + c\,x + c\,x^{1/2} + r(x)\right)\sum_{m,n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}(x)\,dx\end{aligned} \tag{12}$$

a z (7), (8), (9), (10), (11), (12) plyne okamžitě (6).

Konečně jest

$$\int_1^y x^{3/4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \varrho_{m,n}(x)\, dx = O(1) + \int_0^y ;$$

stačí tedy dokázati

$$(13) \qquad \int_0^y x^{3/4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{U(m)\, U(n)}{m^{3/4} n^{3/4}} \Delta_x \cos\left(2\pi \sqrt{m}(\sqrt{x} - \alpha) - \frac{\pi}{4}\right) .$$

$$. \Delta_x \cos\left(2\pi \sqrt{n}(\sqrt{x} - \beta) - \frac{\pi}{4}\right) dx = \pi^4 \Phi(\beta - \alpha)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

Důkaz rovnice (13) probíhá však téměř doslovně tak jako důkaz obdobné rovnice pro $\alpha = \beta = 0$ v citovaném pojednání Landauově (Hilfssatz 2.), pročež jej přenechávám čtenáři.

3. pomocná věta. *Budiž $J_2(z)$ Besselova funkce 1. druhu s indexem 2. Pro $x > 0$, $\gamma \geqq 0$ položme*

$$F(x, \gamma) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} \Delta_x \left((\sqrt{x} + \gamma)^2 J_2(2\pi \sqrt{n}\{\sqrt{x} + \gamma\})\right).$$

Potom jest pro $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $y > 0$

$$(14) \qquad \int_0^y F(x, \alpha)\, F(x, \beta)\, dx = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon})$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Jak známo, jest

$$\frac{d}{dx}\left(x J_2(2\pi \sqrt{nx}) + \frac{x^{3/4}}{\pi n^{5/4}} \cos\left(2\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \pi \sqrt{nx}\, J_1(2\pi \sqrt{nx}) - \sqrt[4]{nx} \sin\left(2\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{nx}} \cos\left(2\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{nx}}\right)$$

(v důsledku asymptotického vzorce

$$J_1(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y}} + O\left(\frac{1}{y^{3/2}}\right)).$$

Tedy jest

$$\Delta_x\left((\sqrt{x} + \gamma)^2 J_2(2\pi \sqrt{n}(\sqrt{x} + \gamma)) - \frac{(\sqrt{x} + \gamma)^{3/2}}{\pi n^{5/4}} \cos\left(2\pi \sqrt{n}(\sqrt{x} + \gamma) - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left[y J_2(2\pi \sqrt{ny}) + \frac{y^{3/4}}{\pi n^{5/4}} \cos\left(2\pi \sqrt{ny} - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{y = (\sqrt{x} + \gamma)^2}^{y = (\sqrt{x+1} + \gamma)^2} =$$

$$= \int_{(\sqrt{x} + \gamma)^2}^{(\sqrt{x+1} + \gamma)^2} \frac{d}{dy}\left(y J_2(2\pi \sqrt{ny}) + \frac{y^{3/4}}{\pi n^{5/4}} \cos\left(2\pi \sqrt{ny} - \frac{\pi}{4}\right)\right) dy = O\left(\frac{1}{n^{1/4} x^{1/4}}\right).[2]$$

---

[2]) Neboť délka integračního intervalu jest O (1).

Ježto platí obecně

$$\Delta_x (f(x)\, g(x)) = f(x)\, \Delta_x g(x) + g(x+1)\, \Delta_x f(x),$$

jest

$$\Delta_x\left((\sqrt{x}+\gamma)^{3/2} \cos\left(2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$-(\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}\, \Delta_x \cos\left(2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x+1}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right)\left((\sqrt{x+1}+\gamma)^{3/2}-(\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}\right)$$

$$= O\left(\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).$$

Tedy jest

$$F(x,\gamma) - \psi(x,\gamma) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n}$$

$$\cdot\, \Delta_x\left((\sqrt{x}+\gamma)^2 J_2(2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)) - \frac{(\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}}{\pi\, n^{3/4}}\cos\left[2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right]\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^{5/4}}\left((\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}\Delta_x\cos\left[2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right]-\right.$$

$$\left.-\,\Delta_x\left[(\sqrt{x}+\gamma)^{3/2}\cos\left\{2\pi\sqrt{n}\,(\sqrt{x}+\gamma)-\frac{\pi}{4}\right\}\right]\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).$$

Tedy jest

$$\left|\int_0^y (F(x,\alpha)-\psi(x,\alpha))\,\psi(x,\beta)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_0^y [F(x,\alpha)-\psi(x,\alpha)]^2\,dx\int_0^y \psi^2(x,\beta)\,dx}$$

$$= \sqrt{O\left(y^{1/2}\int_0^y \psi^2(x,\beta)\,dx\right)}$$

Ale podle 3. pomocné věty jest (pro $\alpha = \beta$)

$$\int_0^y \psi^2(x,\beta)\,dx = O(y^{3/2});$$

tedy jest

(15) $$\int_0^y [F(x,\alpha)-\psi(x,\alpha)]\,\psi(x,\beta)\,dx = O(y)$$

a rovněž

(16) $$\int_0^y [F(x,\beta)-\psi(x,\beta)]\,\psi(x,\alpha)\,dx = O(y).$$

Konečně

(17) $$\int_0^y [F(x,\alpha)-\psi(x,\alpha)][F(x,\beta)-\psi(x,\beta)]\,dx = O\left(\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = O(\sqrt{y}) = O(y)$$

Z (6), (15), (16), (17) však plyne

$$\int_0^y F(x, \alpha) F(x, \beta)\, dx = \int_0^y [F(x, \alpha) + \psi(x, \alpha)]\,[F(x, \beta) + \psi(x, \beta)]\, dx -$$

$$- \int_0^y [F(x, \alpha) + \psi(x, \alpha)]\, \psi(x, \beta)\, dx - \int_0^y [F(x, \beta) + \psi(x, \beta)]\, \psi(x, \alpha)\, dx$$

$$+ \int_0^y \psi(x, \alpha)\, \psi(x, \beta)\, dx = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}),$$

jak bylo dokázati.

Hlavní věta. *Budiž* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$; *potom platí*

$$\text{(3)} \qquad \int_0^y P((\sqrt{x} + \alpha)^2)\, P((\sqrt{x} + \beta)^2)\, dx = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}),$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Jak známo, jest

$$\int_0^x P(x)\, dx = \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} J_2(2\pi\sqrt{n\,x})$$

a tedy

$$\text{(18)} \qquad F(x, \gamma) = \int_{(\sqrt{x} + \gamma)^2}^{(\sqrt{x} + 1 + \gamma)^2} P(w)\, dw.$$

Dokáži nejprve

$$\text{(19)} \qquad \int_0^y P((\sqrt{x} + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2})\, P((\sqrt{x} + \beta)^2 + \tfrac{1}{2})\, dx = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

Jest

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} &\int_0^y P((\sqrt{x} + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2})\, P((\sqrt{x} + \beta)^2 + \tfrac{1}{2})\, dx = \int_0^y [F(x, \alpha) - \\ &- P((\sqrt{x} + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2})]\,[F(x, \beta) - P((\sqrt{x} + \beta)^2 + \tfrac{1}{2})]\, dx \\ &- \int_0^y (F(x, \alpha) - P((\sqrt{x} + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2}))\, F(x, \beta)\, dx - \int_0^y (F(x, \beta) - \\ &- P((\sqrt{x} + \beta)^2 + \tfrac{1}{2}))\, F(x, \alpha)\, dx + \int_0^y F(x, \alpha)\, F(x, \beta)\, dx = J_1 - J_2 - J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Podle (18) jest

$$F(x, \gamma) = ((\sqrt{x} + 1 + \gamma)^2 - (\sqrt{x} + \gamma)^2)\, \mu = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \mu,$$

kde μ je jisté číslo, ležící mezi dolní a horní hranicí funkce $P(w)$ pro $(\sqrt{x} + \gamma)^2 \leqq w \leqq (\sqrt{x} + 1 + \gamma)^2$. Jest $P(w) = \sum_{n \leqq w} U(n) - \pi w$; tedy jest $P(w)$ spojitou funkcí, jejíž derivace je rovna $-\pi$, vyjma body $w = g$ (g celistvé); v těchto bodech mění se $P(w)$ nespojitě skokem velikosti $U(g) = O(g^{\varepsilon/2})$; jest tedy $\mu = P(u) + O(x^{\varepsilon/2})$, je-li $|(\sqrt{x} + \gamma)^2 - u| < l$, kde l je libovolná konstanta, a znamení O platí při tom stejnoměrně v u; platí tedy pro $|(\sqrt{x}+\gamma)^2-u|<l$ stejnoměrně v u [3])

$$F(x,\gamma)-P(u)=\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\mu-P(u)=O(x^{\varepsilon/2}).$$

V důsledku této poznámky jest integrand v J_1 roven $O(x^{\varepsilon})$, a tedy

(21) $$J_1=O(y^{1+\varepsilon}).$$

Uvažujme J_2. Jest

$$F(x,\alpha)-P[(\sqrt{x}+\alpha)^2+\tfrac{1}{2}]=\int\limits_{(\sqrt{x}+\alpha)^2}^{(\sqrt{x}+\alpha)^2+1}P(w)\,dw+\int\limits_{(\sqrt{x}+\alpha)^2+1}^{(\sqrt{x+1}+\alpha)^2}P(w)\,dw-P[(\sqrt{x}+\alpha)^2+\tfrac{1}{2}],$$

a tedy $J_2=K_1+K_2$, kde

$$K_1=\int\limits_0^y\left(\int\limits_{(\sqrt{x}+\alpha)^2}^{(\sqrt{x}+\alpha)^2+1}P(w)\,dw-P[(\sqrt{x}+\alpha)^2+\tfrac{1}{2}]\right)F(x,\beta)\,dx,$$

$$K_2=\int\limits_0^y\int\limits_{(\sqrt{x}+\alpha)^2+1}^{(\sqrt{x+1}+\alpha)^2}P(w)\,dw\,F(x,\beta)\,dx.$$

Platí pak

$$K_2=\int\limits_0^y\int\limits_{(\sqrt{x}+\alpha)^2+1}^{(\sqrt{x+1}+\alpha)^2}[F(x,\alpha)+O(x^{\varepsilon/2})]\,dw\,F(x,\beta)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^y[F(x,\alpha)+O(x^{\varepsilon/2})]\left(\frac{c}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)F(x,\beta)\,dx=$$

$$=c\int\limits_0^y\frac{F(x,\alpha)F(x,\beta)}{\sqrt{x}}\,dx+O(y^{1+\varepsilon/2}).$$

Ale

$$\int\limits_1^y F(x,\alpha)F(x,\beta)\,dx=\int\limits_0^y+O(1)=O(y^{3/2})$$

podle 3. pomocné věty; a tedy podle 1. pomocné věty

$$\int\limits_0^y\frac{F(x,\alpha)F(x,\beta)}{\sqrt{x}}\,dx=\int\limits_1^y+O(1)=O(y);$$

tedy

$$K_2=O(y^{1+\varepsilon}).$$

V K_1 položme $(\sqrt{x}+\alpha)^2=t$, $(\sqrt{y}+\alpha)^2=z$; tedy

[3]) Používám zde a v dalším známého výsledku Gaussova: $P(x)=O(x^{1/2})$, z něhož okamžitě plyne $F(x,\gamma)=O(x^{1/4})$ pro každé $\gamma\geqq 0$. Užití přesnějších odhadů (na př. $P(x)=O(x^{1/3})$) nevede zde k lepším výsledkům.

$$x = t + O(\sqrt{t}),\ dx = dt\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right),\ z = O(y);$$

potom

$$K_1 = \int_{\alpha^2}^{z}\left(\int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2})\right) F(x, \beta)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) dt =$$

$$= \int_{\alpha^2}^{z}\left(\int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2})\right) F(x, \beta)\,dt + O(y^{1+\varepsilon})$$

$$\left[\text{neboť} \int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2}) = O(t^{\varepsilon/2})\right].$$

Budiž nyní g libovolné celé číslo, $g > \alpha^2$; potom, jak Landau ukázal,[4]) jest

$$\int_g^{g+1}\left[\int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2})\right] dt = 0,$$

a tedy, určíme-li h tak, aby pro $t = g$ bylo $(\sqrt{x} + \beta)^2 = h$, platí

$$\int_g^{g+1}\left[\int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2})\right] F(x, \beta)\,dt = \int_g^{g+1}\left[\int_t^{t+1} P(w)\,dw -\right.$$

$$\left.- P(t + \tfrac{1}{2})\right]\left[F(x, \beta) - P(h)\right] dt = O(g^{\varepsilon}),$$

ježto $(\sqrt{x} + \beta)^2 - h = O(1)$, a tedy $F(x, \beta) - P(h) = O(g^{\varepsilon/2})$.

Z toho plyne pro celistvé g

$$\int_{\alpha^2}^{g}\left[\int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2})\right] F(x, \beta)\,dt = O(g^{1+\varepsilon}),$$

a tedy, ježto integrand je $O(t)$, i při spojitě proměnném z

$$\int_{\alpha^2}^{z}\left[\int_t^{t+1} P(w)\,dw - P(t + \tfrac{1}{2})\right] F(x, \beta)\,dt = O(z^{1+\varepsilon}) = O(y^{1+\varepsilon}).$$

Tedy jest $K_1 = O(y^{1+\varepsilon})$, a tedy

(22) $$J_2 = K_1 + K_2 = O(y^{1+\varepsilon}).$$

Z důvodů symetrie jest i

(23) $$J_3 = O(y^{1+\varepsilon});$$

z (20), (21), (22), (23) a (14) plyne však (19).

---

[4]) Viz pojednání, citované sub 1.), str. 64, 7. řádek zdola, kde místo $Q(x + \frac{1}{2})$, $\Psi(x)$ jest v našem označení psáti $P(x + \frac{1}{2})$, $\int_x^{x+1} P(w)\,dw$.

Nyní konečně dokáži hlavní větu. Jest

$$\int_0^y P[(\sqrt{x}+\alpha)^2]\,P[(\sqrt{x}+\beta)^2]\,dx$$

$$= \int_{-\frac12}^{y-\frac12} P[(\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha)^2]\,P[(\sqrt{x+\tfrac12}+\beta)^2]\,dx =$$

(24)

$$\int_0^y P[(\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha)^2]\,P[(\sqrt{x+\tfrac12}+\beta)^2]\,dx + O(y) =$$

$$= L_1 - L_2 - L_3 + L_4 + O(y),$$

kde

$$L_1 = \int_0^y (P[\{\sqrt{x}+\alpha\}^2+\tfrac12] - P[\{\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha\}^2])\,(P[\{\sqrt{x}+\beta\}^2+\tfrac12] -$$
$$- P[\{\sqrt{x+\tfrac12}+\beta\}^2])\,dx,$$

$$L_2 = \int_0^y (P[\{\sqrt{x}+\alpha\}^2+\tfrac12] - P[\{\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha\}^2])\,P[\{\sqrt{x}+\beta\}^2+\tfrac12]\,dx,$$

$$L_3 = \int_0^y (P[\{\sqrt{x}+\beta\}^2+\tfrac12] - P[\{\sqrt{x+\tfrac12}+\beta\}^2])\,P[\{\sqrt{x}+\alpha\}^2+\tfrac12]\,dx,$$

$$L_4 = \int_0^y (P[\{\sqrt{x}+\alpha\}^2+\tfrac12]\,P[\{\sqrt{x}+\beta\}^2+\tfrac12]\,dx.$$

Platí

$$(\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha)^2 - ([\sqrt{x}+\alpha]^2+\tfrac12) = 2\alpha(\sqrt{x+\tfrac12}-\sqrt{x}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Jest tedy integrand v L_1 roven $O(x^\varepsilon)$, a tedy

(25) $$L_1 = O(y^{1+\varepsilon}).$$

Abychom odhadli L_2, uvažujme takto: Pokud mezi

$$x_1 = (\sqrt{x}+\alpha)^2+\tfrac12 \text{ a } x_2 = (\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha)^2$$

neleží žádné celé číslo, má $P(w)$ v intervalu (x_1, x_2) derivaci $-\pi$, a je tedy

$$P([\sqrt{x}+\alpha]^2+\tfrac12) - P([\sqrt{x+\tfrac12}+\alpha]^2) =$$
$$= 2\pi\alpha(\sqrt{x+\tfrac12}-\sqrt{x}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Označme, je-li g celé číslo, $g > (\alpha+\sqrt{\tfrac12})^2$,

l_g kořen rovnice $(\sqrt{l_g+\tfrac12}+\alpha)^2 = g$,

r_g kořen rovnice $(\sqrt{r_g}+\alpha)^2+\tfrac12 = g$;

jest tedy

$$l_g = g+\alpha^2-\tfrac12-2\alpha\sqrt{g},\; r_g = g+\alpha^2-\tfrac12-2\alpha\sqrt{g-\tfrac12}$$

a tedy

$$l_g \sim r_g \sim g,\ 0 < r_g - l_g < O\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right).$$

Neleží-li x v žádném intervalu (l_g, r_g), [5]) neleží mezi x_1 a x_2 žádné celé číslo, a je tedy

$$P([\sqrt{x} + \alpha]^2 + \tfrac{1}{2}) - P([\sqrt{x} + \tfrac{1}{2} + \alpha]^2) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Vyjmeme-li tedy z integrační dráhy $(0, y)$ intervaly (l_g, r_g) a označíme-li zbytek integrační dráhy s, je

$$i_s = \int_s [P(\{\sqrt{x} + \alpha\}^2 + \tfrac{1}{2}) - P(\{\sqrt{x} + \tfrac{1}{2} + \alpha\}^2)]\, P([\sqrt{x} + \beta]^2 + \tfrac{1}{2})\, dx =$$

$$= O\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}\, dx = O(y).$$

V intervalu (l_g, r_g) je

$$P[(\sqrt{x} + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2}] - P[(\sqrt{x} + \tfrac{1}{2} + \alpha)^2] = O(g^\varepsilon),$$

a tedy

$$i_g = \int_{l_g}^{\mathrm{Min}(r_g, y)} = O\int_{l_g}^{r_g} g^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, dx = O(g^\varepsilon).$$

Tedy

$$\sum_{l_g < y} i_g = \sum_{g < O(y)} O(g^\varepsilon) = O(y^{1+\varepsilon}).$$

Tedy jest

(26) $$L_2 = i_s + \sum_{l_g < y} i_g = O(y^{1+\varepsilon}).$$

Z důvodů symetrie jest také

(27) $$L_3 = O(y^{1+\varepsilon}).$$

Podle (19) platí konečně

(28) $$L_4 = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

Z (24), (25), (26), (27), (28) plyne však (3), jak bylo dokázati.

§ 2.

Položme nyní pro $x > 0$

$$Q(x) = \frac{P(x^2)}{x^{1/2}}$$

$$\text{(t. j. } Q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,[A(x^2) - \pi x^2]).$$

[5]) A je-li ještě $x > r_{g_0}$, kde g_0 je nejmenší celé číslo, větší než $(\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^2$.

Platí pro $y > 1$, $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$

$$\int_1^y Q(x+\alpha)\,Q(x+\beta)\,x^2\,dx = \int_1^y \frac{P([x+\alpha]^2)\,P([x+\beta]^2)}{(x+\alpha)^{1/2}\,(x+\beta)^{1/2}}\,x^2\,dx =$$

$$= \int_1^y P([x+\alpha]^2)\,P([x+\beta]^2)\,x\left(1+\frac{c}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{y^2} P([\sqrt{z}+\alpha]^2)\,P([\sqrt{z}+\beta]^2)\left(1+\frac{c}{\sqrt{z}}+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)dz.$$

Podle hlavní věty jest však

$$\int_1^{y^2} P([\sqrt{z}+\alpha]^2)\,P([\sqrt{z}+\beta]^2)\,dz = \int_0^{y^2} + O(1) = \Phi(\alpha-\beta)\,y^3 + O(y^{2+\varepsilon})$$

a tedy, pomocí 1. pomocné věty

$$\int_1^y Q(x+\alpha)\,Q(x+\beta)\,x^2\,dx = \frac{1}{2}\,\Phi(\alpha-\beta)\,y^3 + O(y^{2+\varepsilon})\,,$$

čili

$$\int_1^y [Q(x+\alpha)\,Q(x+\beta) - \tfrac{3}{2}\,\Phi(\alpha-\beta)]\,x^2\,dx = O(y^{2+\varepsilon}).$$

Podle 1. pomocné věty jest tedy

$$\int_1^y Q(x+\alpha)\,Q(x+\beta)\,dx = \tfrac{3}{2}\,\Phi(\alpha-\beta)\,y + O(y^{\varepsilon})\,.$$

Z této rovnice plyne okamžitě pro $\alpha \geqq 0$

$$(29)\qquad \int_1^y [Q(x) \mp Q(x+\alpha)]^2\,dx = 3\,[\Phi(0) \mp \Phi(\alpha)]\,y + O(y^{\varepsilon}).$$

Landau[6]) dokázal: Existují dvě čísla $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ taková, že pro každé $\tau > 1$ má každá z nerovnin

$$P(x) > K_1\,x^{1/4},\quad P(x) < -\,K_1\,x^{1/4}$$

řešení v intervalu $\tau < x < \tau + K_2\sqrt{\tau}$.

Z toho plyne ihned pro funkci $Q(x)$: Každá z nerovnin

$$Q(x) > K_1\,,\quad Q(x) < -\,K_1$$

má řešení v intervalu $\tau < x < \tau + K_2$ $(\tau > 1)$.

[6]) Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise V, Göttinger Nachrichten 1924, str. 135—136. — Hardy (On the expression of a number as the sum of two squares, Quarterly Journal of Mathematics 46, 1915) dokázal, že

$$\liminf_{x=\infty} \frac{Q(x)}{(\log x)^{1/4}} < 0\,.$$

Specielně tedy: v každém intervalu $\tau < x < \tau + K_2$ ($\tau > 1$) lze nalézti dvě hodnoty x_1, x_2 tak, že

$$Q(x_1) - Q(x_2) > 2K_1.$$

Následující věty, hlavně věta 2., jež jsou téměř bezprostředními důsledky rovnice (29), tvoří jistý protějšek této větě Landauově.

1. věta. *Nelze nalézti* $\alpha > 0$ *tak,* aby

(30) $$\int_1^y (Q[x] - Q[x + \alpha])^2 \, dx = o(y).$$

Důkaz. Jest

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{3/2}} \cos 2\pi \sqrt{n}\, \alpha.$$

Kdyby platila rovnice (34), musilo by býti $\Phi(\alpha) = \Phi(0)$, a tedy $\cos 2\pi\sqrt{n}\,\alpha = 1$ pro všechna n, pro něž $U(n) > 0$, specielně tedy $\cos 2\pi\alpha = \cos 2\pi\sqrt{2}\,\alpha = 1$, t. j. $\alpha =$ celé číslo, $\sqrt{2}\,\alpha =$ celé číslo, což je pro $\alpha \neq 0$ nemožno.

Důsledek. *Pro žádné* $\alpha > 0$ *není*

(31) $$Q(x) - Q(x + \alpha) = o(1);$$

neboť z (31) by plynula rovnice (30).

2. věta. *Ke každému číslu* $\delta > 0$ *lze nalézti jisté číslo* $l(\delta) > 0$ *této vlastnosti: v každém intervalu* $(a, a + l(\delta))$, *kde* $a > 0$, *existuje jisté číslo* α *takové, že*

(32) $$\int_1^y [Q(x) - Q(x + \alpha)]^2 \, dx < \delta y,$$

jakmile $y > y(\alpha, \delta)$, *kde* $y(\alpha, \delta)$ *je vhodně volené číslo, závislé pouze na* α *a* δ.

Důsledek. *Pro tato* α *a pro* $y > y(\alpha, \delta)$ *jest v intervalu* $1 \leq x \leq y$ *stále* $|Q(x) - Q(x + \alpha)| < \sqrt[3]{\delta}$, *vyjma jistou množinu, jejíž míra je menší než* $\sqrt[3]{\delta}\, y$; neboť jinak by bylo $[Q(x) - Q(x + \alpha)]^2 \geq \delta^{2/3}$ na množině míry aspoň $\delta^{1/3} y$, což je ve sporu s (32).

Důkaz 2. věty. Funkce $\Phi(\alpha)$ je dána absolutně a stejnoměrně konvergentní řadou periodických funkcí a je tedy funkcí quasiperiodickou (fast periodisch) ve smyslu definice Bohrovy;[7] existuje tedy jisté číslo $l(\delta) > 0$ takové, že v každém intervalu délky $l(\delta)$ leží jisté číslo α, pro něž $\Phi(0) - \Phi(\alpha) < \frac{\delta}{6}$, a tedy podle (29)

$$\int_1^y [Q(x) - Q(x + \alpha)]^2 \, dx < \frac{\delta}{2} y + O(y^{\varepsilon}) < \delta y$$

pro $y > y(\alpha, \delta)$.

[7]) H. Bohr, Zur Theorie der fast periodischen Funktionen I, Acta mathematica 45, str. 30—127; srovnej zvláště Corollar na str. 41. dole.