Vojtěch Jarník

Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide
$a_1(u_1^2 + \cdots + u_{r_1}^2) + a_2(u_{r_1+1}^2 + \cdots + u_r^2) \leq x$

Věstník Král. čes. spol. nauk 1940, No. 3, 63 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500512

Zvláštní otisk z Věstn. Král. Čes. Spol. Nauk. Tř. matemat.-přírodověd. Ročník 1940.

Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $a_1\left(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2\right) + a_2\left(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2\right) \leqq x$.

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. März 1940.)

§ 1. Der Hauptsatz und seine Folgerungen.

Es sei $r \geqq 4$ ganz,

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

eine positiv-definite quadratische Form in den Veränderlichen $u_1, \ldots, u_r$. Das Volumen des Ellipsoides $Q(u) \leqq 1$ sei V_Q; dann ist das Volumen des Ellipsoides $Q(u) \leqq x$ für $x > 0$ gleich $V_Q \cdot x^{\frac{r}{2}}$. Man setze $\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q \cdot x^{\frac{r}{2}}$, wo $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(u_1, \ldots, u_r)$ mit $Q(u) \leqq x$ bedeutet; endlich sei für $x > 0$

$$M_Q(x) = \int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\, dy.$$

Sind die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ ganze Zahlen, so gilt bekanntlich[1]) für $r \geqq 5$

$$-\infty < \liminf_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} < \infty. \tag{1}$$

[1]) Z. B. A. WALFISZ, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 19 (1924), 300—307; E. LANDAU, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 21 (1924), 126—132; H. PETERSSON, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdim. Ellipsoiden, Abhandl. a. d. math. Seminar Hamburg 5 (1926), 116—150; V. JARNÍK, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 27 (1928), 154—160.

Dadurch ist die Größenordnung der Schwankungen von $P_Q(x)$ für ganze $a_{\mu\nu}$ vollständig beschrieben. Der Verlauf von $M_Q(x)$ ist, wie es zu erwarten war, viel glätter; insbesondere hat für $r = 4$ (und ganze $a_{\mu\nu}$) Herr Walfisz die Existenz des Grenzwertes

$$0 < \lim_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} < \infty \tag{2}$$

(und noch viel mehr) bewiesen.[2]) Verwandte Resultate für $r \geqq 5$ habe ich schon früher bewiesen[3]); der von Walfisz untersuchte Fall $r = 4$ bereitet aber bekanntlich besondere Schwierigkeiten. Die eben für ganze $a_{\mu\nu}$ dargestellten Resultate gelten freilich auch für die sog. „rationalen" Formen Q, d. h. für diejenigen Formen Q, in welchen alle Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl $\alpha > 0$ sind (denn offenbar ist $P_{\alpha Q}(x) = P_Q\left(\frac{x}{\alpha}\right)\Big)$.

Ganz anders liegen aber die Verhältnisse bei den „irrationalen" (d. h. nicht rationalen) Formen; wir beschränken uns in diesem irrationalen Falle auf die Formen der Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j u_j^2 \qquad (\beta_j > 0 \text{ für } j = 1, \ldots, r) \tag{3}$$

wo also mindestens eine der Zahlen $\beta_\mu \beta_\nu^{-1}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, r)$ irrational ist. Für diese Formen hat man, im scharfen Gegensatz zu (1) und (2), folgende Resultate:

$$\lim_{x=\infty} \frac{P_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} = 0 \; (r \geqq 5).\,^{4)} \qquad \lim_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} = 0 \; (r \geqq 4).\,^{5)}$$

Andererseits ist hier das Verhalten von $M_Q(x)$ nicht mehr so regulär

---

[2]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 5. Abhandlung, Acta Arithmetica **1** (1936), 222—283 und 7. Abhandlung, Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi **5** (1938), 1—67. Anmerkung bei der Korrektur. (2) gilt (für ganze $a_{\mu\nu}$) auch für $r > 4$ (nicht aber für $r = 2, 3$). Vgl. V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 5. Abhandlung, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **69** (1940), 148—174.

[3]) V. Jarník, Sur une fonction arithmétique, Věstník Kr. Čes. Spol. Nauk 1930, Nr. 7; 13 S.

[4]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdim. Ellipsoiden II, Mathem. Annalen **101** (1929), 136—146; V. Jarník-A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdim. Ellipsoiden. Math. Zeitschr. **32** (1930), 152—160.

[5]) V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Věst. Král. Čes. Spol. Nauk 1932, Nr. 20, 17 S.

wie im rationalen Falle; denn für jedes ganze $r \geqq 4$ gibt es drei Formen Q_1, Q_2, Q_3 von der Gestalt (3), sodaß für jedes $\varepsilon > 0$ folgendes gilt:

$$\limsup \frac{M_{Q_1}(x)}{x^{r-1-\varepsilon}} = \infty,\ ^{5)} \quad \lim \frac{M_{Q_2}(x)}{x^{\frac{r+1}{2}+\varepsilon}} = 0,\ ^{6)} \tag{4}$$

$$\liminf \frac{M_{Q_3}(x)}{x^{\frac{r+1}{2}+\varepsilon}} = 0,\ ^{7)} \quad \limsup \frac{M_{Q_3}(x)}{x^{r-1-\varepsilon}} = \infty\ ^{7)} \tag{5}$$

(man beachte $r - 1 > \frac{1}{2}(r + 1)$). (4) zeigt, daß die Größenordnung von $M_Q(x)$ von den Koeffizienten β_j abhängt, da sich verschiedene Formen verschieden verhalten können; (5) zeigt, daß der Verlauf der Funktion $M_Q(x)$ sehr irregulär sein kann — ganz anders als im rationalen Falle (vgl. (2)). Es erscheint daher angemessen, für irrationale Formen nach Resultaten zu suchen, welche erstens den *gesamten* Verlauf von $M_Q(x)$ und zweitens seine Abhängigkeit von den β_j zu beschreiben erlauben. Ich habe dieses Problem schon einmal,[8] und zwar für die Formen der Gestalt

$$Q(u) = \alpha_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2 (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_{r_1+r_2}^2) \tag{6}$$

angegriffen, wobei ich $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$ voraussetzte; über die damals erzielten Resultate und über ihre Beziehungen zu den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit werde ich kurz zum Schluß dieses Paragraphen berichten. Damals habe ich für die Formen (6) statt $M_Q(x)$ die Funktion $\int_0^x |\mathsf{P}_Q(y)|\, dy$ untersucht. Heute will ich $M_Q(x)$ für die Formen (6), aber mit der mehr einschränkenden Bedingung $r_1 \geqq 6$, $r_2 \geqq 6$, untersuchen und im Hauptsatze eine verhältnismäßig einfache Funktion $F(x) = F_Q(x)$ bilden, welche die Funktion $M_Q(x)$ so genau darstellt, daß

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{F_Q(x)} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{F_Q(x)} < \infty.$$

Bezeichnungen und der Hauptsatz.

In der ganzen Abhandlung bedeuten r_1, r_2 ganze Zahlen, $r = r_1 + r_2$, $z = \mathrm{Min}\,(r_1, r_2)$, $r_1 \geqq 6$, $r_2 \geqq 6$; α_1, α_2 bedeuten positive Zahlen; $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ist

---

[6] V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre II, Math. Zeitschr. **33** (1931), 85—97.

[7] V. Jarník, Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **69** (1940), 57—60.

[8] V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre III, Math. Zeitschr. **36** (1933), 581—617.

irrational. $Q(u) = Q(u_1, \ldots, u_r)$ ist dann durch (6) gegeben. Die Gestalt von $Q(u)$ gestattet uns, die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = g_0 + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \cdots}} \qquad \begin{pmatrix} g_v \text{ ganz für } v \geqq 0, \\ g_0 \geqq 0,\ g_v > 0 \text{ für } v > 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

heranzuziehen. Die Näherungszähler und Näherungsnenner dieses Kettenbruches sollen dauernd mit p_v, q_v bezeichnet werden, also

$$\left.\begin{array}{lll} p_0 = g_0, & p_1 = g_1 g_0 + 1, & p_{v+2} = g_{v+2} p_{v+1} + p_v \ (v \geqq 0), \\ q_0 = 1, & q_1 = g_1, & q_{v+2} = g_{v+2} q_{v+1} + q_v \ (v \geqq 0). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen wir stets *positive* Zahlen, die nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$ abhängen; sind z. B. ξ, η, ζ irgendwelche Parameter, so bedeutet z. B. $c_{86}(\xi, \eta, \zeta)$ eine *positive* Zahl, die nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, \xi, \eta, \zeta$ abhängt u. desgl. Die Zahl c_l, bzw. $c_l(\xi, \eta, \zeta)$ u. desgl. hängt freilich noch vom Index l ab; in der ganzen Abhandlung kommt aber nur eine endliche Anzahl der $c_l, c_l(\xi, \eta, \zeta), \ldots$ vor. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, so lasse ich oft den Index l weg und schreibe unterschiedslos c statt c_l, $c(\xi, \eta, \zeta)$ statt $c_l(\xi, \eta, \zeta)$ usw., so daß Gleichungen wie $c + 1 = c$ vorkommen können. Sind A, B positive Zahlen, die von irgendwelchen Parametern abhängen dürfen, so will ich (etwas abweichend von der üblichen Bezeichnung) $A \sim B$ schreiben, wenn $c < \frac{A}{B} < c$ ist. Also z. B.: für $p_v > 0$ ist $p_v \sim q_v$ (ausführlich gesagt: es gibt ein $c_1 > 0$ und ein $c_2 > 0$, sodaß für jedes ganze $v \geqq 0$ entweder $p_v = 0$ oder $c_1 < \frac{p_v}{q_v} < c_2$ gilt).

Mit $\{a, b\}$ bezeichne ich den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen a, b (die übliche runde Klammer könnte zu Mißverständnissen führen); mit $[\xi]$ bezeichne ich für reelles ξ die größte ganze Zahl $\leqq \xi$. Das Zeichen a/b soll bedeuten: a und b sind *positive* ganze Zahlen und a ist ein Teiler von b.

Von den geläufigen Eigenschaften der Kettenbrüche brauchen wir nur folgende:

1. Alle Brüche $\frac{p_v}{q_v}$ sind positiv, außer wenn $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$ und $v = 0$: dann ist $p_0 = 0$. Daraus folgt: die positiven Näherungsbrüche von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ stimmen mit den reziproken Werten der positiven Näherungsbrüche von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ überein. (Zum Beweis konstruiere man den reziproken Wert von (7).)

2. Sind a, b ganze positive Zahlen mit

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

so ist $\frac{a}{b} = \frac{p_v}{q_v}$ für ein geeignetes $v \geqq 0$.

3. Für ganze $v \geqq 0$ ist

$$\{p_v, q_v\} = 1, \quad \frac{1}{2q_v q_{v+1}} < \left|\frac{p_v}{q_v} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| < \frac{1}{q_v q_{v+1}}.$$

4. Aus (8) folgt $p_0 < p_1 \leqq p_2 < \ldots;\ q_0 \leqq q_1 < q_2 < q_3 < \ldots;$

$$p_{v+2} \geqq 2p_v, \quad q_{v+2} \geqq 2q_v, \quad q_{v+1} \sim g_{v+1}\, q_v. \tag{9}$$

Also ist für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes ganze $u > 0$

$$\sum_{v \leqq u} 1 \leqq \sum_{v \leqq u} q_v^{\varepsilon} < c(\varepsilon)\, q_u^{\varepsilon}, \quad \sum_{v \geqq u} q_v^{-\varepsilon} < c(\varepsilon)\, q_u^{-\varepsilon}.$$

Allgemeiner werden wir oft Abschätzungen folgender Art gebrauchen, ohne sie stets ausdrücklich zu erwähnen: ist $a > 1$, n ganz, $n > 0$,

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_j > a\xi_{j-1}, \quad \eta_n > 0, \quad \eta_j < a^{-1}\eta_{j-1} \quad (1 < j \leqq n),$$

so ist

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n < c(a)\, \xi_n, \quad \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n < c(a)\, \eta_1.$$

Weiter: Ist $T(a)$ die Anzahl der positiven Teiler der natürlichen Zahl a, $T_1(a)$ die Summe ihrer reziproken Werte, so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$T_1(a) \leqq T(a) < c(\varepsilon)\, a^{\varepsilon}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir oft $\exp \eta$ statt e^{η}. Ist b reell, so bedeutet ξ^b denjenigen in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen komplexen ξ-Ebene regulären Zweig, der für $\xi > 0$ positiv ist; wir schreiben auch $\exp_{\xi} b = \xi^b$. In der ganzen Abhandlung ist $x \geqq q_2$ und w wird stets durch $q_w \leqq x < q_{w+1}$ definiert, also $w \geqq 2$ ganz. Natürlich interessieren uns hauptsächlich große Werte von x. Weiter wird stets

$$F(x) = F_Q(x) = x^{r-1} \sum_{v} \sum_{\substack{m/p_v \\ n/q_v}} \frac{1}{q_v^2\, n^{r_1-2}\, m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^2\right),$$

$$F'(x) = F'_Q(x) = \frac{x^{r-1}}{q_w^2} + x^{r-1} \sum_{v<w} \sum_{\substack{m/p_v \\ n/q_v}} \frac{1}{q_v^2\, n^{r_1-2}\, m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^2\right).$$

$$F''(x) = F''_Q(x) = x^{r-1} \sum_{v} \sum_{\substack{m/p_v \\ n/q_v}} \frac{1}{p_v q_v n^{r_1-2} m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{\sqrt{p_{v+1} q_{v+1} mn}}{x}\right)^2\right)$$

gesetzt (der Strich bedeutet also keine Ableitung). Dabei läuft die Summe nach v hier und im Folgenden stets nur über die v mit $p_v > 0$; in $F'(x)$ tritt dazu noch die Bedingung $v < w$ hinzu. Bei jedem v laufen freilich m bzw. n über alle positiven Teiler von p_v bzw. q_v.

Hilfssatz 1. $F'(x) \geqq x^{r-1} q_w^{-2} \geqq x^{r-3}$; $F(x) \sim F'(x) \sim F''(x)$.

Beweis. Auch $F(x)$ enthält das Glied $x^{r-1} q_w^{-2}$ (für $v = w$, $m = n = 1$). Also

$$F'(x) < F(x) \leqq F'(x) + c x^{r-1} \sum_{v \geqq w} q_v^{-2} < F'(x) + c x^{r-1} q_w^{-2} < c\, F'(x);$$

also $F(x) \sim F'(x)$. Aus $q_v \sim p_v$ folgt $F(x) \sim F''(x)$.

Nun lautet der

Hauptsatz 1.

$$M_Q(x) \sim F_Q(x),$$

d. h.: $c_3 F_Q(x) < M_Q(x) < c_4 F_Q(x)$ *für* $x \geqq q_2$.

Statt für $x \geqq q_2$ genügt es offenbar, die letzten Ungleichungen für $x > c_5$ zu beweisen. Nach Hilfssatz 1 ist jede der beiden Beziehungen

$$M_Q(x) \sim F'_Q(x), \quad M_Q(x) \sim F''_Q(x)$$

dem Hauptsatz äquivalent; insbesondere zeigt die letzte Form die Symmetrie des Hauptsatzes; denn F'' ändert sich nicht, wenn r_1, α_1 mit r_2, α_2 (also die p_v mit den q_v) vertauscht werden.

Da es für andere Zwecke nützlich ist, beweisen wir zugleich folgenden etwas allgemeineren Satz:

Hauptsatz 2. *Es sei* $0 \leqq \mu < 1$. *Dann ist*

$$c_6(\mu)\, F_Q(x) < M_Q(x) - M_Q(\mu x) < c_7(\mu)\, F_Q(x)$$

für $x > c_8(\mu)$.

Hauptsatz 1 ist im Hauptsatz 2 als Spezialfall $\mu = 0$ enthalten. Übrigens kann man im Hauptsatz 2 offenbar statt $c_7(\mu)$ die Zahl $c_7(0) = c_9$ schreiben.

Folgerungen des Hauptsatzes 1. Aus dem Hauptsatze 1 (den ich nach Bedarf in der ersten, zweiten oder dritten Form benutzen werde) ergibt sich eine Reihe von Folgerungen, die jetzt genannt und bewiesen werden sollen unter der Annahme, daß der Hauptsatz richtig ist; den Beweis des Hauptsatzes werden wir in den Paragraphen 2, 3, 4 erbringen. Übrigens kann der Leser den Rest dieses Paragraphen 1 auch erst nach den Paragraphen 2, 3, 4 lesen.

Bis zum Schluß dieses Paragraphen mögen folgende Bezeichungen gelten:

$$\mathfrak{S}(v) = \sum_{\substack{m/p_v \\ n/q_v}} \frac{1}{q_v^2 n^{r_1-2} m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^z\right), \tag{10}$$

also

$$F_Q(x) = x^{r-1} \sum_v \mathfrak{S}(v). \tag{11}$$

$\varphi(\xi)$ bedeute immer eine für $\xi > 0$ stetige und positive Funktion, für welche $\xi^{-1}\varphi(\xi)$ nicht abnimmt; ψ sei die zu φ inverse Funktion. Man beachte: mit $\eta = \psi(\xi)$ ist

$$\frac{\psi(\xi)}{\xi} = \frac{\eta}{\varphi(\eta)};$$

also ist $\xi^{-1}\psi(\xi)$ für $\xi > 0$ nicht wachsend, also für $\xi \geqq 1$ beschränkt. Weiter ist $\xi^{-1}\psi(\xi) \to 0$ (für $\xi \to \infty$) dann und nur dann, wenn $\xi^{-1}\varphi(\xi) \to \infty$; sonst ist $0 < \lim\limits_{\xi=\infty} \xi^{-1}\psi(\xi) < \infty$. Diese Bemerkungen werden wir oft brauchen.

Satz 1.

Aus

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty \tag{12}$$

folgt

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} \psi^2(x) < \infty. \tag{13}$$

Aus

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} > 0 \tag{14}$$

folgt

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} \psi^2(x) > 0. \tag{15}$$

Hilfssatz 2. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes v (mit $p_v > 0$) ist*

$$\mathfrak{S}(v) < \frac{c}{q_v^2}; \quad \mathfrak{S}(v) < \frac{c}{q_v^2}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{5}{2}};$$

$$\mathfrak{S}(v) < c(\varepsilon)\frac{1}{q_n^{2-\varepsilon}}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{z-2}; \quad \mathfrak{S}(v) < A(v, \varepsilon)\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{z}.$$

wo $A(v, \varepsilon) = c q_v^2$ für $r_1 = r_2$, $A(v, \varepsilon) = c(\varepsilon)\, q_v^{1+\varepsilon}$ für $|r_1 - r_2| = 1$, $A(v, \varepsilon) = c(\varepsilon)\, q_v^{\varepsilon}$ für $1 < |r_1 - r_2| < 4$,

$$A(v, \varepsilon) = c \text{ für } |r_1 - r_2| \geqq 4$$

(man beachte, daß einige von den $A(v, \varepsilon)$ von ε unabhängig sind).

Beweis. Die erste Formel ist trivial, also auch die zweite für $q_{v+1} \geqq x$. Für $q_{v+1} < x$ ist aber

$$\mathfrak{S}(v) \leqq \sum_{\substack{m/p_v \\ n/q_v}} \frac{1}{q_v^2\, m^{z-2}\, n^{z-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^z\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{q_v^2} \sum_{a \leqq \frac{x}{q_{v+1}}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^z a^2 \sum_{d/a} 1 + \frac{1}{q_v^2} \sum_{a > \frac{x}{q_{v+1}}} \frac{1}{a^{z-2}} \sum_{d/a} 1 \leqq$$

$$\leqq \frac{c}{q_v^2} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{z-\frac{7}{2}} \leqq \frac{c}{q_v^2} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{5}{2}} \quad \left(\text{wegen } \sum_{d/a} 1 < c a^{\frac{1}{2}},\ z \geqq 6\right).$$

Weiter: die Gliederzahl von $\mathfrak{S}(v)$ ist $< c(\varepsilon)\, q_v^{\varepsilon}$. Jedes Glied mit $mn \leqq \frac{x}{q_{v+1}}$ ist höchstens $\frac{m^2 n^2}{q_v^2} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^z \leqq \frac{1}{q_v^2} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{z-2}$ und jedes Glied mit $mn > \frac{x}{q_{v+1}}$ ist höchstens $\frac{1}{q_v^2\, m^{z-2}\, n^{z-2}} < \frac{1}{q_v^2} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{z-2}$.

Endlich: aus Symmetriegründen darf man $r_1 \geqq r_2$, also $r_1 - r_2 = \sigma \geqq 0$, $r_2 = z$ voraussetzen. Dann ist

$$\mathfrak{S}(v) \leqq \sum_{\substack{m/p_v \\ n/q_v}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^z \cdot \frac{1}{q_v^2}\, m^2 n^{2-\sigma}.$$

Hierin ist

$$\sum_{m/p_v} m^2 = p_v^2 \sum_{m/p_v} \left(\frac{m}{p_v}\right)^2 = p_v^2 \sum_{d/p_v} d^{-2} < c p_v^2 < c q_v^2,$$

$$\sum_{n/q_v} n^2 < c\, q_v^2, \quad \sum_{n/q_v} n < c(\varepsilon)\, q_v^{1+\varepsilon}, \quad \sum_{n/q_v} n^{2-\sigma} < c(\varepsilon)\, q_v^{\varepsilon}$$

für $\sigma = 2, 3$, $\sum_{n/q_v} n^{2-\sigma} < c$ für $\sigma \geqq 4$.

Beweis des Satzes 1. Gilt (12), so gibt es ein $a > 0$ mit $q_{v+1} < a\, \varphi(q_v)$. Jedem hinreichend großen x ordne man $V = V(x)$ so, daß $\varphi(q_{V-1}) < x \leqq \varphi(q_V)$, also $q_{V-1} < \psi(x) \leqq q_V$. Nach Hfs. 2 ist

$$\sum_{v \geqq V} \mathfrak{S}(v) < c \sum_{v \geqq V} q_v^{-2} < c q_V^{-2} \leqq c \psi^{-2}(x). \tag{16}$$

$$\sum_{v<V} \mathfrak{S}(v) < c \sum_{\sigma<V} \frac{1}{q_v^2} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{5}{2}} < c(a) \sum_{v<V} \frac{(\varphi(q_v))^{\frac{5}{2}}}{q_v^2 x^{\frac{5}{2}}}.$$

Da $\xi^{-1}\varphi(\xi)$ nicht abnimmt, so ist

$$\frac{(\varphi(q_{v+1}))^{\frac{5}{2}}}{q_{v+1}^2} \geqq \left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\varphi(q_v))^{\frac{5}{2}}}{q_v^2};$$

wegen $q_{v+2} \geqq 2q_v$, $q_{v+1} \geqq q_v$, $q_{V-1} < \psi(x)$ ist also

$$\sum_{v<V} \mathfrak{S}(v) < c(a) \frac{(\varphi(q_{V-1}))^{\frac{5}{2}}}{q_{V-1}^2 x^{\frac{5}{2}}} < c(a) \frac{(\varphi(\psi(x)))^{\frac{5}{2}}}{\psi^2(x)\, x^{\frac{5}{2}}} = \frac{c(a)}{\psi^2(x)}. \tag{17}$$

Aus (11), (16), (17) folgt aber (13).[9])

Gilt nun (14), so setze man $x_w = q_{w+1} - 1$ für jedes ganze $w \geqq 2$. Es gibt ein $a > 0$ und unendlichviele w mit $2x_w > q_{w+1} > a\,\varphi(q_w)$, also

$$q_w < \psi\left(\frac{2x_w}{a}\right) \leqq \operatorname{Max}\left(1, \frac{2}{a}\right) . \psi(x_w)$$

und nach Hilfssatz 1 ist für jedes derartige w

$$F(x_w) > x_w^{r-1} q_w^{-2} > c(a)\, x_w^{r-1} \psi^{-2}(x_w);$$

daraus folgt (15).

Die Schärfe des Satzes 1 kann man aus folgender Bemerkung beurteilen: gilt zugleich (12) und (14), so gilt (13) und (15). Eine Funktion φ, für welche gleichzeitig (12) und (14) gilt, bekommt man offenbar auf folgende Weise: Für $v \geqq 0$ sei

$$\frac{\varphi(q_v)}{q_v} = \operatorname*{Max}_{0 \leqq u \leqq v} \frac{q_{u+1}}{q_u};$$

weiter sei $\frac{\varphi(\xi)}{\xi}$ konstant für $0 < \xi \leqq q_0$ und linear in jedem Intervall $q_v \leqq \xi \leqq q_{v+1}$ $(v \geqq 0)$. Man beachte, daß für die eben definierte Funktion φ folgendes gilt:

A. Stets ist $\psi(x) \to \infty$; man kann aber α_1, α_2 so einführen, daß φ beliebig schnell, also ψ beliebig langsam wächst.

---

[9]) Infolge des Hauptsatzes 1. kann man nämlich bis zum Schluß dieses Paragraphen $F(x)$ oder $F'(x)$ oder $F''(x)$ statt $M_Q(x)$ betrachten.

B. Dann und nur dann ist $\xi^{-1}\psi(\xi) \to 0$, wenn $\xi^{-1}\varphi(\xi) \to \infty$ (für $\xi \to \infty$), d. h. wenn die Folge $g_0, g_1, g_2, \ldots$ aus (7) nicht beschränkt ist. Sonst ist $0 < \lim\limits_{\xi=\infty} \xi^{-1}\psi(\xi) < \infty$.

Daraus und aus Satz 1 folgt offenbar:

Satz 2. *Stets ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} = 0. \tag{18}$$

Sind aber r_1, r_2 *und eine Funktion* $f(x)$ *mit* $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = \infty$ *beliebig vorgegeben, so gibt es zwei Zahlen* α_1, α_2, *sodaß für die Form* (6) *gilt*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} f(x) = \infty .$$

Satz 3. *Dann und nur dann ist*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-3}} < \infty,$$

wenn die Folge $g_0, g_1, g_2, \ldots$ *aus* (7) *beschränkt ist.*

Als Gegenstück dazu folgt aus Hilfssatz 1 sofort

Satz 4.[10]) *Stets ist* $\liminf\limits_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-3}} > 0$. Da die Funktion $M_Q(x)$ nach Satz 4 größer als cx^{r-3} ist, so erscheint es natürlich zu fragen, wann es zu gegebenem Q eine Funktion χ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(E_1). Die Funktion $\chi(\xi) \,.\, \xi^{-r+3}$ ist stetig, positiv und nicht abnehmend für $\xi > 0$.

$$(E_2). \qquad 0 < \liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{\chi(x)} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{\chi(x)} < \infty.$$

Ist die Folge $g_0, g_1, \ldots$ beschränkt, so gibt es eine solche Funktion, nämlich $\chi(x) = x^{r-3}$, denn nach Satz 3, 4 ist in diesem Falle $M_Q(x) \sim x^{r-3}$. In jedem anderen Falle ist aber die Antwort negativ:

Satz 5. *Ist die Folge* $g_0, g_1, \ldots$ *nicht beschränkt, so gibt es keine Funktion* $\chi(\xi)$ *mit den Eigenschaften* (E_1), (E_2).

Beweis. Die Folge $g_0, g_1, \ldots$ sei nicht beschränkt und χ habe die Eigenschaften (E_1), (E_2). Mit $d_1, d_2, \ldots$ bezeichnen wir positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2$ und von der Gestalt der Funktion χ abhängen. Für $x > d_1$ ist nach (E_2)

$$d_2\, \chi(x) < F(x) < d_3\, \chi(x).$$

---

[10]) Die Rolle des Satzes 4 ist aber eine andere, als man hier glauben könnte. Wir werden nämlich im Hilfssatz 6 den Satz 4 (und noch etwas mehr) direkt beweisen und erst mit Hilfe dieses Satzes den Beweis der Hauptsätze erbringen.

Da die Folge $\frac{q_{v+1}}{q_v}$ $(v = 0, 1, \ldots)$ nicht beschränkt ist, so gibt es unendlichviele V mit

$$\frac{q_{V+1}}{q_V} = \operatorname*{Max}_{0 \leqq v \leqq V} \frac{q_{v+1}}{q_v}; \tag{19}$$

läßt man V durch diese Werte über alle Grenzen wachsen, so ist

$$\frac{q_{V+1}}{q_V} \to \infty. \tag{20}$$

Man nehme ein solches $V > d_4$ und setze zunächst $x = x_1 = q_{V+1}$. Dann enthält $\mathfrak{S}(V)$ das Glied q_V^{-2} (mit $m = n = 1$), sodaß

$$\chi(x_1) > d_5\, F(x_1) \geqq d_5\, x_1^{r-1}\, q_V^{-2}.$$

Zweitens setze man

$$x = x_2 = q_{V+1} \left(\frac{q_{V+1}}{q_V}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

Dann ist nach den beiden ersten Ungleichungen des Hfs. 2.

$$\sum_{v > V} \mathfrak{S}(v) < d_6 \sum_{v > V} q_v^{-2} < d_7\, q_{V+1}^{-2}.$$

$$\sum_{v \leqq V} \mathfrak{S}(v) < d_8 \sum_{v \leqq V} \left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right)^2 \frac{q_{v+1}^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}} < d_9 \left(\frac{q_{V+1}}{q_V}\right)^2 \frac{q_{V+1}^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}$$

(vgl. (19)). Also, nach (11),

$$\chi(x_2) < d_{10}\, F(x_2) < d_{11} x_2^{r-1} \left(\frac{1}{q_V^2}\left(\frac{q_{V+1}}{x}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{1}{q_{V+1}^2}\right)\right) = 2 d_{11}\, x_2^{r-1}\, q_{V+1}^{-2}.$$

Also

$$\frac{\chi(x_2)}{x_2^{r-3}} : \frac{\chi(x_1)}{x_1^{r-3}} < d_{12} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \left(\frac{q_{V+1}}{q_V}\right)^{-2} = d_{12} \left(\frac{q_{V+1}}{q_V}\right)^{-\frac{2}{5}}.$$

Hier ist die linke Seite $\geqq 1$ nach (E_1) (da $x_2 > x_1$), während die rechte Seite nach (20) für $V \to \infty$ gegen Null strebt — Widerspruch.

Bemerkung. Ersetzt man in (E_1) den Exponenten $-r+3$ durch $-r+1+z$, so wird der Satz falsch, da

$$F(x)\,.\,x^{-r+1+z} = \sum_{\substack{v \\ m/p_v \\ n/q_v}} \frac{1}{q_v^2\, m^{r_2-2}\, n^{r_1-2}} \operatorname{Min}\left(x^z, (q_{v+1}\, mn)^z\right)$$

nicht abnehmend und stetig ist (gleichmäßige Konvergenz auf jedem endlichen Intervall) und zugleich $M_Q(x) \sim F(x)$ ist.

Die Sätze 1, 2, 3 behandelten die „Maximalordnung" von $M_Q(x)$ (sie betreffen den „lim sup"). Wir wollen jetzt andererseits die „Minimalordnung" von M_Q, d. h. Sätze mit „lim inf", betrachten. Zunächst aber einige einfache Begriffsbildungen. Es sei

$$f_1(Q) = \limsup_{x=\infty} \frac{\log M_Q(x)}{\log x}, \quad f_2(Q) = \liminf_{x=\infty} \frac{\log M_Q(x)}{\log x};$$

d. h.: $f_1(Q)$ bzw. $f_2(Q)$ ist die untere Grenze aller reellen β, für welche

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^\beta} < \infty \text{ bzw. } \liminf \frac{M_Q(x)}{x^\beta} < \infty$$

ist. Analog sei

$$\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \limsup_{v=\infty} \frac{\log q_{v+1}}{\log q_v}, \quad \delta(\alpha_1, \alpha_2) = \liminf_{v=\infty} \frac{\log q_{v+1}}{\log q_v}.$$

Offenbar ist (man beachte $p_v \sim q_v$)

$$1 \leqq \delta(\alpha_1, \alpha_2) = \delta(\alpha_2, \alpha_1) \leqq \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma(\alpha_2, \alpha_1) \leqq \infty.$$

Nach Satz 2, 3, 4 ist

$$r - 3 \leqq f_2(Q) \leqq f_1(Q) \leqq r - 1 \tag{21}$$

und Satz 1 liefert sofort folgenden Satz, der freilich wesentlich schwächer als Satz 1 ist:

Satz 6.

$$f_1(Q) = r - 1 - \frac{2}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

Dabei ist $\frac{2}{\infty} = 0$ zu setzen; analog in ähnlichen Fällen. $f_1(Q)$ ist also durch die Angabe von r, $\gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ eindeutig bestimmt. Dagegen braucht $f_2(Q)$ nicht einmal durch die Angabe von $r_1, r_2, \gamma(\alpha_1, \alpha_2), \delta(\alpha_1, \alpha_2)$ eindeutig bestimmt zu sein, wie folgender Satz zeigt:

Satz 7. *Es seien $r_1, r_2, \gamma (1 < \gamma \leqq \infty)$ gegeben. Dann gibt es zwei Zahlen α_1, α_2 mit*

$$\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma, \tag{22}$$

sodaß für die Form (6) *die Gleichung $f_2(Q) = r - 3$ gilt und es gibt zwei andere Zahlen α_1, α_2 mit* (22), *sodaß für die Form* (6) *die Ungleichung $f_2(Q) > r - 3$ gilt.*

Vorbemerkung. Ist dagegen $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, so ist nach (21) und Satz 6 notwendig $f_2(Q) = r - 3$.

Beweis. 1. Man wähle $g_0, g_1, g_2, \ldots$ der Reihe nach so, daß alle $g_v = 1$ mit Ausnahme einer Teilfolge $g_{v_1}, g_{v_2}, \ldots$, die so gewählt wird, daß

$$q_{v_j-2} > q^5_{v_{j-1}}, \quad \lim_{j=\infty} \frac{\log q_{v_j}}{\log q_{v_j-1}} = \gamma.$$

Dann ist $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma$, $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 1$. Für $x = q_{v_j-2}$ ist

$$\sum_v \mathfrak{S}(v) = \sum_{v<v_{j-1}} + \sum_{v_{j-1} \leqq v < v_j-2} + \sum_{v \geqq v_j-2} = I + II + III$$

zur Abkürzung. In der ersten Summe ist $q_{v+1} \leqq q_{v_{j-1}} < x^{\frac{1}{5}}$, in der zweiten $q_{v+1} < cq_v$; nach Hilfssatz 2 ist also

$$I < c \sum_{v<v_{j-1}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{1}{q_v^2} < cx^{-2} \sum_v q_v^{-2} < cx^{-2};$$

$$II < c \sum_{v_{j-1} \leqq v < v_j-2} \left(\frac{q_v}{x}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{q_v^2} < cq^{\frac{1}{2}}_{v_j-3}\, x^{-\frac{5}{2}} < cx^{-2}$$

$$III < c \sum_{v \geqq v_j-2} q_v^{-2} < cq^{-2}_{v_j-2} = cx^{-2}.$$

Nach (11), (21) ist also $f_2(Q) = r - 3$.

2. Man wähle $g_0 = g_2 = g_4 = \ldots = 1$ und $g_1, g_3, g_5, \ldots$ so, daß

$$\lim_{v=\infty} \frac{\log q_{2v+1}}{\log q_{2v}} = \gamma;$$

also $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma$. Wird $\gamma'(= c)$ gewählt, daß $1 < \gamma' < \gamma$, so ist

$$2q_{2v+1} \geqq q_{2v+2} > q_{2v+1} > q_{2v}^{\gamma'} \text{ für } v > c.$$

Jedem $x > c$ ordne man ein ganzes V mit $q_{2V} \leqq x < q_{2V+2}$ zu. Dann enthält (vgl. (10)) $\mathfrak{S}(2V)$ das Glied (für $m = n = 1$)

$$\frac{1}{q_{2V}^2} \cdot \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{2V+1}}{x}\right)^z\right);$$

wegen $q_{2V+1} \geqq \frac{1}{2} q_{2V+2} > \frac{1}{2} x$ ist

$$\mathfrak{S}(2V) > cq_{2V}^{-2}. \tag{22}$$

Ebenso enthält $\mathfrak{S}(2V - 2)$ das Glied

$$\frac{1}{q_{2V-2}^2} \left(\frac{q_{2V-1}}{x}\right)^z;$$

wegen $q_{2V-1} \geqq \frac{1}{2} q_{2V}$, $q_{2V-2} < q_{2V}^{\frac{1}{\gamma'}}$ ist

$$\mathfrak{S}(2V-2) > c q_{2V}^{z-\frac{2}{\gamma'}} x^{-z}. \tag{23}$$

Ist

$$q_{2V} < \exp_x \left(\frac{z}{z+2-\frac{2}{\gamma'}} \right),$$

so ist nach (11), (22)

$$x^{-r+1} F(x) > c \exp_x \left(\frac{-2z}{z+2-\frac{2}{\gamma'}} \right);$$

ist aber

$$q_{2V} \geqq \exp_x \left(\frac{z}{z+2-\frac{2}{\gamma'}} \right),$$

so ist nach (11), (23)

$$x^{-r+1} F(x) > c \exp_x \left(\frac{z\left(z-\frac{2}{\gamma'}\right)}{z+2-\frac{2}{\gamma'}} - z \right) = c \exp_x \left(\frac{-2z}{z+2-\frac{2}{\gamma'}} \right).$$

Also

$$f_2(Q) \geqq r - 1 - \frac{2z}{z+2-\frac{2}{\gamma'}} > r - 3.$$

Nach Satz 7 erscheint es angemessen, folgende Definition einzuführen: sind $r_1, r_2, \gamma (1 \leqq \gamma \leqq \infty)$ gegeben, so sei $f_2(r_1, r_2, \gamma)$ die obere Grenze von $f_2(Q)$ für alle Formen (6) mit $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma$. Die Funktion $f_2(r_1, r_2, \gamma)$ (als Funktion von γ bei gegebenen r_1, r_2) zeigt einen merkwürdigen Verlauf, der jetzt untersucht werden soll. Im Rest dieses Paragraphen sei stets

$$d = 2 \text{ für } r_1 = r_2, \quad d = 1 \text{ für } |r_1 - r_2| = 1, \quad d = 0 \text{ für } |r_1 - r_2| > 1. \tag{24}$$

Satz 8. *Man setze*

$$X = \operatorname{Min} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+2}, \frac{2z}{z+2+\frac{d}{\gamma}} \right),$$

$$Y = \operatorname{Min} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \frac{2z}{2+\gamma}, \frac{2z}{z+2} \right).$$

$$Z = \text{Min}\left(\frac{2z}{z+2-\frac{2}{\gamma}}, \frac{z+2}{1+\gamma}\right).$$

Dann ist

$$f_2(r_1, r_2, \gamma) \leqq r - 1 - \text{Max}\left(2\frac{z-2}{z-\frac{2}{\gamma}}, \frac{2z}{z+2+\frac{d}{\gamma}}\right); \tag{25}$$

$$f_2(r_1, r_2, \gamma) \geqq r - 1 - \text{Max}\,(X, Y, Z). \tag{26}$$

Es gibt sogar zu jedem System r_1, r_2, γ $(1 \leqq \gamma \leqq \infty)$ *eine Form* (6) *mit*

$$\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma, \ f_2(Q) \geqq r - 1 - \text{Max}\,(X, Y, Z). \tag{26'}$$

Wir wollen die elementare Diskussion dieses Satzes nicht vollständig durchführen. Man bemerke zunächst nur folgendes: es ist $X < 2$, $Y < 2$ und für $\gamma > 1$ auch $Z < 2$; also:

Satz 9. *Für* $\gamma > 1$ *ist* $f_2(r_1, r_2, \gamma) > r - 3$. (Und freilich $f_2(r_1, r_2, 1) = r - 3$). Zweitens: für $\lambda < 2$ ist $\lambda(z - \lambda) < 2(z - 2)$; für $\gamma > 1$ ist also

$$2\frac{z-2}{z-\frac{2}{\gamma}} > \frac{2}{\gamma};$$

aus Satz 6 und (25) folgt also

Satz 10. *Für* $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) > 1$ *ist* $f_2(Q) < f_1(Q)$. (Für $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ ist freilich $f_2(Q) = f_1(Q) = r - 3$.)

Drittens: ist $\gamma > z + 1$, so ist

$$X = \frac{2z}{z+2+\frac{d}{\gamma}} > \frac{2z}{z+3} > \frac{z+2}{z+1} > Z. \quad X > \frac{2z}{z+3} > \frac{2z}{2+\gamma} \geqq Y,$$

also nach (26)

$$f_2(r_1, r_2, \gamma) \geqq r - 1 - \frac{2z}{z+2+\frac{d}{\gamma}};$$

der Vergleich mit (25) liefert

Satz 11. *Für* $\gamma > z + 1$ *ist* $f_2(r_1, r_2, \gamma) = r - 1 - \dfrac{2z}{z+2+\frac{d}{\gamma}}$. Also: während $f_1(Q)$ nach Satz 6 mit wachsendem γ wächst, so nimmt die Funktion $f_2(r_1, r_2, \gamma)$ ihren kleinsten Wert $r - 3$ genau für $\gamma = 1$ an, während sie für $\gamma > z + 1$ entweder stets ihrem größten Wert $r - 1 - \dfrac{2z}{z+2}$ *gleich* bleibt (für $|r_1 - r_2| > 1$) oder dem Grenzwert $r - 1 -$

$-\frac{2z}{z+2}$ *abnehmend* zustrebt (für $|r_1 - r_2| \leqq 1$). Daraus folgt insbesondere (wenn man schärfer (26′) statt (26) berücksichtigt):

Satz 12. *Zu jedem Wertepaar* r_1, r_2 *gibt es eine Form* (6) *mit*

$$f_2(Q) \geqq r - 1 - \frac{2z}{z+2}.$$

Satz 13. *Es seien* r_1, r_2 *gegeben,* $|r_1 - r_2| > 1$. *Dann ist für alle Formen* (6)

$$f_2(Q) \leqq r - 1 - \frac{2z}{z+2},$$

es gibt aber Formen (6) *mit*

$$f_2(Q) = r - 1 - \frac{2z}{z+2}.$$

Satz 11 läßt aber zwei wesentliche Verschärfungen zu. Erstens:

Satz 14. *Ist* $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$, *so ist*

$$f_2(Q) = r - 1 - \frac{2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)}}. \tag{27}$$

Ist dabei auch $|r_1 - r_2| \geqq 2$, *so ist sogar*

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{\exp_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+2}\right)} > 0. \tag{28}$$

Dieser Satz zeigt, daß $f_2(Q)$ doch (vgl. Satz 7!) in einigen Fällen durch die Angabe von $r_1, r_2, \delta(\alpha_1, \alpha_2), \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ eindeutig bestimmt ist, nämlich wenn $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$. In diesem Falle ist es sogar nicht notwendig, den genauen Wert von $\delta(\alpha_1, \alpha_2)$ zu kennen.

Zweitens: kennt man $f_2(Q)$, so weiß man nur, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{f_2(Q)+\varepsilon}} = 0, \qquad \liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{f_2(Q)-\varepsilon}} = \infty.$$

Für $|r_1 - r_2| \geqq 4$ und für $r_1 = r_2$ wollen wir nun zwei Sätze beweisen, welche sich, was ihre Schärfe betrifft, zu (27) ebenso verhalten, wie Satz 1 zu Satz 6.

Satz 15. *Es sei* $|r_1 - r_2| \geqq 4$. *Dann ist stets*

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1-\frac{2z}{z+2}}} < \infty; \tag{29}$$

ist $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$, *so ist sogar*

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1-\frac{2z}{z+2}}} < \infty. \tag{30}$$

Man vergleiche diesen Satz mit Satz 2!

Satz 16. *Es sei* $r_1 = r_2$. *Für* $\xi > 0$ *sei* $\xi^{-1}\varphi(\xi)$ *positiv, stetig und nicht abnehmend.* ψ *sei die zu* φ *inverse Funktion. Man definiere die Funktion* $\varrho(\eta)$ *dadurch, daß die Gleichung* $\xi^{z+2}\psi^2(\xi) = \eta^z$ *durch* $\xi = \varrho(\eta)$ *befriedigt wird. Dann gilt:*

1. *Ist*

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} > 0. \tag{31}$$

so ist

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} \varrho^2(x) < \infty. \tag{32}$$

2. *Ist*

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty \tag{33}$$

und $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$, *so ist*

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1}} \varrho^2(x) > 0. \tag{34}$$

Wir sollen also die Sätze 8, 14, 15, 16 beweisen; dabei dürfen und wollen wir bis zum Schluß dieses Paragraphen aus Symmetriegründen $r_1 \geqq r_2 = z$ voraussetzen.

Es sei erstens $1 \leqq \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma < \infty$, $0 < \varepsilon < 1$. Man stelle fest, daß

$$-z + 2 + \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \frac{z-2}{z - \frac{2}{\gamma}} ((z-2)(\gamma + \varepsilon) - 2 + \varepsilon) =$$

$$= -2 \frac{z-2}{z - \frac{2}{\gamma}} + \lambda(\varepsilon), \tag{35}$$

wo $\lambda(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Für jedes v ist $q_{v+1} < c(\varepsilon)\, q_v^{\gamma+\varepsilon}$. Es gibt unendlichviele $V > 1$ mit $q_V > q_{V-1}^{\gamma-\varepsilon}$. Für jedes derartige V definiere man $x = x(V)$ durch die Gleichung

$$q_V = \exp_x \left(\frac{z-2}{z - \frac{2}{\gamma}} \right). \tag{36}$$

Nach Hfs. 2 ist dann

$$\sum_{v \geqq V} \mathfrak{S}(v) < c \sum_{v \geqq V} q_v^{-2} < c q_V^{-2}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v<V} \mathfrak{S}(v) &< c(\varepsilon) \sum_{v<V} \frac{1}{q_v^{2-\varepsilon}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{z-2} \leqq \\ &\leqq c(\varepsilon) \sum_{v<V} q_v^{(\gamma+\varepsilon)(z-2)-2+\varepsilon} x^{-z+2} < \\ &< c(\varepsilon)\, q_{V-1}^{(\gamma+\varepsilon)(z-2)-2+\varepsilon} x^{-z+2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Nach (36), (37) ist

$$\sum_{v \geqq V} \mathfrak{S}(v) < c \exp_x \left(-2 \frac{z-2}{z - \frac{2}{\gamma}}\right); \tag{39}$$

nach $q_{V-1}^{\gamma-\varepsilon} < q_V$, (36), (38), (35) ist

$$\sum_{v<V} \mathfrak{S}(v) < c(\varepsilon) \exp_x \left(-2 \frac{z-2}{z - \frac{2}{\gamma}} + \lambda(\varepsilon)\right). \tag{40}$$

Weil ε beliebig klein gewählt werden darf, so folgt aus (11), (39), (40)

$$f_2(r_1, r_2, \gamma) \leqq r - 1 - 2 \frac{z-2}{z - \frac{2}{\gamma}} \quad \text{für } \gamma < \infty. \tag{41}$$

Es sei nun $0 < \varepsilon < 1$. Für beliebiges $x \geqq q_2$ und beliebiges ganzes $V > 1$ ist nach (11) und Hilfssatz 2, da $A(v, \varepsilon)$ mit wachsendem v nicht abnimmt,

$$\begin{aligned} x^{-r+1} F(x) &< c \sum_{v \geqq V} q_v^{-2} + \sum_{v<V} A(v, \varepsilon) \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^z < \\ &< c q_V^{-2} + c\, A(V-1, \varepsilon)\, q_V^z x^{-z}. \end{aligned} \tag{42}$$

Ist $r_1 - r_2 \geqq 2$, so setze man für jedes ganze $V > 1$

$$x = x(V) = q_V^{\frac{z+2}{z}};$$

wegen $A(V-1, \varepsilon) < c(\varepsilon) x^\varepsilon$ ist nach (42)

$$x^{-r+1} F(x) < c(\varepsilon)\, x^{-\frac{2z}{z+2}+\varepsilon}.$$

$$f_2(Q) \leqq r - 1 - \frac{2z}{z+2} \quad \text{für } r_1 - r_2 \geqq 2. \tag{43}$$

Für $r_1 - r_2 \geqq 4$ ist sogar $A(V-1, \varepsilon) < c$, also

$$\liminf_{x=\infty} \frac{F(x)}{x^{r-1-\frac{2z}{z+2}}} < \infty \text{ für } r_1 - r_2 \geqq 4. \tag{44}$$

Es sei nun $0 \leqq r_1 - r_2 < 2$; $1 \leqq \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma \leqq \infty$. Es sei $0 < < \gamma' < \gamma$, $\varepsilon > 0$. Es gibt unendlichviele V mit $q_V > q_{V-1}^{\gamma'}$; für jedes derartige V definiere man $x = x(V)$ durch

$$q_V = \exp_x \left(\frac{z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma'}} \right) \tag{45}$$

Für $x = x(V)$ ist nach (42), Hilfssatz 2 und wegen $q_{V-1} < x(V)$

$$x^{-r+1} F(x) < c(\varepsilon) \left(q_V^{-2} + q_{V-1}^{d} x^{\varepsilon} q_V^{z} x^{-z} \right). \tag{46}$$

Hier ist nach (45) und $q_{V-1}^{\gamma'} < q_V$

$$q_V^{-2} = \exp_x \left(\frac{-2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma'}} \right). \tag{47}$$

$$\begin{aligned} q_{V-1}^{d} q_V^{z} x^{-z+\varepsilon} &< \exp_x \left(-z + \varepsilon + \left(\frac{d}{\gamma'} + z \right) \frac{z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma'}} \right) = \\ &= \exp_x \left(\frac{-2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma'}} + \varepsilon \right). \end{aligned} \tag{48}$$

Da man ε beliebig klein und γ' beliebig nahe an γ wählen kann, so ist nach (46), (47), (48)

$$f_2(r_1, r_2, \gamma) \leqq r - 1 - \frac{2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma}} \text{ für } 0 \leqq r_1 - r_2 < 2. \tag{49}$$

Durch (41), (43), (44), (49) ist (25), (29) bewiesen.

Nun mögen φ, ψ, ϱ dieselbe Bedeutung wie im Satz 16 haben; es sei $r_1 = r_2$ und es gelte (31), sodaß es ein $a > 0$ und unendlichviele V mit

$$q_V > a\, \varphi(q_{V-1}), \ q_{V-1} < \psi(a^{-1} q_V) \leqq \operatorname{Max}(1, a^{-1})\, \psi(q_V)$$

gibt. Jedem solchen hinreichend großen V ordne man $x = x(V)$ durch die Gleichung

$$q_V^{z+2} \psi^2(q_V) = x^z, \text{ also } q_V = \varrho(x)$$

zu. Nach (11) und Hfs. 2 ist

$$x^{-r+1}F(x) < \sum_{r \geq V} c\, q_r^{-2} + \sum_{r < V} c q_r^2 q_{r+1}^z x^{-z} < c q_V^{-2} + c q_{V-1}^2 q_V^z x^{-z}.$$

Hierin ist

$$q_V^{-2} \doteq \varrho^{-2}(x).\quad q_{V-1}^2 \left(\frac{q_V}{x}\right)^z < c(a)\, \psi^2(q_V) \frac{q_V^{z+2}}{x^z} q_V^{-2} = c(a)\, q_V^{-2} = c(a)\, \varrho^{-2}(x).$$

Also gilt (32).

Es handelt sich nun um die Abschätzungen nach unten in den Sätzen 8. 14. 15. 16.

Hilfssatz 3. *Für* $q_w p_{w-1} q_{w-1} \leqq x < q_{w+1}$ *ist*

$$F(x) > c x^{r-1}\left(q_w^{-2} + q_{w-1}^{d}\left(\frac{q_w}{x}\right)^z\right);$$

für $q_w p_{w-1} \leqq x < q_w p_{w-1} q_{w-1}$ *ist*

$$F(x) > c x^{r-1}\left(q_w^{-2} + \left(\frac{q_w}{x}\right)^z\right);$$

für $q_w \leqq x < q_w p_{w-1}$ *ist*

$$F(x) > c x^{r-1}\left(q_w^{-2} + q_{w-1}^{-2}\left(\frac{q_w}{x}\right)^z\right).$$

Beweis. Wird $r_1 - r_2 = \sigma(\sigma \geqq 0)$ gesetzt, so ist

$$\mathfrak{S}(w-1) = \frac{1}{q_{w-1}^2} \sum_{\substack{m/p_{w-1} \\ n/q_{w-1}}} \frac{1}{m^{z-2}\, n^{z+\sigma-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_w\; mn}{x}\right)^z\right),$$

(vgl. (10)). Im ersten Falle enthält $\mathfrak{S}(w-1)$ das Glied $q_w^z x^{-z} p_{w-1}^2 q_{w-1}^{-\sigma}$ (für $m = p_{w-1}$, $n = q_{w-1}$) und auch das Glied $q_w^z x^{-z} p_{w-1}^2 q_{w-1}^{-2}$ (für $m = p_{w-1}$, $n = 1$); im zweiten Falle enthält $\mathfrak{S}(w-1)$ das Glied $q_w^z x^{-z} p_{w-1}^2 q_{w-1}^{-2}$ (für $m = p_{w-1}$, $n = 1$) und im dritten Falle das Glied $q_w^z x^{-z} q_{w-1}^{-2}$ (für $m = n = 1$). Weiter enthält $\mathfrak{S}(w)$ stets (für $m = n = 1$) das Glied q_w^{-2} (vgl. (10)). Daraus und aus (11) folgt wegen $p_{w-1} \sim q_{w-1}$ die Behauptung.

Es seien nun $r_1, r_2, \gamma (1 \leqq \gamma \leqq \infty)$ gegeben. Ist $\gamma < \infty$, so setze man $\gamma_v = \gamma$; ist $\gamma = \infty$. so setze man $\gamma_v = v$. Man wähle α_1, α_2 so, daß es zwei Zahlen $a > 0$, $b > 0$ mit

$$a < \frac{q_v}{q_{v-1}^{\gamma_v}} < b \quad (v = 1, 2, \ldots) \tag{50}$$

gibt (also $a = c$, $b = c$). Man definiere X_w, Y_w, Z_w genau so wie X, Y, Z im Satz 8, nur mit γ_w statt γ.

I. Ich behaupte nun:

$$F(x) > cx^{r-1-X_w} \text{ für } q_w p_{w-1} q_{w-1} \leqq x < q_{w+1}. \tag{51}$$

Hier ist nach (50)

$$x > c q_w^{1+\frac{2}{\gamma_w}}$$

und Hfs. 3 ergibt

$$F(x) > cx^{r-1} q_w^{-2} > c \exp_x \left(r - 1 - \frac{2\gamma_w}{2+\gamma_w}\right).$$

Weiter: ist

$$q_w > \exp_x \left(\frac{z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma_w}}\right),$$

so ist nach Hfs. 3 und (50)

$$F(x) > cx^{r-1-z} q_w^z q_{w-1}^d > c \exp_x \left(r - 1 - \frac{2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma_w}}\right);$$

ist aber

$$q_w \leqq \exp_x \left(\frac{z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma_w}}\right),$$

so ist ebenso

$$F(x) > cx^{r-1} q_w^{-2} > c \exp_x \left(r - 1 - \frac{2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma_w}}\right).$$

Damit ist (51) bewiesen.

II. Ich behaupte zweitens:

$$F(x) > cx^{r-1-Y_w} \text{ für } q_w p_{w-1} \leqq x < q_w p_{w-1} q_{w-1}. \tag{52}$$

Hier ist nämlich nach (50)

$$c \exp_x \left(\frac{\gamma_w}{2+\gamma_w}\right) < q_w < c \exp_x \left(\frac{\gamma_w}{1+\gamma_w}\right),$$

also nach Hfs. 3

$$F(x) > cx^{r-1} q_w^{-2} > c \exp_x \left(r - 1 - \frac{2\gamma_w}{1+\gamma_w}\right),$$

$$F(x) > cx^{r-1-z} q_w^z > c \exp_x \left(r - 1 - \frac{2z}{2+\gamma_w}\right).$$

Für $q_w > \exp_x\left(\frac{z}{z+2}\right)$ ist weiter

$$F(x) > cx^{r-1-z}\, q_w^z > c\exp_x\left(r-1-\frac{2z}{z+2}\right)$$

und für $q_w \leqq \exp_x\left(\frac{z}{z+2}\right)$ ist ebenso

$$F(x) > cx^{r-1} q_w^{-2} > c\exp_x\left(r-1-\frac{2z}{z+2}\right).$$

Damit ist aber (52) bewiesen.

III. Drittens behaupte ich:

$$F(x) > cx^{r-1-Z_w} \text{ für } q_w \leqq x < q_w p_{w-1}. \tag{53}$$

Hier ist nämlich nach (50)

$$q_w > c\exp_x\left(\frac{\gamma_w}{1+\gamma_w}\right),$$

also nach Hfs. 3 und (50)

$$F(x) > cx^{r-1-z} q_w^z q_{w-1}^{-2} >$$
$$> c\exp_x\left(r-1-z+\left(z-\frac{2}{\gamma_w}\right)\frac{\gamma_w}{1+\gamma_w}\right) = c\exp_x\left(r-1-\frac{z+2}{1+\gamma_w}\right);$$

für

$$q_w > \exp_x\left(\frac{z}{z+2-\frac{2}{\gamma_w}}\right)$$

ist

$$F(x) > cx^{r-1-z} q_w^z q_{w-1}^{-2} > c\exp_x\left(r-1-\frac{2z}{z+2-\frac{2}{\gamma_w}}\right).$$

für

$$q_w \leqq \exp_x\left(\frac{z}{z+2-\frac{2}{\gamma_w}}\right)$$

ist ebenso

$$F(x) > cx^{r-1} q_w^{-2} > c\exp_x\left(r-1-\frac{2z}{z+2-\frac{2}{\gamma_w}}\right).$$

Damit ist (53) bewiesen.

Aus (51), (52), (53) folgt

$$F(x) > c\,\mathrm{exp}_x\,(r - 1 - \mathrm{Max}\,(X_w, Y_w, Z_w)) \text{ für } q_w \leqq x < q_{w+1}. \quad (54)$$

Da $X_w \to X$, $Y_w \to Y$, $Z_w \to Z$ für $w \to \infty$, d. h. für $x \to \infty$, so folgt (26′) aus (54).

Damit ist schon Satz 8, also auch die Sätze 9 bis 13, vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4. *Ist* $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$, *so ist*

$$F(x) > c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+4}\right) > c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+2}\right)$$

$$\textit{für } q_w \leqq x < q_w q_{w-1} p_{w-1},\ w > c.$$

Beweis. Für hinreichend große w ist $q_{w-1} < q_w^{\frac{1}{z+2}}$, $p_{w-1} < q_w^{\frac{1}{z+2}}$. Für $q_w \leqq x < q_w p_{w-1}$ ist daher $x < q_w^{\frac{z+3}{z+2}}$, also nach Hfs. 3

$$F(x) > c x^{r-1-z} q_w^z q_{w-1}^{-2} > c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{z+2}{z+3}\right) >$$

$$> c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+4}\right).$$

Für $q_w p_{w-1} \leqq x < q_w p_{w-1} q_{w-1}$ ist $x < q_w^{\frac{z+4}{z+2}}$, also nach Hfs. 3

$$F(x) > c x^{r-1-z} q_w^z > c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+4}\right),$$

womit Hfs. 4 bewiesen ist.

Nun sei $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$ (also umsomehr $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$), $r_1 - r_2 \geqq 2$. Ist $q_w p_{w-1} q_{w-1} \leqq x < q_{w+1}$, so ist nach Hfs. 3 für $q_w \leqq \mathrm{exp}_x\left(\frac{z}{z+2}\right)$

$$F(x) > c x^{r-1} q_w^{-2} > c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+2}\right)$$

und für $q_w > \mathrm{exp}_x\left(\frac{z}{z+2}\right)$ ebenso

$$F(x) > c x^{r-1-z} q_w^z > c\,\mathrm{exp}_x\left(r - 1 - \frac{2z}{z+2}\right).$$

Daher und aus Hfs. 4 folgt aber

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_Q(x)}{x^{r-1-\frac{2z}{z+2}}} > 0;$$

das gibt also (28), (30) und zusammen mit dem bereits bewiesenen Satz 11 auch (27) für $|r_1 - r_2| > 1$.

Es sei wieder $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$, aber $0 \leqq r_1 - r_2 < 2$. φ und ψ mögen dieselbe Bedeutung wie im Satz 16 haben; $\varrho(\eta)$ sei dadurch definiert, daß die Gleichung $\xi^{z+2}\psi^d(\xi) = \eta^z$ durch $\xi = \varrho(\eta)$ befriedigt wird. Da $\xi^{-1}\psi(\xi)$ für $\xi \geqq 1$ beschränkt ist, so gibt es ein $b > 0$, sodaß $\psi(\xi) < b\xi$, also $\xi^{z+2+d} b^d > \xi^{z+2}\psi^d(\xi)$ für $\xi \geqq 1$; für hinreichend große η ist also

$$(\varrho(\eta))^{z+2+d} b^d > \eta^z, \quad \varrho(\eta) > c(b)\,\eta^{\frac{z}{z+4}}. \tag{55}$$

Man setze nun voraus, daß

$$\limsup_{v=\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty. \tag{56}$$

sodaß es ein $a > 0$ mit

$$q_{v+1} < a\,\varphi(q_v) \quad (v = 0, 1, \ldots) \tag{57}$$

gibt. Ist $q_w \leqq x < q_w q_{w-1} p_{w-1}$, so ist für $w > c(b)$ nach (55) und Hfs. 4

$$F(x) > c x^{r-1-\frac{2z}{z+4}} > c(b)\, x^{r-1}\, \varrho^{-2}(x). \tag{58}$$

Ist aber $q_w q_{w-1} p_{w-1} \leqq x < q_{w+1}$, so gilt nach Hfs. 3:

Ist $\varrho(x) \geqq q_w$, so ist

$$F(x) > c x^{r-1} q_w^{-2} \geqq c x^{r-1} \varrho^{-2}(x);$$

ist aber $\varrho(x) < q_w$, so setze man $\varrho(x) = y$; also $y < q_w$, $y^{z+2}\psi^d(y) = x^z$, also nach (57)

$$\begin{aligned} F(x) &> c x^{r-1} q_{w-1}^d q_w^z x^{-z} > c x^{r-1-z} \psi^d(a^{-1} q_w)\, q_w^z \geqq \\ &\geqq c x^{r-1} \operatorname{Min}(1, a^{-d}) \frac{\psi^d(q_w)\, q_w^z}{y^z \psi^d(y)} \cdot \frac{1}{y^2} > \\ &> c(a)\, x^{r-1} y^{-2} = c(a)\, x^{r-1} \varrho^{-2}(x). \end{aligned}$$

In Verbindung mit (58) bekommt man also für alle hinreichend großen x

$$F(x) > c(a, b)\, x^{r-1} \varrho^{-2}(x). \tag{59}$$

Aus (59) folgt erstens (für $r_1 = r_2$, $d = 2$) der zweite Teil des Satzes 16.

Zweitens: es sei $0 \leqq r_1 - r_2 < 2$, $\delta(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$, also umsomehr $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) > z + 2$. Ist $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) < \infty$ und wählt man γ' so, daß $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) < \gamma' < \infty$, so gilt (56) mit $\varphi(\xi) = \xi^{\gamma'}$; es ist dann $\psi(\xi) = \xi^{\frac{1}{\gamma'}}$, $\varrho(\eta) =$

$= \eta^{\frac{z}{z+2+\frac{d}{\gamma'}}}$. Aus (59) folgt dann (da γ' beliebig nahe an $\gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ gewählt werden darf)

$$f_2(Q) \geqq r - 1 - \frac{2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)}}. \tag{60}$$

Ist $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \infty$, so wähle man $\varphi(\xi)$ so, daß (56) gilt (das geht, vgl. die Bemerkungen nach dem Beweis des Satzes 1). Wegen $\psi(\xi) \to \infty$ ist für hinreichend große η, wenn $\xi = \varrho(\eta)$ gesetzt wird, $\xi^{z+2} < \xi^{z+2}\,\psi^d(\xi) = \eta^z$, also $\varrho(\eta) < \eta^{\frac{z}{z+2}}$. Aus (59) folgt dann $f_2(Q) \geqq r - 1 - \frac{2z}{z+2}$, so daß (60) auch für $\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \infty$ gilt. Aus (60) und dem bereits bewiesenen Satz 11 folgt aber (27) auch für $|r_1 - r_2| < 2$. Damit sind die Sätze 1 bis 16 vollständig bewiesen. Einige Kleinigkeiten könnten übrigens, wie aus den Beweisen hervorgeht, noch etwas verschärft werden.

Ich möchte noch anführen, welche von den Sätzen 1 bis 16 bekannt und welche neu sind. In der l. c.[8]) angeführten Abhandlung habe ich die Funktion

$$R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\,\mathsf{P}_Q(y)\,|\,dy$$

untersucht, und zwar auf folgende Weise: ich habe erstens eine obere Abschätzung für $|\,\mathsf{P}_Q(x)\,|$ bewiesen (Hauptsatz 1) und daraus ganz einfach eine obere Abschätzung für $R_Q(x)$ hergeleitet (Hauptsatz 2); ebensogut hätte ich aber damals eine Abschätzung für $M_Q(x)$ ableiten können. Weiter habe ich dort eine untere Abschätzung für $R_Q(x)$ bewiesen (Hauptsatz 3), aus welcher wegen

$$(x\,R_Q(x))^2 \leqq \int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy \int_0^x dy = x\,M_Q(x)$$

sofort eine untere Abschätzung von $M_Q(x)$ folgt. Obwohl also die Resultate jener Abhandlung für $R_Q(x)$ formuliert sind, kann man sagen, daß jene Abhandlung auch Resultate über $M_Q(x)$ enthält. In diesem Sinne sind folgende Sätze der vorliegenden Arbeit in den Resultaten der l. c.[8]) zitierten Arbeit enthalten: Satz 2, Satz 4, Satz 6, die Ungleichung

$$f_2(r_1, r_2, \gamma) \leqq r - 1 - 2\,\frac{z - 2}{z - \frac{2}{\gamma}}$$

aus Satz 8, Satz 10 und Satz 12. Die übrigen Sätze der vorliegenden Abhandlung sind meines Wissens neu; insbesondere war bisher der genaue Wert von $f_2(r_1, r_2, \gamma)$ für keine Werte von r_1, r_2, γ bekannt, mit Ausnahme von $f_2(r_1, r_2, 1) = r - 3$.

§ 2. Vorbereitende Hilfssätze.

In diesem Paragraphen bringen wir einige teils bekannte, teils leichte Hilfssätze.

Hilfssatz 5. *Es sei* $\lambda \geqq 1$:

$$B(v, m, n) = \frac{\log\left(2\frac{p_v}{m}n\right)}{q_v^2 n^{r_1-4} m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right);$$

$$C(v, m, n) = \frac{\log\left(2\frac{p_v}{m}n\right)}{q_v^2 n^{r_1+\frac{1}{2}r_2-5} m^{\frac{1}{2}r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}}\right);$$

$$D(v, m, n) = \frac{1}{q_v^2 n^{\frac{1}{2}r_1-2} m^{\frac{1}{2}r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\right);$$

$$G(x) = x^{r-2}\sum_{v,m,n} B(v, m, n);\quad H(x) = x^{r-2}\sum_{v,m,n} C(v, m, n);$$

$$K(x) = x^{r-1-\frac{z}{4}}\sum_{v,m,n} D(v, m, n)\,.$$

Dabei wird über alle v, m, n *mit* $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v *summiert. Behauptungen:*

$$G(x) + H(x) < 3\lambda x^{r-3} + \frac{c_{50}}{\lambda} F(x) \text{ für } x > c_{51}; \tag{61}$$

$$K(x) \leqq x^{-\frac{z+2}{16z}} F(x) \text{ für } x > c_{52}.\text{[11]} \tag{62}$$

Beweis. Man setze

$$A(v, m, n) = \frac{1}{q_v^2 n^{r_1-2} m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}mn}{x}\right)^{z}\right).$$

[11]) Zur leichteren Orientierung werden die c, die im Hilfssatz n eingeführt werden, mit den Indizes $10n$, $10n+1, \ldots$ versehen. Allerdings versagt das im Hfs. 24, da im Hfs. 23 zu viele numerierte c vorkommen.

1. Die bekannte Ungleichung

$$\left(\sum_j |\xi_j \eta_j|\right)^2 \leqq \sum_j |\xi_j|^2 \cdot \sum_j |\eta_j|^2 \tag{63}$$

gibt

$$\left(\sum_{v,m,n} B(v, m, n)\right)^2 \leqq \sum_{v,m,n} A(v, m, n) \cdot \sum_{v,m,n} \frac{\log^2\left(2 \frac{p_v}{m} n\right)}{q_v^2 n^{r_1-6} m^{r_2-2}} < x^{-r+1} F(x) \cdot c. \tag{64}$$

denn das allgemeine Glied der letzten Summe ist $(p_v \sim q_v)$

$$< c \left(\frac{q_v}{m} n\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{q_v^2 m^4} \text{ und } \sum_{n/q_v} n^{\frac{1}{4}} q_v^{-\frac{1}{4}} < c q_v^{-\frac{1}{2}}.$$

Also ist

$$\sum_{v,m,n} B(v, m, n) < \frac{\lambda}{x} + \frac{c}{\lambda} x^{-r+2} F(x); \tag{65}$$

denn: ist $\sum\limits_{v,m,n} B(v, m, n) \geqq \lambda x^{-1}$, so ist nach (64)

$$\lambda x^{-1} \sum_{v,m,n} B(v, m, n) < c x^{-r+1} F(x).$$

2. Es sei $\mathfrak{M}_1$ die Menge aller Systeme v, m, n mit

$$p_v > 0,\ q_v < x^{\frac{1}{12}},\ m/p_v,\ n/q_v, \tag{66}$$

für welche

$$C(v, m, n) > x^{-\frac{11}{10}}$$

ist; $\mathfrak{M}_2$ sei die Menge der übrigen Systeme v, m, n mit (66); endlich sei $\mathfrak{M}_3$ die Menge aller Systeme v, m, n mit

$$p_v > 0,\ q_v \geqq x^{\frac{1}{12}},\ m/p_v,\ n/q_v.$$

Es ist erstens für $x > c$

$$\sum_{\mathfrak{M}_3} C(v, m, n) < c \sum_{q_v \geqq x^{\frac{1}{12}}} q_v^{-2+\frac{1}{4}} < c x^{-\frac{13}{12}} < \frac{\lambda}{2} x^{-1}. \tag{67}$$

Zweitens:
da die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}_2$ kleiner als $c x^{\frac{1}{20}}$ ist, so ist

$$\sum_{\mathfrak{M}_2} C(v, m, n) < c x^{-1-\frac{1}{20}} < \tfrac{1}{2} \lambda x^{-1} \tag{68}$$

für $x > c$. Ist endlich $(v, m, n) \in \mathfrak{M}_1$, so ist (wegen $r_2 \geqq z \geqq 6$) für $x > c$

$$x^{-\frac{11}{8}} < c\left(\frac{q_v n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{m^2}{q_v^2 n^{r_1-5}} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}} < c\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}}.$$

$$q_{v+1} > cx^{1-\frac{11}{5z}} > x^{\frac{7}{12}}.$$

Definiert man also v_0 durch die Bedingung $q_{v_0} \leqq x^{\frac{7}{12}} < q_{v_0+1}$, so ist $v = v_0$ für jedes System $(v, m, n) \in \mathfrak{M}_1$, wenn $x > c$. Also nach (63) und wegen $p_v \sim q_v$

$$\left(\sum_{\mathfrak{M}_1} C(v, m. n)\right)^2 \leqq \left(\sum_{\substack{m/p_{v_0} \\ n/q_{v_0}}} C(v_0, m. n)\right)^2 < \tag{69}$$
$$< c \sum_{m,n} A(v_0, m. n) \sum_{m,n} \left(\frac{p_{v_0} n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{m^2}{p_{v_0}^2 n^{r_1+r_2-8}} < cx^{-r+1} F(x),$$

denn

$$\sum_{m/p_{v_0}} \left(\frac{m}{p_{v_0}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sum_{d/p_{v_0}} d^{-\frac{3}{2}} < c.$$

Also ist für $x > c$

$$\sum_{\mathfrak{M}_1} C(v, m. n) < \frac{\lambda}{x} + \frac{c}{\lambda} x^{-r+2} F(x); \tag{70}$$

denn aus $\sum\limits_{\mathfrak{M}_1} C(v, m, n) \geqq \lambda x^{-1}$ folgt nach (69)

$$\lambda x^{-1} \sum_{\mathfrak{M}_1} C(v, m, n) < cx^{-r+1} F(x).$$

Aus (65), (67), (68), (70) folgt aber (61).

3. Die Höldersche Ungleichung

$$\sum_j |\xi_j \eta_j| \leqq \left(\sum_j |\xi_j|^{\frac{2z}{z-2}}\right)^{\frac{z-2}{2z}} \left(\sum_j |\eta_j|^{\frac{2z}{z+2}}\right)^{\frac{z+2}{2z}}$$

liefert (Summationsbereich: $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v)

$$\sum_{v,m,n} D(v, m. n) \leqq \left(\sum_{v,m,n} A(v, m, n)\right)^{\frac{z-2}{2z}} \left(\sum_{v,m,n} \frac{n^{2-\frac{2r_1}{z+2}} m^{2-\frac{2r_2}{z+2}}}{q_v^2}\right)^{\frac{z+2}{2z}} < \tag{71}$$
$$< c\,(x^{-r+1} F(x))^{\frac{z-2}{2z}};$$

denn

$$\frac{r_j}{z+2} \geqq \frac{z}{z+2} \geqq \frac{3}{4} \; (j = 1, 2). \quad \sum_{r,m,n} m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} q^{-2} < c \sum_{r} q_r^{-\frac{1}{2}} < c.$$

Wäre

$$K(x) = x^{r-1-\frac{z}{4}} \sum_{r,m,n} D(r, m, n) > F(x)\, x^{-\frac{z+2}{16z}}, \tag{72}$$

so wäre nach (71)

$$(F(x))^{\frac{z+2}{2z}} < c \exp_x \left((r-1) \frac{z+2}{2z} - \frac{z}{4} + \frac{z+2}{16z} \right).$$

Aber $\frac{z^2}{2z+4} \geqq \frac{36}{16} = 2 + \frac{1}{4}$; also wäre

$$F(x) < c \exp_x (r - 3 - \tfrac{1}{8});$$

das ist aber nach Hilfssatz 1 für $x > c$ falsch; also gilt (72) für $x > c$ nicht, woraus (62) folgt.

Hilfssatz 6. *Es sei* $0 \leqq \mu < 1$. *Dann ist*

$$M_Q(x) - M_Q(\mu x) > c_{60}(\mu) x^{r-3} \; \textit{für} \; x > c_{61}(\mu).$$

Beweis: Für $x > c$ gibt es bekanntlich zwei ganze positive Zahlen a, b mit

$$\left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\alpha_2}{3bx}, \quad 0 < b \leqq \frac{3x}{\alpha_2}. \tag{73}$$

Man setze

$$Q_1(u) = \alpha_1 \left((u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \frac{a}{b} (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \right). \tag{74}$$

Es sei nun m ganz, $0 < m + 1 \leqq \frac{bx}{\alpha_1}$; ist

$$\frac{\alpha_1 (m + \frac{1}{3})}{b} < Q(u) < \frac{\alpha_1 (m + \frac{2}{3})}{b}, \tag{75}$$

so ist $Q(u) < x$, also nach (74), (73)

$$| Q(u) - Q_1(u) | = \left| \alpha_2 - \alpha_1 \frac{a}{b} \right| (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq$$

$$\leqq \alpha_1 \cdot \frac{\alpha_2}{3bx} \cdot \frac{1}{\alpha_2} Q(u) < \frac{\alpha_1}{3b}.$$

also nach (75)

$$\frac{\alpha_1 m}{b} < Q_1(u) < \frac{\alpha_1 (m+1)}{b}. \tag{76}$$

Für jeden Gitterpunkt $(u_1, \ldots, u_r)$ ist aber $Q_1(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\alpha_1 b^{-1}$. Es gibt daher nach (76) keinen Gitterpunkt mit (75). Daher ist im Intervall

$$\frac{\alpha_1 (m + \frac{1}{3})}{b} < y < \frac{\alpha_1 (m + \frac{2}{3})}{b} \tag{77}$$

$A_Q(y)$ konstant, also

$$-\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}_Q(y)}{\mathrm{d}y} = \Gamma_Q \frac{\mathrm{d}y^{\frac{r}{2}}}{\mathrm{d}y} > c_{62}\left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen y des Intervalls (77), für welche

$$|\,\mathsf{P}_Q(y)\,| < \frac{\alpha_1}{12b}\, c_{62}\left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

ist, füllen höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens gleich $\frac{\alpha_1}{6b}$, also höchstens der Hälfte der Länge des Intervalls (77) ist. Daher ist

$$\int\limits_{\frac{\alpha_1 m}{b}}^{\frac{\alpha_1(m+1)}{b}} \mathsf{P}_Q^2(y)\,\mathrm{d}y \geqq \frac{\alpha_1}{6b}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{12b}c_{62}\right)^2\left(\frac{m}{b}\right)^{r-2}.$$

$$\int\limits_{\mu x}^{x} \mathsf{P}_Q^2(y)\,\mathrm{d}y \geqq c b^{-r-1}\sum m^{r-2}$$

mit dem Summationsbereich $\frac{\alpha_1 m}{b} \geqq \mu x$, $\frac{\alpha_1 (m+1)}{b} \leqq x$; also

$$M_Q(x) - M_Q(\mu x) = \int\limits_{\mu x}^{x} \mathsf{P}_Q^2(y)\,\mathrm{d}y > c(\mu)\, x^{r-1} b^{-2} > c(\mu)\, x^{r-3} \text{ für } x > c(\mu).$$

* * *

Es sei nun s eine komplexe Veränderliche, $\Re s > 0$. Man setze stets

$$\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}. \tag{78}$$

Hilfssatz 7. *Ist* $\{h, k\} = 1$, $k > 0$,[12]) *so ist*

$$\Theta(s) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{s - 2\pi i \frac{h}{k}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(h, k, m) \exp\left(\frac{-\pi^2 m^2}{k^2\left(s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)}\right) \tag{79}$$

wo

$$S(h, k, m) = \sum_{a=1}^{k} \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} a^2 - \frac{2\pi i}{k} am\right).$$

Beweis. Wird $s = s' + 2\pi i \frac{h}{k}$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned}\Theta(s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-m^2 s' - 2\pi i m^2 \frac{h}{k}\right) = \\ &= \sum_{a=1}^{k} \exp\left(-2\pi i a^2 \frac{h}{k}\right) \sum_{b=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{a}{k} + b\right)^2 k^2 s'\right).\end{aligned} \tag{80}$$

Nun gilt folgende Transformationsformel[13])

$$\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi (m + \xi)^2 s + 2\pi i m \eta\right) = \\ &= s^{-\frac{1}{2}} \exp(-2\pi i \xi \eta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi (m + \eta)^2 s^{-1} - 2\pi i m \xi\right).\end{aligned}$$

Indem man diese Formel mit $\frac{k^2 s'}{\pi}$, $\frac{a}{k}$, 0 statt s, ξ, η in (80) benutzt, folgt die Behauptung.

Hilfssatz 8. *Ist* $\{h, k\} = 1$, $k > 0$, *so ist*

$$|S(h, k, m)| \leqq \sqrt{2k}, \quad |S(h, k, 0)| = \sqrt{k} \text{ für } k \equiv 1 \pmod 2,$$
$$|S(h, k, 0)| = \sqrt{2k} \text{ für } k \equiv 0 \pmod 4.$$

Beweis.

$$|S(h, k, m)|^2 = \sum_{a=1}^{k} \sum_{b} \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k}(a^2 - b^2) - 2\pi i \frac{m}{k}(a - b)\right),$$

wo b für festes a über ein beliebiges vollständiges Restsystem (mod k) läuft. Wird $b = a + l$ gesetzt, so ist

---

[12]) h darf auch Null sein.

[13]) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (1903), S. 108.

$$|S(h, k, m)|^2 = \sum_{l=1}^{k} \sum_{a=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{h}{k}(2la + l^2) + 2\pi i \frac{lm}{k}\right).$$

Hier ist die innere Summe gleich Null, außer wenn $k/2l$; dann ist sie gleich $k \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{k}(hl^2 + ml)\right)$. Daraus folgen aber die Behauptungen.

Man setze nun stets, bis zum Schluß dieser Abhandlung,

$$T(s) = \Theta^{r_1}(\lambda_1 s)\, \Theta^{r_2}(\lambda_2 s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\lambda_1^{\frac{1}{2}r_1} \lambda_2^{\frac{1}{2}r_2} s^{\frac{r}{2}}}. \tag{81}$$

Hilfssatz 9. *Bei geradlinigen Integrationswegen ist*

$$M_Q(x) - M_Q(\mu x) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int\limits_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{T(s)}{s} \frac{T(s')}{s'} \cdot \frac{e^{x(s+s')} - e^{\mu x(s+s')}}{s+s'} \, ds \, ds'. \tag{82}$$

Beweis. Bekanntlich ist für $y \geq 0$, $a > 0$

$$M_Q(y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{T(s)}{s} \frac{T(s')}{s'} \frac{e^{y(s+s')} - 1}{s+s'} \, ds \, ds'. \tag{83}$$

Den Beweis dieser Formel findet man bei V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, Math. Zeitschr. **33** (1931), 62—84, Formel (12) oder bei A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden VII, Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi 5 (1938), 1—67, Hilfssatz 1. In beiden Beweisen wird $a = \frac{1}{y}$ vorausgesetzt (und bei Walfisz werden auch etwas andere Bedingungen der Form Q auferlegt), der Beweis funktioniert aber bei jedem $a > 0$. Setzt man in (83) einmal $a = \frac{1}{x}$, $y = x$, das anderemal $a = \frac{1}{x}$, $y = \mu x$ und subtrahiert, so folgt (82).

* * *

Auf die reelle Achse lege man nun alle zur Zahl $\sqrt{x}$ gehörigen Fareypunkte (oder Fareybrüche), d. h. alle Zahlen $\frac{h}{k}$ mit

$$h \gtreqless 0,\ 0 < k \leq \sqrt{x},\ \{h, k\} = 1. \tag{84}$$

Wenn im Folgenden zwei Zahlen mit h, k (eventuell mit gewissen, aber denselben Indizes, wie h_1, k_1 oder h'_2, k'_2 u. desgl.) bezeichnet werden, so wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß (84) gilt. Zwei verschiedene Fareypunkte heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt liegt. Sind $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ die dem Fareypunkt $\frac{h}{k}$ benachbarten Fareypunkte, $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$, so wird im folgenden stets mit $\mathfrak{B}(h, k)$ das abgeschlossene Intervall $\left\langle \frac{h + h_1}{k + k_1}, \frac{h + h_2}{k + k_2} \right\rangle$ bezeichnet. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}(h, k) = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}} \right\rangle, \ \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta_1 \leqq 1, \ \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta_2 \leqq 1.$$

Die Intervalle $\mathfrak{B}(h, k)$ überdecken die ganze reelle Achse und je zwei von ihnen haben höchstens einen Punkt gemein. Insbesondere ist $\mathfrak{B}(0, 1) = \left\langle -\frac{1}{[\sqrt{x}] + 1}, \frac{1}{[\sqrt{x}] + 1} \right\rangle$. Ist γ reel und $\mathfrak{M}$ eine Menge reeller Zahlen, so sei $\gamma\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen $\gamma\xi$ mit $\xi \in \mathfrak{M}$. Man setze $\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$ gleich dem Durchschnitt der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}(h_1, k_1)$, $\frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}(h_2, k_2)$. Die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$ mit $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ ist offenbar gleich dem Intervall $\langle \varrho, +\infty)$, wo hier und im Folgenden stets

$$\varrho = \mathrm{Max}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\right) \frac{1}{[\sqrt{x}] + 1} \tag{85}$$

ist. Von nun an bedeuten t, t' reelle Zahlen und es bedeutet stets

$$s = \frac{1}{x} + it, \quad s' = \frac{1}{x} + it'.$$

Hilfssatz 10. *Ist* $\gamma > 0$, *so ist*

$$\left| \frac{T(s)}{s} \right| < c_{100}(\gamma)\, x^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}} \tag{86}$$

für $|t| < \frac{\gamma}{\sqrt{x}}$.

Beweis. Für $j = 1, 2$ ist für $|t| < \frac{\gamma}{\sqrt{x}}$

$$\Re \frac{\pi^2}{\alpha_j s} = \frac{\pi^2 x}{\alpha_j (1 + x^2 t^2)} > c \left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x\,|t|} \right)^2 > c(\gamma).$$

Für einen Augenblick setze man

$$\Gamma_j = \Theta(\alpha_j s) - \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}, \quad \delta_j = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}.$$

Nach Hfs 7 (mit $h = 0$, $k = 1$ und $\alpha_j s$ statt s) ist also

$$|\Gamma_j| < c(\gamma) \left|\sqrt{\frac{1}{s}}\right| \exp\left(-c\left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x\,|t|}\right)^2\right) \tag{87}$$

$$\left|\sqrt{\frac{1}{s}}\right| < c\sqrt{\frac{x}{1 + x\,|t|}} = c x^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x\,|t|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{88}$$

Nun ist $T(s) = (\Gamma_1 + \delta_1)^{r_1}(\Gamma_2 + \delta_2)^{r_2} - \delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}$; führt man dies aus, so bekommt man $T(s)$ als Summe von Produkten dargestellt, wo jedes Produkt mindestens einen Faktor Γ und außerdem $r - 1$ Faktoren Γ, δ enthält. Aus (87), (88) folgt also sofort

$$\left|\frac{T(s)}{s}\right| < c(\gamma)\, x^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x\,|t|}\right)^{\frac{r}{2} + 1} \exp\left(-c\left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x\,|t|}\right)^2\right).$$

Aber $\xi^{\frac{r}{2} + 1} \exp(-c\xi^2) < c$ für $0 < \xi < \infty$, woraus (86) folgt.

Von nun an wird der Buchstabe h (mit oder ohne Indizes) stets eine *positive* Zahl bedeuten. Sind h_1, k_1, h_2, k_2 gegeben, so setzt man stets $\beta_j = \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}$ $(j = 1, 2)$; analog $\beta'_j = \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h'_j}{k'_j}$; weiter sei stets $S(h, k) = S(h, k, 0)$.

Hilfssatz 11. *Für* $t \in \mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$, $x > c_{110}$ *ist*

$$|s| \sim t \sim \frac{h_1}{k_1} \sim \frac{h_2}{k_2}; \tag{89}$$

$$\left|\Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\Theta^{r_2}(\alpha_2 s) - \frac{S^{r_1}(h_1, k_1)\,S^{r_2}(h_2, k_2)\,\pi^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1}\alpha_2^{\frac{1}{2}r_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2}(s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}(s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}}\right| < \\ < c_{111}\sum_{j=1}^{2}\frac{x^{\frac{r}{2}}}{k_j^{\frac{1}{2}r_j}\, x^{\frac{1}{4}r_l}\,(1 + x\,|t - \beta_j|)^{\frac{1}{2}r_j}}, \tag{90}$$

wo $l = 2$ *für* $j = 1$, $l = 1$ *für* $j = 2$;

$$|T(s)| < c_{112}\frac{x^{\frac{r}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}k_2^{\frac{1}{2}r_2}(1 + x\,|t - \beta_1|)^{\frac{1}{2}r_1}(1 + x\,|t - \beta_2|)^{\frac{1}{2}r_2}}. \tag{91}$$

Beweis. Es ist für $x > c$

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j} - t\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k_j \sqrt{x}},\quad h_j \geqq 1,\ s = \frac{1}{x} + it,\quad \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k_j\sqrt{x}}$$

für $j = 1, 2$. Daraus folgt (89).

Weiter ist (wegen $k_j \leqq \sqrt{x}$)

$$\Re \frac{\pi^2}{k_j^2\left(\alpha_j s - 2\pi i \frac{h_j}{k_j}\right)} = \frac{\pi^2 x}{k_j^2 \alpha_j(1 + x^2(t-\beta_j)^2)} > \frac{cx}{k_j^2(1 + x\,|\,t-\beta_j\,|)^2} >$$

$$> \frac{cx}{k_j^2(1 + x\,.\,k_j^{-1} x^{-\frac{1}{2}})^2} > c;$$

also nach Hilfssatz 7, 8

$$\left|\Theta(\alpha_j s) - \frac{S(h_j, k_j)}{\sqrt{\alpha_j}\,k_j}\sqrt{\frac{\pi}{s - i\beta_j}}\right| < \frac{c\exp\left(\frac{-cx}{k_j^2(1 + x\,|\,t-\beta_j\,|)^2}\right)}{\sqrt{k_j\,|\,s - i\beta_j\,|}} \tag{92}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k_j\,|\,s - i\beta_j\,|}}\right| < \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_j(1 + x\,|\,t-\beta_j\,|)}}. \tag{93}$$

Aus (92), (93) folgt aber wegen $|\,S(h_j, k_j)\,| \leqq \sqrt{2k_j}$ durch denselben Schluß wie im Beweis des vorigen Hilfssatzes, daß die linke Seite von (90) kleiner ist als

$$c\,\frac{x^{\frac{r}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2}(1 + x\,|\,t-\beta_1\,|)^{\frac{1}{2}r_1}(1 + x\,|\,t-\beta_2\,|)^{\frac{1}{2}r_2}}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_{l=1,2}\exp\left(\frac{-cx}{k_l^2(1 + x\,|\,t-\beta_l\,|)^2}\right). \tag{94}$$

Nun ist aber

$$\frac{x^{\frac{1}{2}r_l}}{k_l^{\frac{1}{2}r_l}(1 + x\,|\,t-\beta_l\,|)^{\frac{1}{2}r_l}}\exp\left(\frac{-cx}{k_l^2(1 + x\,|\,t-\beta_l\,|)^2}\right) < c.$$

Daraus und aus (94) folgt (90). Wegen $k_j \leqq \sqrt{x}$, $|\,t-\beta_j\,| < cx^{-\frac{1}{2}}k_j^{-1}$ ist (vgl. (89))

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < c\sqrt{k_j} < c\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_j(1 + x\,|\,t-\beta_j\,|)}}. \tag{95}$$

Aus $|\,S(h_j, k_j)\,| \leqq \sqrt{2k_j}$, (94), (93), (95) folgt (91).

Hilfssatz 12. *Ist μ reell, ν reell, $\mu \neq \nu$, $m \geqq n > 1$, so ist*

$$I(m, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + x\,|\,t - \mu\,|)^m} < \frac{c_{120}(m)}{x}, \tag{96}$$

$$I(m, n, \mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + x\,|\,t - \mu\,|)^m\,(1 + x\,|\,t - \nu\,|)^n} <$$

$$< \frac{c_{121}(m, n)}{x} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(x\,|\,\mu - \nu\,|)^n}\right). \tag{97}$$

Beweis. Die Substitution $x(t - \mu) = u$ gibt

$$I(m, n, \mu, \nu) \leqq I(m, \mu) = \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + |\,u\,|)^m} = \frac{c(m)}{x}.$$

Für $x\,|\,\mu - \nu\,| \geqq 1$ beachte man, daß für jedes t entweder $|\,t - \mu\,| \geqq \frac{1}{2}\,|\,\mu - \nu\,|$ oder $|\,t - \nu\,| \geqq \frac{1}{2}\,|\,\mu - \nu\,|$ ist; also

$$I(m, n, \mu, \nu) < \frac{c(n)}{(x\,|\,\mu - \nu\,|)^n} I(m, \mu) + \frac{c(m)}{(x\,|\,\mu - \nu\,|)^m} I(n, \nu) <$$

$$< \frac{c(m, n)}{x} \operatorname{Max}\left(\frac{1}{(x\,|\,\mu - \nu\,|)^n}, \frac{1}{(x\,|\,\mu - \nu\,|)^m}\right) = \frac{c(m, n)}{x\,(x\,|\,\mu - \nu\,|)^n}.$$

Die Formel (82) läßt sich nach unserer Verabredung über die Bedeutung der Buchstaben s, s' folgendermaßen schreiben:

$$4\pi^2\,(M_Q(x) - M_Q(\mu x)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s)}{s}\,\frac{T(s')}{s'}\,\frac{e^{x(s+s')} - e^{\mu x(s+s')}}{s + s'}\,dt\,dt'. \tag{98}$$

Sind $h_1, k_1, h_2, k_2, h'_1, k'_1, h'_2, k'_2$ gegeben (wobei stets die Verabredung (84) und $h > 0$ zu beachten ist), so setze man

$$M(h_1, k_1, h_2, k_2, h'_1, k'_1, h'_2, k'_2) =$$

$$= \int_{\mathfrak{C}} \Big(\int_{-\mathfrak{C}'} \ldots dt'\Big)\,dt + \int_{-\mathfrak{C}} \Big(\int_{\mathfrak{C}'} \ldots dt'\Big)\,dt +$$

$$+ \int_{\mathfrak{C}} \Big(\int_{\mathfrak{C}'} \ldots dt'\Big)\,dt + \int_{-\mathfrak{C}} \Big(\int_{-\mathfrak{C}'} \ldots dt'\Big)\,dt;$$

dabei ist der Integrand derselbe wie in (98) und zur Abkürzung wird, wie auch im Folgenden,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2), \quad \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}(h'_1, k'_1, h'_2, k'_2)$$

gesetzt. Weiter: sind h_1, k_1, h_2, k_2 gegeben, so sei

$$N(h_1, k_1, h_2, k_2) = \int\limits_{\mathfrak{C}} \Big(\int\limits_{-\mathfrak{C}} \ldots dt' \Big) dt,$$

$$N'(h_1, k_1, h_2, k_2) = \int\limits_{\mathfrak{C}} \Big(\int\limits_{\mathfrak{C}} \ldots dt' \Big) dt.$$

Endlich sei $\mathfrak{G}$ das Gebiet $\mathrm{Min}\,(|t|, |t'|) \leqq \varrho$ (vgl. (85)).

Ein System h_1, k_1, h_2, k_2 heiße *singulär*, wenn es ein v mit

$$\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} = \frac{p_v}{q_v} \tag{99}$$

gibt, sonst *regulär*.[14]) Man beachte, daß sich der Integrand in (98) nicht ändert, wenn t mit t' vertauscht wird, daß er aber in den konjugiert komplexen Wert übergeht, wenn t, t' durch $-t, -t'$ ersetzt wird. Weiter beachte man, daß $\mathfrak{C}(-h_1, k_1, -h_2, k_2) = -1 \cdot \mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$ und daß die Mengen $\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2)$ genau das Intervall $\langle \varrho, +\infty)$ lückenlos und bis auf gemeinsame Endpunkte einfach überdecken. Man setze nun

$$\begin{aligned} S(x) &= \Sigma\, N(h_1, k_1, h_2, k_2), \\ S_1(x) &= \Sigma\, N'(h_1, k_1, h_2, k_2), \\ S_2(x) &= \Sigma\, N(h_1, k_1, h_2, k_2), \\ S_3(x) &= \Sigma\, N'(h_1, k_1, h_2, k_2); \end{aligned}$$

dabei wird in S und S_1 über alle singulären, in S_2 und S_3 über alle regulären Systeme h_1, k_1, h_2, k_2 summiert. Weiter sei

$$\begin{aligned} S_4(x) &= \Sigma\, M(h_1, k_1, h_2, k_2, h'_1, k'_1, h'_2, k'_2), \\ S_5(x) &= \Sigma\, M(h_1, k_1, h_2, k_2, h'_1, k'_1, h'_2, k'_2); \end{aligned}$$

dabei wird in S_4 über alle Systeme der acht Zahlen $h_1, \ldots, k'_2$ mit

$$(h_1, k_1, h_2, k_2) \neq (h'_1, k'_1, h'_2, k'_2) \tag{100}$$

summiert, für welche entweder

$$0 < \left| \frac{h_1}{k_1} - \frac{h'_1}{k'_1} \right| < \frac{4}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k'_1} \right) \tag{101}$$

oder

$$0 < \left| \frac{h_2}{k_2} - \frac{h'_2}{k'_2} \right| < \frac{4}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k'_2} \right) \tag{102}$$

[14]) Man beachte folgende Symmetrieeigenschaft: vertauscht man in (99) die Indizes 1, 2 und α_2 mit α_1 (also p_v mit q_v), so bleibt (99) ungeändert.

gilt. In S_5 wird dagegen über alle Systeme mit (100) summiert, für welche weder (101) noch (102) gilt. Endlich sei

$$S_6(x) = \iint\limits_{\mathfrak{G}} \ldots dt\, dt'.$$

Nach dem, was wir über die Symmetrieeigenschaften des Integranden gesagt haben, ist offenbar (nach (98))

$$4\pi^2 (M_Q(x) - M_Q(\mu x)) =$$
$$= 2\, S(x) + 2\, S_2(x) + 2\, \Re S_1(x) + 2\Re S_3(x) + S_4(x) + S_5(x) + S_6(x). \quad (103)$$

Außer den erwähnten Symmetrieeigenschaften des Integranden benutzen wir im Folgenden auch, daß sich Q (bis auf die Numerierung der $u_1, \ldots, u_r$) und der Hauptsatz nicht ändert, wenn r_1, α_1 mit r_2, α_2 vertauscht wird. Außerdem benutzen wir stets die Abschätzungen

$$|e^{u(s+s')}| \leqq e^2 \text{ für } 0 \leqq u \leqq x, \quad \left|\frac{1}{s+s'}\right| =$$
$$= \frac{x}{|2 + ix(t+t')|} \sim \operatorname{Min}\left(x, \frac{1}{|t+t'|}\right). \quad (104)$$

Endlich benutzen wir oft folgenden

Hilfssatz 13. *Sind h_1, k_1, k_2 gegeben, so gibt es höchstens c_{139} Zahlen h_2 mit $\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2) \neq \emptyset$.*

Beweis. Es ist $k_2 \leqq \sqrt{x}$ und es soll

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{h_2}{k_2}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1 k_1} + \frac{2\pi}{\alpha_2 k_2}\right) < \frac{c}{\sqrt{x}}$$

sein.

Natürlich gilt auch der zu Hilfssatz 13 symmetrische Satz (Vertauschung von h_1, h_2) und in den Summen S bis S_5 dürfen Glieder mit $\mathfrak{C} = \emptyset$ oder $\mathfrak{C}' = \emptyset$ weggelassen werden.

§ 3. Abschätzungen nach oben.

Hier liegt die Hauptschwierigkeit in der Abschätzung von $S_5(x)$.

Hilfssatz 14. $|S_6(x)| < c_{140} x^{r-3}$ *für* $x > c_{141}$.

Beweis. Nach (85) ist (alles für $x > c$) $\varrho < \frac{c_{142}}{\sqrt{x}}$. Wird also zur Abkürzung $y = \frac{c_{142}}{\sqrt{x}}$ gesetzt, so genügt es aus Symmetriegründen zu zeigen:

$$I_1 = \int\limits_{-2y}^{2y} \left(\int\limits_{-2y}^{2y} \left|\frac{T(s)\, T(s')\, dt'}{ss'(s+s')}\right|\right) dt < c x^{r-3} \quad (105)$$

$$I_2 = \int\limits_{-y}^{y} \left(\int\limits_{2y}^{\infty} \left| \frac{T(s)\, T(s')\, \mathrm{d}t}{ss'\,(s+s')} \right| \right) \mathrm{d}t' < cx^{r-3} \tag{106}$$

zu zeigen. Nach Hfs. 10 und (104) ist

$$I_1 < c \int\limits_{-2y}^{2y} \left(\int\limits_{-2y}^{2y} x^{\frac{r}{2}+1} \frac{x\, \mathrm{d}t'}{1 + x\,|\,t + t'\,|} \right) \mathrm{d}t <$$

$$< cx^{\frac{r}{2}+1} \int\limits_{0}^{2y} \left(\int\limits_{0}^{t} \frac{x\, \mathrm{d}t'}{1 + x\,(t - t')} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= cx^{\frac{r}{2}+1} \int\limits_{0}^{2y} \log\,(1 + xt)\, \mathrm{d}t < cx^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x,$$

woraus (105) folgt. Im Integrationsbereich von I_2 ist $|\,s + s'\,| > > |\,t + t'\,| \geqq \frac{1}{2}t$, also nach Hfs. 10, 11, 12, 13 und wegen $\frac{1}{2}r_1 - 2 \geqq 1$

$$I_2 < c \int\limits_{-y}^{y} x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t' \sum_{h_1, k_1, h_2, k_2} \left(\frac{k_1}{h_1} \right)^2 \times$$

$$\times \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{x^{\frac{r}{2}}\, \mathrm{d}t}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2} (1 + x\,|\,t - \beta_1\,|)^{\frac{1}{2}r_1} (1 + x\,|\,t - \beta_2\,|)^{\frac{1}{2}r_2}} <$$

$$< cyx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}+\frac{r}{2}-1} \sum_{h_1, k_1, k_2,} \frac{1}{h_1^2 k_1^{\frac{1}{2}r_1 - 2} k_2^{\frac{1}{2}r_2}} < cx^{\frac{3}{4}r-1} \log x,$$

woraus (106) folgt.

Hilfssatz 15. *Es sei* $\lambda \geqq 1$. *Dann ist*

$$|\,S(x)\,| < c_{150}\, F(x) \;\; \textit{für} \;\; x > c_{151}, \tag{107}$$

$$|\,S_1(x)\,| < c_{152}\, x^{r-3} + \frac{1}{\lambda} F(x) \;\; \textit{für} \;\; x > c_{153}(\lambda). \tag{108}$$

Beweis. Aus

$$\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} = \frac{p_v}{q_v}$$

folgt mit lauter positiven ganzen Zahlen $q_v = m'n$, $p_v = mn'$, $h_1 = a_1 n'$, $k_2 = b_1 m$, $h_2 = a_2 m'$, $k_1 = b_2 n$,

$$a_1 b_1 = a_2 b_2, \; \{a_1, b_2\} = \{a_2, b_1\} = 1,$$

also $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$. Also:

m/p_v, n/q_v, $k_1 = bn$, $k_2 = bm$, $h_1 = a\dfrac{p_v}{m}$, $h_2 = a\dfrac{q_v}{n}$.

$$\left|\beta_1 - \beta_2\right| = \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_2}{k_2}\left|\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| \sim \frac{h_2}{k_2\, q_v\, q_{v+1}} = \frac{a}{bmnq_{v+1}}.$$

Nach (104) und Hilfssatz 11 ist

$$\left|\frac{1}{s+s'}\right| < x \text{ für } t \in \mathfrak{C},\ t' \in -\mathfrak{C} \text{ und } \left|\frac{1}{s+s'}\right| < \frac{1}{t+t'} \sim \frac{k_1}{h_1}$$

für $t \in \mathfrak{C}$, $t' \in \mathfrak{C}$. Nach Hfs. 11, (89), (91), 12[15]) und aus Symmetriegründen ist also

$$|S(x)| < cx^{r-1} \sum_{h_1,k_1,h_2,k_2} \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{1}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2 - \beta_1|\, x)^z}\right). \tag{109}$$

$$|S_1(x)| < cx^{r-2} \sum_{h_1,k_1,h_2,k_2} \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^3 \frac{1}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2 - \beta_1|\, x)^z}\right). \tag{110}$$

Multipliziert man rechts in jedem Glied von (109) bzw. (110) mit $\left(\dfrac{k_2}{k_2}\right)^2$ bzw. $\left(\dfrac{k_2}{k_2}\right)^3$ und benutzt $h_1 k_2 = abp_v \sim abq_v$, so hat man

$$|S(x)| < cx^{r-1} \sum_{\substack{v,\,a,\,b,\\ m\,|\,p_v,\, n\,|\,q_v}} \frac{1}{q_v^2\, n^{r_1-2}\, m^{r_2-2}\, a^2\, b^{r-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{bmnq_{v+1}}{ax}\right)^z\right) <$$

$$< c\, F(x) \text{ (wegen} \sum_{a,b} a^{-2} b^{-r+z+2} = c).$$

und genau ebenso

$$|S_1(x)| < cx^{r-2} \sum_v \sum_{\substack{m\,|\,p_v\\ n\,|\,q_v}} \frac{1}{q_v^3\, n^{r_1-3}\, m^{r_2-3}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}\, mn}{x}\right)^z\right).$$

Diejenigen Glieder der letzten Summe, für welche $q_v > x^{\frac{1}{3}}$ ist, geben zusammen höchstens cx^{r-3}; jedes Glied mit $q_v \leqq x^{\frac{1}{3}}$ unterscheidet sich von dem entsprechenden Glied von $F(x)$ nur um den Faktor $c\dfrac{mn}{q_v x} < \dfrac{c}{x^{\frac{2}{3}}}$ (wegen m/p_v, n/q_v, $p_v \sim q_v$). Also ist $|S_1(x)| < cx^{r-3} + cx^{-\frac{2}{3}} F(x)$, woraus (108) folgt.

* * *

Ist

$$\mathfrak{C}(h_1, k_1, h_2, k_2) \neq \emptyset, \tag{111}$$

[15]) Hilfssatz 12 wird zweimal angewendet: auf t und auf t'.

so ist

$$|\beta_2 - \beta_1| \leqq \left(\frac{2\pi}{\varkappa_1 k_1} + \frac{2\pi}{\varkappa_2 k_2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{c_{160}}{\sqrt{x}\,.\,\mathrm{Min}\,(k_1,\,k_2)}, \tag{112}$$

wobei $c_{160} > 1$ gewählt sei. Man setze nun entweder $i = 1$, $j = 2$ (die imaginäre Einheit wird erst im § 4 wieder erscheinen) oder $j = 1$, $i = 2$. Sind m_1, m_2, l, n ganze Zahlen, so sage man, daß das System h_1, k_1, h_2, k_2 zur Klasse (i, m_1, m_2, l, n) gehört, wenn $k_i \geqq k_j$, wenn dazu (111) und

$$2^{m_1} \leqq k_i < 2^{m_1+1},\quad 2^{m_2} \leqq k_j < 2^{m_2+1},\quad 2^l \leqq h_j < 2^{l+1} \tag{113}$$

gilt und wenn gleichzeitig n die größte ganze Zahl ist, für welche

$$2^{n+m_2} < c_{160}\sqrt{x},\quad |\beta_2 - \beta_1| < \frac{c_{160}}{2^{n+m_2}\sqrt{x}} \tag{114}$$

ist. Bei vorgegebenem i gehört jedes System h_1, k_1, h_2, k_2 mit (111) und $k_j \leqq k_i$ genau einer Klasse (i, m_1, m_2, l, n) an. Dabei ist offenbar

$$1 \leqq 2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x},\quad 1 \leqq 2^l,\quad 2^{n+m_2} < c_{160}\sqrt{x},\quad 2^n \geqq 1 \tag{115}$$

(denn nach (112), $c_{160} > 1$ und $2^{m_2} \leqq \sqrt{x}$ ist

$$2^{m_2} < c_{160}\sqrt{x},\quad |\beta_2 - \beta_1| < \frac{c_{160}}{2^{m_2}\sqrt{x}},$$

sodaß $n \geqq 0$). Bei gegebenen i, m_1, m_2, l, n mit (115) sei $U(i, m_1, m_2, l, n)$ die Anzahl der *regulären* Systeme h_1, k_1, h_2, k_2, die zur Klasse (i, m_1, m_2, l, n) gehören.

Hilfssatz 16. *Gehört h_1, k_1, h_2, k_2 zur Klasse (i, m_1, m_2, l, n), so ist*

$$\mathrm{Min}\left(1,\frac{1}{|\beta_2 - \beta_1|\,x}\right) \sim \frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}. \tag{116}$$

Beweis. Ist $2^{n+1+m_2} < c_{160}\sqrt{x}$, so ist nach Definition

$$|\beta_2 - \beta_1| \geqq \frac{c_{160}}{2^{n+m_2+1}\sqrt{x}} > \frac{c}{x};$$

daraus und aus (114) folgt (116). Ist aber $2^{n+1+m_2} \geqq c_{160}\sqrt{x}$, so ist nach (114)

$$2^{n+m_2} \sim \sqrt{x},\quad |\beta_2 - \beta_1| < \frac{c}{x},$$

woraus wieder (116) folgt.

Hilfssatz 17. *Es ist für* $i = 1, 2$

$$U(i, m_1, m_2, l, n) < c_{170} \frac{2^{2m_1+l}}{2^n \sqrt{x}} \operatorname{Min}\left(2^{m_1+m_2}, 2^{\frac{1}{10}(m_1+l)}\right).$$

Für $\frac{1}{2^l} > c_{171} \frac{2^{2m_1-n}}{\sqrt{x}}$ *ist* $U(i, m_1, m_2, l, n) = 0.$

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, $i = 1$ vorauszusetzen. Ist h_1, k_1, h_2, k_2 ein System der Klasse $(1, m_1, m_2, l, n)$, so gibt es genau ein Paar a, b mit

$$\frac{h_1 k_2}{h_2 k_1} = \frac{a}{b} \tag{117}$$

$$\{a, b\} = 1, \ a > 0, \ b > 0 \tag{118}$$

und genau eine ganze Zahl u mit

$$2^u \leqq b < 2^{u+1}; \tag{119}$$

Wegen (113), (117), (118) ist dann

$$0 \leqq u \leqq m_1 + l + 1. \tag{120}$$

Umgekehrt, jedem System a, b mit (118), (119) entsprechen höchstens

$$c\, 2^{m_1+l-u} \operatorname{Min}\left(2^{m_1+m_2}, 2^{\frac{1}{10}(m_1+l)}\right) \tag{121}$$

Systeme h_1, k_1, h_2, k_2 mit (111), (113), (117); denn es muß erstens $h_1 k_2 = da$, $h_2 k_1 = db$ mit ganzem d, $0 < d \leqq c\, 2^{m_1+l-u}$ sein; sind $h_1 k_2$, $h_2 k_1$ bekannt, so hat k_1 bzw. k_2 nach (113) höchstens 2^{m_1} bzw. 2^{m_2} Möglichkeiten; und ebenso hat k_1 bzw. k_2 als Teiler von $h_2 k_1 \sim 2^{m_1+l}$ bzw. von $h_1 k_2 \sim h_2 k_1$ höchstens $c\, 2^{\frac{1}{10}(m_1+l)}$ Möglichkeiten. Aus der Regularität von h_1, k_1, h_2, k_2 und aus (117), (114) folgt

$$\frac{1}{c\, 2^{2u}} < \frac{1}{2b^2} < \left|\frac{a}{b} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = c\, \frac{k_2}{h_2} \,|\, \beta_2 - \beta_1 \,|\, < \frac{c_{172}}{2^{n+l} \sqrt{x}};$$

also muß $2^{2u} > c_{173}\, 2^{n+l} \sqrt{x}$ sein. Wegen (120) folgt daraus: ist

$$2^{2m_1+2l} < \tfrac{1}{4} c_{173}\, 2^{n+l} \sqrt{x},$$

so ist $U(1, m_1, m_2, l, n) = 0$; das ist die zweite Behauptung des Hilfssatzes. Gilt aber $2^{2u} > c_{173}\, 2^{n+l} \sqrt{x}$, so ist die Anzahl der Paare a, b mit (118), (119) und

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| < \frac{c_{172}}{2^{n+l} \sqrt{x}}$$

höchstens gleich

$$\frac{2c_{172}\,2^{2u+2}}{2^{n+l}\sqrt{x}} + 1 < \frac{c\,2^{2u}}{2^{n+l}\sqrt{x}}; \tag{122}$$

denn alle diese Brüche $\frac{a}{b}$ liegen in einem Intervalle der Länge $2c_{172}\,2^{-n-l}\,x^{-\frac{1}{2}}$ und der Abstand je zweier solcher Brüche ist größer als 2^{-2u-2}. Nach (120), (121), (122) ist

$$U(1, m_1, m_2, l, n) < c \sum_{u \leqq m_1+l+1} 2^{m_1+l-u} \,.\, \mathrm{Min}\left(2^{m_1+m_2},\ 2^{\frac{1}{6}(m_1+l)}\right) . \frac{2^{2u}}{2^{n+l}\sqrt{x}};$$

wegen $\sum\limits_{u \leqq m_1+l+1} 2^u < c 2^{m_1+l}$ ist damit auch die erste Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 18. *Es sei* $\lambda \geqq 1$; *dann ist*

$$|\,S_4(x)\,| < \frac{1}{\lambda}\,(x^{r-3} + F(x)) \ \textit{für}\ x > c_{180}(\lambda).$$

Beweis. $M(h_1, \ldots, k'_2)$ ist die Summe von vier Integralen. In $\int\limits_{\mathfrak{C}}\int\limits_{-\mathfrak{C}'}$ schreiben wir $-t'$ statt t'; in $\int\limits_{-\mathfrak{C}}\int\limits_{\mathfrak{C}'}$ schreiben wir $-t$ statt t; in $\int\limits_{-\mathfrak{C}}\int\limits_{-\mathfrak{C}'}$ schreiben wir $-t$, $-t'$ statt t, t'. Dann ist das Integrationsgebiet in allen vier Integralen: $t \in \mathfrak{C}$, $t' \in \mathfrak{C}'$ und statt $\frac{1}{s+s'}$ bekommt man in den zwei ersten Integralen $\frac{1}{\frac{2}{x} \pm i\,(t-t')}$, in den zwei letzten $\frac{1}{\frac{2}{x} \pm i\,(t+t')}$. Da im Integrationsgebiet $t > 0$, $t' > 0$ ist, so ist $|\,t+t'\,| > |\,t-t'\,|$. Wenn man noch bedenkt, daß $T(s)\,s^{-1}$ in den konjugiert komplexen Wert übergeht, wenn t durch $-t$ ersetzt wird, bekommt man durch die Anwendung von Hilfssatz 11, (89), (91)[16])

$$|\,S_4(x)\,| < c \sum_{h_1,\ldots,k'_2} \frac{k_1}{h_1}\cdot\frac{k'_1}{h'_1}\cdot\frac{x^r}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2^{\frac{1}{2}r_2}\,k_1'^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2'^{\frac{1}{2}r_2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathfrak{C}}\int\limits_{\mathfrak{C}'} (1 + x\,|\,t-\beta_1\,|)^{-\frac{1}{2}r_1}(1 + x\,|\,t-\beta_2\,|)^{-\frac{1}{2}r_2}(1 + x\,|\,t'-\beta'_1)^{-\frac{1}{2}r_1} \times$$

$$\times (1 + x\,|\,t'-\beta'_2\,|)^{-\frac{1}{2}r_2}\frac{x\,dt\,dt'}{1 + x\,|\,t-t'\,|}. \tag{123}$$

---

[16]) Denselben Kunstgriff benutzen wir in den beiden folgenden Hilfssätzen.

Aus Symmetriegründen dürfen wir uns (vgl. (101), (102)) auf die Betrachtung derjenigen Teilsumme der rechten Seite von (123) beschränken, in welcher

$$0 < \left|\frac{h_2}{k_2} - \frac{h'_2}{k'_2}\right| < \frac{4}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k'_2}\right), \quad k_2 \leqq k'_2 \tag{124}$$

gilt; man bezeichne diese Teilsumme mit $\mathfrak{S}$. Nach (124) ist für $x > c$

$$\frac{1}{k_2\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{k_2 k'_2} \leqq \left|\frac{h_2}{k_2} - \frac{h'_2}{k'_2}\right| < \frac{8}{k_2\sqrt{x}}, \quad \frac{h_2}{k_2} \sim \frac{h'_2}{k'_2}. \tag{125}$$

Daher ist $k'_2 > \frac{1}{8}\sqrt{x}$; bei gegebenen h_2, k_2 ist $\frac{h'_2}{k'_2}$ höchstens $\frac{16}{k_2\sqrt{x}} \cdot x + 1 < \frac{c\sqrt{x}}{k_2}$ Werte fähig, da alle diese Zahlen $\frac{h'_2}{k'_2}$ nach (125) in einem Intervall der Länge $\frac{16}{k_2\sqrt{x}}$ liegen und ihre gegenseitigen Abstände mindestens gleich $\frac{1}{x}$ sind. Nach (125) ist weiter $x \mid \beta_2 - \beta'_2 \mid > c_{181}\sqrt{x}\, k_2^{-1}$; für jedes Paar t, t' ist also entweder $x \mid t - \beta_2 \mid \geqq \frac{1}{3}c_{181}\sqrt{x}\, k_2^{-1}$ oder $x \mid t' - \beta'_2 \mid \geqq \frac{1}{3}c_{181}\sqrt{x}\, k_2^{-1}$ oder $x \mid t - t' \mid \geqq \frac{1}{3}c_{181}\sqrt{x}\, k_2^{-1}$; also ist stets

$$(1 + x \mid t - \beta_2 \mid)(1 + x \mid t' - \beta'_2 \mid)(1 + x \mid t - t' \mid) \geqq \tfrac{1}{3}\, c_{181}\sqrt{x}\, k_2^{-1}$$

und daher

$$(1 + x \mid t - \beta_2 \mid)^{-\frac{1}{2}r_2}(1 + x \mid t' - \beta'_2 \mid)^{-\frac{1}{2}r_2}(1 + x \mid t - t' \mid)^{-1} <$$
$$< \frac{ck_2}{\sqrt{x}}(1 + x \mid t - \beta_2 \mid)^{-\frac{1}{2}r_2+1}(1 + x \mid t' - \beta'_2 \mid)^{-\frac{1}{2}r_2+1}.$$

Benutzt man diese Ungleichung in den Integralen von (123) und wendet dann zweimal (auf t und auf t') den Hilfssatz 12 an, so bekommt man wegen $r_1 \geqq z$, $r_2 \geqq z$, $\frac{k_1}{h_1} \sim \frac{k_2}{h_2} \sim \frac{k'_2}{h'_2} \sim \frac{k'_1}{h'_1}$

$$\mathfrak{S} < c \sum_{h_1, \ldots, k'_2} \left(\frac{k_2}{h_2}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2} k_1'^{\frac{1}{2}r_1} k_2'^{\frac{1}{2}r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(\mid \beta_2 - \beta_1 \mid x)^{\frac{z}{2}-1}}\right)\frac{k_2}{\sqrt{x}};$$

das Summationsgebiet ist durch (125) und $\mathfrak{C} \neq 0$, $\mathfrak{C}' \neq 0$ gegeben. Die Summation über k'_2, h'_2, k'_1, h'_1 gibt

$$\mathfrak{S} < c \sum_{h_1, k_1, h_2, k_2} \left(\frac{k_2}{h_2}\right)^2 \frac{x^{r-1-\frac{z}{4}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(\mid \beta_2 - \beta_1 \mid x)^{\frac{z}{2}-1}}\right) \tag{126}$$

(es ist nämlich $k'_2 > \frac{1}{8}\sqrt{x}$ und h'_2, k'_2 haben höchstens $c\sqrt{x}\,k_2^{-1}$ Möglichkeiten; bei festen k'_2, h'_2, k'_1 hat h'_1 nach Hilfssatz 13 höchstens c Möglichkeiten). Das Summationsgebiet in (126) ist

$$h_j > 0,\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x},\ \{h_j, k_j\} = 1\ (j = 1, 2),\ \mathfrak{C} \neq 0.$$

Es sei $\mathfrak{S}_1$ die Teilsumme der rechten Seite von (126) über singuläre, $\mathfrak{S}_2$ die Teilsumme über reguläre Systeme h_1, k_1, h_2, k_2. Wegen der Symmetrie der rechten Seite von (126) $\left(\frac{k_2}{h_2} \sim \frac{k_1}{h_1}\right)$, der Symmetrie der Behauptung und der Symmetrie der Definition der singulären Systeme genügt es, die Teilsumme $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}_2$ mit $k_2 \leqq k_1$ abzuschätzen. Nach Hilfssatz 16, 17 ($i = 1$) und wegen $z \geqq 6$ ist

$$\mathfrak{T} < c \sum \frac{x^{r-\frac{5}{2}}}{2^{2l}\, 2^{m_1 \frac{1}{2} r_1}\, 2^{m_2(\frac{1}{2} r_2 - 2)}} \cdot \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{2^{2m_1+l}}{2^n \sqrt{x}}\, 2^{\frac{1}{10}(m_1+l)}$$

mit dem Summationsgebiet $2^l \geqq 1$, $2^{n+m_2} < c\sqrt{x}$, $2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$. Das ergibt (wegen $\sum\limits_{m_2} 1 = m_1 + 1$)

$$\mathfrak{T} < c \sum_{m_1, m_2} \frac{x^{r-\frac{5}{2}}}{2^{m_1(\frac{1}{2} r_1 - 2 - \frac{1}{10})}\, 2^{m_2(\frac{1}{2} r_2 - 3)}} < c \sum_{m_1} \frac{m_1 + 1}{2^{\frac{9}{10} m_1}}\, x^{r-\frac{5}{2}}.$$

$$\mathfrak{T} < c x^{r-\frac{5}{2}}. \tag{127}$$

Genau so wie im Hilfssatz 15 bekommt man

$$\mathfrak{S}_1 < c \sum_{r, a, b, m, n} \frac{x^{r-1-\frac{z}{4}}}{(a q_v)^2\, b^{\frac{r}{2}-2}\, n^{\frac{1}{2} r_1 - 2}\, m^{\frac{1}{2} r_2 - 2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{b m n q_{r+1}}{a x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\right).$$

mit dem Summationsbereich $p_v > 0$, m/p_r, n/q_r, $a > 0$, $b > 0$. Wegen

$$\sum_{a, b} a^{-2} b^{-\frac{r}{2}+\frac{z}{2}-1+2} = c$$

bekommt man in der Bezeichnung des Hilfssatzes 5

$$\mathfrak{S}_1 < c\, K(x). \tag{128}$$

Aus (127), (128) und Hilfssatz 5 folgt aber die Behauptung.

Hilfssatz 19. *Es sei* $\lambda \geqq 1$; *dann ist*

$$|S_5(x)| < (c_{190} + \lambda c_{191})\, x^{r-3} + \frac{c_{192}}{\lambda} F(x) \text{ für } x > c_{193}.$$

Beweis. Der Anfang des Beweises des Hilfssatzes 18 bis zur Formel (123) gilt auch hier; also gilt (123) auch für S_5 statt S_4, nur ist hier der Summationsbereich ein anderer: es wird über diejenigen Systeme $h_1, \ldots, k'_2$ summiert, für welche entweder

$$\left|\frac{h_j}{k_j}-\frac{h'_j}{k'_j}\right| \geqq \frac{4}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{k_j}+\frac{1}{k'_j}\right) \text{ für } j=1 \text{ und } j=2 \tag{129}$$

oder

$$\left|\frac{h_1}{k_1}-\frac{h'_1}{k'_1}\right| \geqq \frac{4}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k'_1}\right), \quad \frac{h_2}{k_2}=\frac{h'_2}{k'_2} \tag{130}$$

oder

$$\left|\frac{h_2}{k_2}-\frac{h'_2}{k'_2}\right| \geqq \frac{4}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k'_2}\right), \quad \frac{h_1}{k_1}=\frac{h'_1}{k'_1} \tag{131}$$

gilt. Aus Symmetriegründen genügt es, folgende Summen zu betrachten: *Erstens* die Teilsumme aller Glieder der rechten Seite von (123), für welche (129) und

$$k_1 = \mathrm{Min}\,(k_1, k_2, k'_1, k'_2) \tag{132}$$

gilt; diese Summe heiße $\mathfrak{S}_1$. *Zweitens* die Teilsumme aller Glieder der rechten Seite von (123), für welche (130) und

$$k_1 \leqq k'_1 \tag{133}$$

gilt; diese Summe heiße $\mathfrak{S}_2$.

Ist $t \in \mathfrak{C}$, $t' \in \mathfrak{C}'$, so ist in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$:

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}-t\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 k_1\sqrt{x}}, \quad \left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h'_1}{k'_1}-t'\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 k'_1\sqrt{x}},$$

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}-\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h'_1}{k'_1}\right| \geqq \frac{8\pi}{\alpha_1\sqrt{x}}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k'_1}\right),$$

also

$$|t-t'| \geqq \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\alpha_1}\left|\frac{h_1}{k_1}-\frac{h'_1}{k'_1}\right|.$$

Also ist für $\gamma = 1, 2$ nach (123) und Hilfssatz 12

$$\mathfrak{S}_\gamma < c \sum_{h_1,\ldots,k'_2} \frac{k_1}{h_1}\frac{k'_1}{h'_1}\frac{x^{r-2}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2} k'^{\frac{1}{2}r_1}_1 k'^{\frac{1}{2}r_2}_2}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2-\beta_1|\,x)^{\frac{z}{2}}}\right) \cdot \frac{k_1 k'_1}{|h_1 k'_1 - h'_1 k_1|}. \tag{134}$$

Man untersuche zunächst — bei vorgegebenen h_1, k_1, h_2, k_2, k'_2 — die Summe

$$V = V(h_1, k_1, h_2, k_2, k'_2) = \sum_{h'_1, k'_1, h'_2} \frac{1}{k'^{\frac{1}{2}r_1 - 2}_1 h'_1 \,|\, h_1 k'_1 - h'_1 k_1 \,|}$$

mit den Summationsbedingungen (vgl. (132), (133)) $k'_1 \geqq k_1$, $h_1 k'_1 - - h'_1 k_1 \neq 0$, $\mathfrak{C}(h'_1, k'_1, h'_2, k'_2) \neq \emptyset$, so daß nach Hfs. 13 die Zahl h'_2 nur c Werte annehmen kann, wenn die übrigen Zahlen gegeben sind. Es sei $V = V_1 + V_2$, wo V_1 die Glieder mit $\frac{h'_1}{k'_1} < \frac{h_1}{k_1}$ und V_2 die Glieder mit $\frac{h'_1}{k'_1} > \frac{h_1}{k_1}$ enthält. In jedem Glied von V_1 setze man (mit ganzen a, b)

$$h_1 k'_1 = h'_1 k_1 + a + b k_1, \quad 0 < a \leqq k_1, \quad b \geqq 0.$$

Durch h_1, k_1, k'_1, a, b ist dann h'_1 gegeben und es ist

$$h'_1 = \frac{h_1 k'_1 - a - b k_1}{k_1} > 0 \text{ ganz}, \quad h_1 k'_1 - a - b k_1 \geqq k_1. \tag{135}$$

Also

$$V_1 = \sum_a \sum_{k'_1} \frac{1}{k'^{\frac{1}{2}r_1 - 2}_1} \sum_b \frac{1}{h'_1 \,|\, h_1 k'_1 - h'_1 k_1 \,|} \sum_{h'_2} 1. \tag{136}$$

Hier ist $\sum\limits_{h'_2} 1 < c$; die Summe nach b, h'_2 ist kleiner als

$$\begin{aligned} \sum_b \frac{c k_1}{(h_1 k'_1 - a - b k_1)(a + b k_1)} &< c \sum_{a + b k_1 < \frac{1}{2} h_1 k'_1} \frac{k_1}{h_1 k'_1 (a + b k_1)} + \\ + c \sum_{h_1 k'_1 > a + b k_1 \geqq \frac{1}{2} h_1 k'_1} \frac{k_1}{h_1 k'_1 (h_1 k'_1 - a - b k_1)} &< c \frac{k_1}{h_1 k'_1} \left(\sum{}' \frac{1}{m} + \sum{}'' \frac{1}{m} \right); \end{aligned} \tag{137}$$

dabei wird in Σ' über alle $m \geqq a$, $m < \frac{1}{2} h_1 k'_1$, $m \equiv a \pmod{k_1}$ und in Σ'' über alle $m \geqq k_1$ (vgl. (135)), $m \leqq \frac{1}{2} h_1 k'_1$, $m \equiv h_1 k'_1 - a \pmod{k_1}$ summiert, sodaß

$$\frac{k_1}{h_1 k'_1} \left(\sum{}' \frac{1}{m} + \sum{}'' \frac{1}{m} \right) < \frac{c k_1}{h_1 k'_1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1} \log \frac{h_1 k'_1}{k_1} \right). \tag{138}$$

In jedem Glied von V_2 setze man (mit ganzen a, b)

$$h'_1 k_1 = h_1 k'_1 + a + b k_1, \quad 0 < a \leqq k_1, \quad b \geqq 0;$$

also wie früher

$$h'_1 = \frac{h_1 k'_1 + a + b k_1}{k_1} > 0 \text{ ganz}. \tag{139}$$

(136) gilt auch mit V_2 statt V_1, nur ist jetzt die Summe nach b, h'_2 kleiner als

$$c\sum_b \frac{k_1}{(h_1k'_1+a+bk_1)(a+bk_1)} < c\sum_{a+bk_1<\frac12 h_1k'_1} \frac{k_1}{h_1k'_1(a+bk_1)} + \\ + c\sum_{a+bk_1\geqq\frac12 h_1k'_1} \frac{k_1}{(a+bk_1)^2} < \frac{ck_1}{h_1k'_1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_1}\log\frac{h_1k'_1}{k_1}\right); \tag{140}$$

denn die erste Summe ist dieselbe wie in (137) und die zweite ist $k_1\,\Sigma\, m^{-2}$ mit dem Summationsbereich $m \geqq \frac12 h_1k'_1$, $m \equiv a \pmod{k_1}$, so daß $k_1\,\Sigma\, m^{-2} < ck_1\,.\,k_1^{-2}\,.\,\frac{k_1}{h_1k'_1}$.

Nach (137), (140) ist also (wegen $a \leqq k_1$)

$$V_j < c\sum_{a=1}^{k_1}\sum_{k'_1}\frac{1}{h_1k'^{\frac12 r_1-1}_1}\left(\frac{k_1}{a}+\log\frac{h_1k'_1}{k_1}\right)$$

($j = 1, 2$). Bei festem a summiert man nach (135), (139) über alle $k'_1 \geqq k_1$ mit $h_1k'_1 \equiv (-1)^{j+1}a \pmod{k_1}$; wegen $\{h_1, k_1\} = 1$ ist also

$$V = V_1 + V_2 < c\sum_{a=1}^{k_1}\frac{1}{h_1k_1^{\frac12 r_1-1}}\sum_{u=1}^{\infty}u^{-\frac12 r_1+1}\left(\frac{k_1}{a}+\log\frac{h_1k_1u}{k_1}\right) < \\ < c\sum_{a=1}^{k_1}\frac{1}{h_1k_1^{\frac12 r_1-1}}\left(\frac{k_1}{a}+\log h_1\right) < c\,\frac{\log(2h_1k_1)}{h_1k_1^{\frac12 r_1-2}}.$$

Daher und nach (134) ist für $\gamma = 1, 2$

$$\mathfrak{S}_\gamma < c\sum_{h_1,h_2,k_1,k_2,k'_2}\frac{x^{r-2}\log(2h_1k_1)}{h_1^2k_1^{r_1-4}k_2^{\frac12 r_2}k'^{\frac12 r_2}_2}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2-\beta_1|\,x)^{\frac{z}{2}}}\right); \tag{141}$$

der Summationsbereich wurde früher beschrieben (durch (129), (132) für $\gamma = 1$, durch (130), (133) für $\gamma = 2$; außerdem $\mathfrak{C} \neq \emptyset$). Die Summe rechts in (141) zerfällt in zwei Teilsummen: die Teilsumme $\mathfrak{T}_\gamma$ mit singulären und die Teilsumme $\mathfrak{B}_\gamma$ mit regulären h_1, k_1, h_2, k_2. In $\mathfrak{B}_\gamma$ summiere man über k'_2, was $\sum_{k'_2} k'^{-\frac12 r_2}_2 < c$ ergibt und wende dann Hilfssatz 16, 17 an (mit $i = 1$ auf die Glieder mit $k_2 \leqq k_1$, mit $i = 2$ auf die übrigen). So bekommt man (wenn man in den Gliedern mit $k_2 \leqq k_1$ die Beziehung $h_1 \sim \frac{h_2k_1}{k_2}$ benutzt und zur Abkürzung

$$\left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}}\cdot\frac{2^{2m_1+l}}{2^n\sqrt{x}}\,2^{\frac{1}{10}(m_1+l)} = \mathrm{E}(m_1, m_2, l, n)$$

setzt)

$$\mathfrak{B}_\gamma < c \sum \frac{x^{r-2}(l + m_1 + 1)\,\mathrm{E}(m_1, m_2, l, n)}{2^{2l+m_1(r_1-2)+m_2(\frac{1}{2}r_2-2)}} +$$

$$+ c \sum \frac{x^{r-2}\,(l + m_2 + 1)\,\mathrm{E}(m_1, m_2, l, n)}{2^{2l+m_2(r_1-4)+m_1 \cdot \frac{1}{2}r_2}}.$$

Die Summation über $l \geqq 0$, $2^{n+m_2} < c\sqrt{x}$, $2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$ ergibt (man beachte $\sum\limits_{m_2 \leqq m_1} 2^{-m_2(\frac{1}{2}r_2-3)} \leqq m_1 + 1$, da $r_2 \geqq 6$)

$$\mathfrak{B}_\gamma < \sum_{m_1, m_2} \frac{cx^{r-3}(m_1 + 1)}{2^{m_1(r_1-4-\frac{1}{10})+m_2(\frac{1}{2}r_2-3)}} + \sum_{m_1, m_2} \frac{cx^{r-3}(m_2 + 1)}{2^{m_2(r_1-5)+m_1(\frac{1}{2}r_2-2-\frac{1}{10})}},$$

$$\mathfrak{B}_\gamma < cx^{r-3} \text{ für } \gamma = 1, 2. \tag{142}$$

In $\mathfrak{T}_1$ benutze man (vgl. (132)) die Einschränkung $k'_2 \geqq k_1$, in $\mathfrak{T}_2$ (vgl. (130)) $k'_2 = k_2$. Die Summation über k'_2 ergibt nach (141)

$$\mathfrak{T}_1 < c \sum \frac{x^{r-2} \log (2h_1 k_1)}{h_1^2\, k_1^{r_1+\frac{1}{2}r_2-5}\, k_2^{\frac{1}{2}r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2 - \beta_1|\, x)^{\frac{z}{2}}}\right),$$

$$\mathfrak{T}_2 < c \sum \frac{x^{r-2} \log (2h_1 k_1)}{h_1^2\, k_1^{r_1-4}\, k_2^{r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2 - \beta_1|\, x)^{\frac{z}{2}}}\right);$$

dabei summiert man über die singulären Systeme h_1, k_1, h_2, k_2. Genau so wie im Hilfssatz 15 bekommt man

$$\mathfrak{T}_\gamma < cx^{r-2} \sum \frac{\log\left(2ab\frac{p_v}{m}n\right)}{(abp_v)^2\,(bn)^\sigma\,(bm)^\tau} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{bmnq_{v+1}}{ax}\right)^{\frac{z}{2}}\right),$$

wo

$$\sigma = r_1 + \tfrac{1}{2}r_2 - 5, \quad \tau = \tfrac{1}{2}r_2 - 2 \quad \text{für } \gamma = 1,$$
$$\sigma = r_1 - 4, \qquad \tau = r_2 - 2 \quad \text{für } \gamma = 2;$$

Summationsbereich:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad p_v > 0, \quad m/p_v, \quad n/q_v.$$

Wegen

$$p_v \sim q_v, \quad \sum_{a,b} (\log (ab + 1)\, a^{-2}\, b^{-\sigma-\tau+\frac{z}{2}-2} = c$$

ist in der Bezeichnung des Hilfssatzes 5

$$\mathfrak{T}_1 < c\, H(x), \quad \mathfrak{T}_2 < c\, G(x); \tag{143}$$

aus (142), (143) und Hilfssatz 5 folgt aber die Behauptung.

Hilfssatz 20. $|S_2(x)| + |S_3(x)| < c_{200} x^{r-3}$.

Beweis. Benutzt man die Fußnote[16]), (104) und die Hilfssätze 11, 12, so bekommt man

$$|S_2(x)| + |S_3(x)| < c \sum x^{r-1} \left(\frac{k_2}{h_2}\right)^2 \frac{1}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(|\beta_2 - \beta_1| x)^z}\right).$$

Dabei wird über reguläre Systeme h_1, k_1, h_2, k_2 summiert und aus Symmetriegründen $\left(\frac{k_2}{h_2} \sim \frac{k_1}{h_1}\right)$ darf man sich auf diejenige Teilsumme — sie heiße $\mathfrak{S}$ — der letzten Summe beschränken, für welche $k_2 \leqq k_1$ ist. Hilfssatz 16 und 17 mit $i = 1$ ergibt

$$\mathfrak{S} < c x^{r-1} \sum_{m_1, m_2, l, n} \frac{2^{2m_2}}{2^{2l + r_1 m_1 + r_2 m_2}} \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^z \frac{2^{3m_1 + m_2 + l}}{2^n \sqrt{x}}$$

mit dem Summationsbereich

$$\frac{1}{2^l} \leqq c_{171} \frac{2^{2m_1 - n}}{\sqrt{x}}; \quad 2^{n+m_2} < c\sqrt{x}, \quad 2^{m_2} \leqq 2^{m_1} \leqq \sqrt{x}.$$

Summiert man zunächst über l, dann über n und endlich über m_1, m_2, so folgt

$$\mathfrak{S} < c x^{r-2} \sum_{m_1, m_2, n} \frac{1}{2^{(r_1 - 5) m_1 + (r_2 - 3) m_2}} \left(\frac{2^{n+m_2}}{\sqrt{x}}\right)^z \frac{1}{2^{2n}} <$$

$$< c x^{r-3} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{2^{(r_1 - 5) m_1 + (r_2 - 5) m_2}} < c x^{r-3}.$$

§ 4. Abschätzungen nach unten.

Hilfssatz 21. *Man setze*

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x);$$

dabei sei $F_2(x)$ *die Summe derjenigen Glieder*

$$x^{r-1} A(v, m, n) = \frac{x^{r-1}}{q_v^2 m^{r_2 - 2} n^{r_1 - 2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} m n}{x}\right)^z\right)$$

mit $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v, *für welche entweder* $v > w$ *oder* Max $(m, n) > x^{\frac{4}{11}}$ *oder* q_{v+1} Min $(m, n) < x^{\frac{7}{12}}$ *ist. Dann ist*

$$F_2(x) < c_{210} x^{r-3}.$$

Beweis. 1. Die Summe aller $A(v, m, n)$ mit $v > w$ ist $< c q_{w+1}^{-2} < c x^{-2}$;

2. Die Summe aller $A(v, m, n)$ mit $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v, $m > x^{\frac{4}{11}}$ ist wegen $z \geqq 6$, $\sum\limits_{m/p_v} 1 < c q_v^{\frac{1}{2}}$, $q_v > cm$ kleiner als

$$\sum_{\substack{m/p_v \\ q_v > cx^{\frac{4}{11}}}} q_v^{-2}\, x^{-4\cdot\frac{4}{11}} < c \sum_{q_v > cx^{\frac{4}{11}}} q_v^{-\frac{3}{2}}\, x^{-\frac{16}{11}} < c x^{-\frac{6}{11}-\frac{16}{11}} = cx^{-2}.$$

Derselbe Schluß für $n > x^{\frac{4}{11}}$.

3. Wird über alle v, m, n mit $p_v > 0$, m/p_v, n/q_v, $v \leqq w$, q_{v+1} Min $(m, n) < x^{\frac{7}{12}}$, $m \leqq n$ summiert, so ist wegen

$$\sum_{n/q_v} \left(\frac{n}{q_v}\right)^2 = \sum_{d/q_v} \frac{1}{d^2} < c$$

$$\sum_{v,m,n} A(v, m, n) \leqq \sum_{v,m,n} \frac{1}{q_v^2\, m^{z-2} n^{z-2}} \left(\frac{n}{x^{\frac{5}{12}}}\right)^z \leqq$$

$$\leqq \sum_{v,m,n} \left(\frac{n}{q_v}\right)^2 m^{-z+2}\, x^{-\frac{30}{12}} < c \sum_{v \leqq w} 1 \,.\, x^{-\frac{30}{12}} < cx^{-2},$$

da $\sum\limits_{v \leqq w} 1 < c q_w^{\frac{1}{2}} \leqq c x^{\frac{1}{2}}$.

Derselbe Schluß für $m > n$.

Hilfssatz 22. $N(h_1, k_1, h_2, k_2) = \int\limits_{\mu x}^{x} |\, I(u)\,|^2\, du \geqq 0$, *wo*

$$I(u) = I(u; h_1, k_1, h_2, k_2) = \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{T(s)}{s}\, e^{us}\, dt.$$

Beweis. Es ist

$$|\, I(u)\,|^2 = \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{T(s)}{s}\, e^{us}\, dt \int\limits_{-\mathfrak{C}} \frac{T(s')}{s'}\, e^{us'}\, dt.$$

Integriert man links und rechts nach u, wobei man rechts die Integrationsfolge vertauscht und

$$\int\limits_{\mu x}^{x} e^{u(s+s')}\, du = \frac{e^{x(s+s')} - e^{\mu x(s+s')}}{s + s'}$$

berücksichtigt, so folgt die Behauptung.

Hilfssatz 23. *Es sei* $k_1 \not\equiv 2 \pmod 4$, $k_2 \not\equiv 2 \pmod 4$,

$$\mathrm{Max}\,(k_1, k_2) < x^{\frac{9}{22}}, \tag{144}$$

$$|\beta_2 - \beta_1| < x^{-\frac{13}{24}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right). \tag{145}$$

Dann gilt für $x > c_{230}(\mu)$:

1. *Ist* $|\beta_2 - \beta_1| x < c_{231}(\mu)$, *so ist*

$$N(h_1, k_1, h_2, k_2) > c_{232}(\mu) \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}}. \tag{146}$$

2. *Ist* $|\beta_2 - \beta_1| x > c_{233}(\mu)$, *so ist*

$$N(h_1, k_1, h_2, k_2) > c_{234}(\mu) \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{k_1^{r_1} k_2^{r_2} (|\beta_2 - \beta_1| x)^z}. \tag{147}$$

Beweis. Zur Abkürzung schreiben wir in diesem Hilfssatz N statt $N(h_1, k_1, h_2, k_2)$. Da N nach Hilfssatz 22 mit wachsendem μ nicht wächst, so genügt es, $\mu \geqq \frac{1}{2}$ vorauszusetzen, was wir tun wollen. Endlich sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\left(\text{Symmetrie: } \frac{k_2}{h_2} \sim \frac{k_1}{h_1}\right)$ $k_1 \geqq k_2$. Für jedes reelle t ist

$$\frac{T(s)}{s} e^{us} = f_1(s, u) + f_2(s, u) + f_3(s, u) + f_4(s, u),$$

wo

$$f_1(s, u) = \frac{e^{us}}{\frac{2\pi i}{\alpha_1} \frac{h_1}{k_1}} \cdot \frac{\pi^{\frac{r}{2}} S^{r_1}(h_1, k_1) S^{r_2}(h_2, k_2)}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2} (s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1} (s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}};$$

$$f_2(s, u) = \frac{e^{us} \pi^{\frac{r}{2}} S^{r_1}(h_1, k_1) S^{r_2}(h_2, k_2)}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2} (s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1} (s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{2\pi i}{\alpha_1} \frac{h_1}{k_1}}\right);$$

$$f_3(s, u) = \frac{e^{us}}{s} \left(\Theta^{r_1}(\alpha_1 s)\, \Theta^{r_2}(\alpha_2 s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} S^{r_1}(h_1, k_1) S^{r_2}(h_2, k_2)}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2} (s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1} (s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}}\right);$$

$$f_4(s, u) = - \frac{e^{us} \pi^{\frac{r}{2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{2}r_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}r_2} s^{\frac{r}{2}+1}}.$$

$$R_j = R_j(u) = \int_{\mathfrak{C}} f_j(s, u)\, dt \quad (j = 2, 3, 4);$$

$$R'_1 = R'_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s,u)\,dt; \quad R''_1 = R''_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s,u)\,dt - \int_{\mathfrak{C}} f_1(s,u)\,dt.$$

Dann ist also nach Hilfssatz 22

$$N - \int_{\mu x}^{x} |R'_1(u)|^2\,du = \int_{\mu x}^{x} (|R'_1 - R''_1 + R_2 + R_3 + R_4|^2 - |R'_1|^2)\,du =$$

$$= \int_{\mu x}^{x} (|R'_1 - R''_1 + R_2 + R_3 + R_4| + |R'_1|) \times$$

$$\times (|R'_1 - R''_1 + R_2 + R_3 + R_4| - |R'_1|)\,du.$$

Benutzt man, daß $||\xi| - |\eta|| \leqq |\xi - \eta|$, so folgt

$$|N - \int_{\mu x}^{x} |R'_1(u)|^2\,du| \leqq$$

$$\leqq \int_{\mu x}^{x} (2|R'_1| + |R''_1| + |R_2| + |R_3| + |R_4|) \times \tag{148}$$

$$\times (|R''_1| + |R_2| + |R_3| + |R_4|)\,du.$$

Für $t \in \mathfrak{C}$, $\mu x \leqq u \leqq x$ gelten folgende Abschätzungen: mit Benutzung der Hilfssätze 11, (89), (91) und 8 bekommt man wegen $|e^{us}| \leqq e$

$$\left|s - \frac{2\pi i}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}\right| < c\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{k_1\sqrt{x}}\right) < \frac{c}{k_1\sqrt{x}};$$

$$\left|\frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{2\pi i}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}}\right| < c\frac{k_1^2}{h_1^2}\left|s - \frac{2\pi i}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}\right| < \frac{ck_1}{h_1^2\sqrt{x}} < \frac{ck_1}{h_1\sqrt{x}};$$

$$|f_2(s,u)| < c\frac{k_1}{h_1}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}k_2^{\frac{1}{2}r_2}(1 + x|t-\beta_1|)^{\frac{1}{2}r_1}(1 + x|t-\beta_2|)^{\frac{1}{2}r_2}}. \tag{149}$$

Weiter $k_j\sqrt{1 + x|t - \beta_j|} < ck_j\,x^{\frac{1}{2}}\,k_j^{-\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{1}{4}} < cx^{\frac{1}{2}-\frac{1}{22}}$ (nach (144)), also

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < c\sqrt{\frac{k_j}{h_j}} < c\,\frac{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{22}}}{\sqrt{k_j(1 + x|t - \beta_j|)}},$$

$$|f_4(s,u)| < c\frac{k_1}{h_1}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{22}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}k_2^{\frac{1}{2}r_2}(1 + x|t-\beta_1|)^{\frac{1}{2}r_1}(1 + x|t-\beta_2|)^{\frac{1}{2}r_2}}. \tag{150}$$

Nach (144), (145) ist für $l = 1, 2$

$$1 > \frac{k_l}{x^{\frac{9}{22}}} > \frac{k_l}{x^{\frac{11}{24}}}, \quad \frac{1}{|\beta_2 - \beta_1|\,x} > \frac{k_l}{x^{\frac{11}{24}}}.$$

Wird also im Beweis dieses Hilfssatzes zur Abkürzung

$$\mathfrak{M} = \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{|\beta_2 - \beta_1|\, x}\right)$$

eingeführt, so ist

$$\mathfrak{M} > \frac{k_l}{x^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}} \quad \text{für } l = 1, 2; \tag{151}$$

nach Hilfssatz 11 (90) ist aber (alles für $x > c$)

$$|f_3(s, u)| < c \frac{k_1}{h_1} x^{\frac{r}{2}} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{k_j^{\frac{1}{2} r_j} x^{\frac{1}{4} r_l} (1 + x\,|t - \beta_j|)^{\frac{1}{2} r_j}}.$$

wo $l = 1$ für $j = 2$, $l = 2$ für $j = 1$. Also nach (151)

$$|f_3(s, u)| < c \frac{k_1}{h_1} x^{\frac{r}{2}} \sum_{j=1}^{2} \frac{x^{\frac{1}{4} r_l - \frac{1}{48} r_l} \mathfrak{M}^{\frac{1}{2} r_l}}{k_j^{\frac{1}{2} r_j} k_l^{\frac{1}{2} r_l} x^{\frac{1}{4} r_l} (1 + x\,|t - \beta_j|)^{\frac{1}{2} r_j}},$$

$$|f_3(s, u)| < c \frac{k_1}{h_1} x^{\frac{r}{2} - \frac{z}{48}} \cdot \frac{\mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2} r_1} k_2^{\frac{1}{2} r_2}} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 + x\,|t - \beta_j|)^{\frac{1}{2} r_j}}. \tag{152}$$

Für *jedes* reelle t und $\mu x \leqq u \leqq x$ ist nach Hilfssatz 8

$$|f_1(s, u)| < c \frac{k_1}{h_1} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2} r_1} k_2^{\frac{1}{2} r_2} (1 + x\,|t - \beta_1|)^{\frac{1}{2} r_1} (1 + x\,|t - \beta_2|)^{\frac{1}{2} r_2}}. \tag{153}$$

Ist

$$\operatorname*{Min}_{j=1,2} |t - \beta_j| < \frac{\pi}{2} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdot \frac{1}{k_1 \sqrt{x}}, \tag{154}$$

so ist nach (145)

$$\operatorname*{Max}_{j=1,2} |t - \beta_j| < \frac{\pi}{2} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdot \frac{1}{k_1 \sqrt{x}} + \frac{1}{k_1 x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}}} <$$

$$< \operatorname*{Min}_{j=1,2} \frac{\pi}{\alpha_j} \frac{1}{k_j \sqrt{x}} \quad \text{für } x > c,$$

also $t \in \mathfrak{C}$. Liegt also t nicht in $\mathfrak{C}$, so ist

$$\operatorname*{Min}_{j=1,2} |t - \beta_j| \geqq \frac{\pi}{2} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdot \frac{1}{k_1 \sqrt{x}}. \tag{155}$$

Daher und nach (153) ist

$$|R''_1| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, u)\, du - \int_{\mathfrak{C}} f_1(s, u)\, du\right| <$$

$$< c \frac{k_1}{h_1} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2} r_1} k_2^{\frac{1}{2} r_2}} \int_{\mathfrak{D}} \frac{dt}{(1 + x\,|t - \beta_1|)^{\frac{1}{2} r_1} (1 + x\,|t - \beta_2|)^{\frac{1}{2} r_2}}.$$

wo $\mathfrak{D}$ der Bereich (155) ist. Das letzte Integral ist also kleiner als

$$c\left(\frac{k_1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}r_1}\int\limits_{\mathfrak{D}}\frac{dt}{(1+x\,|\,t-\beta_2\,|)^{\frac{1}{2}r_1}} < c\left(\frac{k_1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}r_1}\cdot\frac{1}{x}\int\limits_{c\frac{\sqrt{x}}{k_1}}^{\infty}\frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{1}{2}r_1}} <$$

$$< \frac{c}{x}\cdot\left(\frac{k_1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}r-1} < \frac{c}{x}\left(\frac{k_1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{z}{2}} < \frac{c}{x}\,\mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}\,x^{-\frac{z}{48}}$$

(nach (151)). Also ist wegen $z \geqq 6$

$$|\,R''_1\,| < c\,\frac{k_1}{h_1}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{8}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2^{\frac{1}{2}r_2}}\,\mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}. \tag{156}$$

Nach (149), (150), (152) ist wegen Hilfssatz 12 auch

$$|\,R_2\,| + |\,R_3\,| + |\,R_4\,| < c\,\frac{k_1}{h_1}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{8}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2^{\frac{1}{2}r_2}}\,\mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}. \tag{157}$$

Nach (153) und Hilfssatz 12 ist

$$|\,R'_1\,| < c\,\frac{k_1}{h_1}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1}\,k_2^{\frac{1}{2}r_2}}\,\mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}. \tag{158}$$

Aus (148), (156), (157), (158) folgt endlich

$$N > \int\limits_{\mu x}^{x}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(s,\,u)\,dt\right|^2 du - c\,\frac{k_1^2}{h_1^2}\,\frac{x^{r-1-\frac{1}{4}}}{k_1^{r_1}\,k_2^{r_2}}\,\mathfrak{M}^{z}. \tag{159}$$

Für $\delta > 0$ ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^s}{s^\delta}\,dt = \frac{2\pi}{\Gamma(\delta)} > 0;$$

für $u > 0$ und reelles β ist also

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{us}}{(s-i\beta)^\delta}\,dt = \frac{e^{iu\beta}\,u^{\delta-1}\,2\pi}{\Gamma(\delta)}. \tag{160}$$

Es ist (bei geradlinigem Integrationsweg)

$$\left|\frac{1}{(s-i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_2}} - \frac{1}{(s-i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}}\right| = \left|\frac{1}{2}\,r_2\int\limits_{s-i\beta_1}^{s-i\beta_2}\frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}r_2+1}}\right| < c\,|\,\beta_2-\beta_1\,|\,x^{\frac{1}{2}r_2+1}. \tag{161}$$

Wird für einen Augenblick

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{us}\,dt}{(s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}(s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}} \tag{162}$$

gesetzt, so ist nach (161), (162) und Hilfssatz 12

$$\left| L - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{su}\,dt}{(s - i\beta_1)^{\frac{r}{2}}} \right| = \left| L - \frac{e^{iu\beta_1} u^{\frac{r}{2}-1} 2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \right| <$$

$$< c \mid \beta_2 - \beta_1 \mid x^{\frac{1}{2}r_2+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}r_1}\,dt}{(1 + x \mid t - \beta_1 \mid)^{\frac{1}{2}r_1}} < c \mid \beta_2 - \beta_1 \mid x^{\frac{r}{2}}.$$

Für $\mu x \leqq u \leqq x$ ist daher (wegen $\mu \geqq \frac{1}{2}$)

$$\mid L \mid > c_{235}\, x^{\frac{r}{2}-1} - c_{236} \mid \beta_2 - \beta_1 \mid x \,.\, x^{\frac{r}{2}-1}. \tag{163}$$

Ist also

$$\mid \beta_2 - \beta_1 \mid x < \operatorname{Min}\left(1, \frac{c_{235}}{2c_{236}}\right) \text{ (also } \mathfrak{M} = 1\text{)}, \tag{164}$$

so ist $\mid L \mid > \frac{1}{2} c_{235} x^{\frac{r}{2}-1}$; (162), die Definition von $f_1(s, u)$ und Hilfssatz 8 geben

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, u)\,dt \right| > c_{237} \frac{k_1}{h_1} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2}},$$

also nach (159)

$$N > ((1 - \mu)\, c^2_{237} - x^{-\frac{1}{8}} c_{239}) \frac{k_1^2}{h_1^2} \frac{x^{r-1}}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}},$$

woraus (146) für $x > c_{240}(\mu)$ folgt.

Wir wollen nun zeigen, daß für jedes reelle t

$$\left| \frac{1}{(s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}(s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}} - \frac{1}{(s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}(i\beta_1 - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}} - \frac{1}{(i\beta_2 - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}(s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}} \right| < \tag{165}$$

$$< c \left| \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^{\frac{1}{2}r_2+1}(s - i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1-1}} \right| + c \left| \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)^{\frac{1}{2}r_1+1}(s - i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2-1}} \right|.$$

Ist nämlich $\operatorname{Min}_{j=1,2} \mid s - i\beta_j \mid \geqq \frac{1}{2} \mid \beta_2 - \beta_1 \mid$, so ist (165) klar. Ist aber z. B. $\mid s - i\beta_1 \mid < \frac{1}{2} \mid \beta_2 - \beta_1 \mid$, so ist $\mid s - i\beta_2 \mid > \frac{1}{2} \mid \beta_2 - \beta_1 \mid$ und das dritte Glied links in (165) hat die gewünschte Größenordnung. Was die beiden ersten Glieder betrifft, so ist bei geradlinigem Integrationsweg, wie wir sofort zeigen werden,

$$\left|\frac{1}{(s-i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}}-\frac{1}{(i\beta_1-i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}}\right| = \left|\frac{r_2}{2}\int\limits_{i\beta_1-i\beta_2}^{s-i\beta_2}\frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}r_2+1}}\right| < c\,\frac{|s-i\beta_1|}{|\beta_2-\beta_1|^{\frac{1}{2}r_2+1}}. \quad (166)$$

woraus (165) folgt. (166) ergibt sich aber so: auf dem Integrationswege liegt $\mathfrak{J}\tau$ zwischen $\beta_1-\beta_2$ und $\mathfrak{J}s-\beta_2$; aber $|\mathfrak{J}s-\beta_1| \leqq |s-i\beta_1| < \frac{1}{2}|\beta_2-\beta_1|$, woraus $|\mathfrak{J}\tau| > \frac{1}{2}|\beta_2-\beta_1|$ folgt; das ergibt aber (166).

Man setze nun für einen Augenblick

$$A(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{us}\,dt}{(s-i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}(s-i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}}. \quad (167)$$

$$B(u) = \frac{e^{iu\beta_1}u^{\frac{1}{2}r_1-1}\,.\,2\pi}{(i\beta_1-i\beta_2)^{\frac{1}{2}r_2}\Gamma(\frac{1}{2}r_1)}. \quad (168)$$

$$C(u) = \frac{e^{iu\beta_2}u^{\frac{1}{2}r_2-1}\,.\,2\pi}{(i\beta_2-i\beta_1)^{\frac{1}{2}r_1}\Gamma(\frac{1}{2}r_2)}. \quad (169)$$

Nach (160), (165) ist

$$|A(u)-B(u)-C(u)| < c\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}r_j-1}\,dt}{|\beta_2-\beta_1|^{\frac{1}{2}r_l+1}(1+x\,|t-\beta_j|)^{\frac{1}{2}r_j-1}}$$
(170)

($l=2$ für $j=1$, $l=1$ für $j=2$). Es sei nun $\lambda \geqq 1$ (λ wird bald fixiert werden) und man setze bis zum Schluß des Beweises von Hilfssatz 23 voraus, daß

$$|\beta_2-\beta_1|\,x > \lambda \quad \left(\text{also } \mathfrak{M} = \frac{1}{|\beta_2-\beta_1|\,x}\right) \quad (171)$$

gilt. Nach (170), Hilfssatz 12 und (171) ist

$$|A(u)-B(u)-C(u)| < c\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{(|\beta_2-\beta_1|\,x)^{\frac{z}{2}+1}} < \frac{c}{\lambda}\,x^{\frac{r}{2}-1}\,\mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}. \quad (172)$$

Die Amplitude von $B(u)$ hat die Form Konst $+ u\beta_1$, diejenige von $C(u)$ hat die Form Konst $+ u\beta_2$ (für $u > 0$). Wegen $\beta_2 \neq \beta_1$ gibt es unendlich viele positive u, für welche die Amplituden von $B(u)$, $C(u)$ gleich sind; diese Werte von u sind $u_a = u_0 + \frac{2\pi a}{|\beta_2-\beta_1|}$ ($a = 0, 1, \ldots$), wenn u_0 der kleinste unter ihnen ist. Es sei (für $a = 0, 1, 2, \ldots$)

$$K(a) = \left\langle u_a - \frac{\pi}{2|\beta_2-\beta_1|},\; u_a + \frac{\pi}{2|\beta_2-\beta_1|}\right\rangle;$$

$\mathfrak{N}$ sei der Durchschnitt des Intervalls $\langle \mu x, x\rangle$ mit der Vereinigungsmenge aller Intervalle $K(a)$. Liegt u in $\mathfrak{N}$, so unterscheiden sich die Amplituden von $B(u)$, $C(u)$ höchstens um $\frac{1}{2}\pi$; wegen $|\beta_2 - \beta_1|\, x > 1$, $\mu \geqq \frac{1}{2}$ ist also nach (168), (169)

$$| B(u) + C(u) | \geqq \mathrm{Max}\,(| B(u) |, | C(u) |) > c \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{(|\beta_2 - \beta_1|x)^{\frac{z}{2}}} = \\ = c x^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}. \tag{173}$$

Nach (172), (173) ist also

$$| A(u) | > \left(c_{241} - \frac{c_{242}}{\lambda}\right) x^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}. \tag{174}$$

Die Länge eines jeden Intervalles K_a und ebenso der Abstand je zweier benachbarten Intervalle K_a ist gleich

$$\frac{\pi}{|\beta_2 - \beta_1|} < \frac{\pi x}{\lambda}$$

(vgl. 171). Daher ist das Maß von $\mathfrak{N}$ offenbar größer als $\frac{1}{3}(1 - \mu)\, x$, wenn $\lambda \geqq c_{243}(\mu)$. Wählt man also

$$\lambda = \mathrm{Max}\left(1, 2 \frac{c_{242}}{c_{241}}, c_{243}(\mu)\right) = c_{233}(\mu),$$

so gilt: ist $|\beta_2 - \beta_1|\, x > c_{233}(\mu)$, so ist nach (174)

$$| A(u) | > \tfrac{1}{2} c_{241}\, x^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{M}^{\frac{z}{2}} \text{ für } u \in \mathfrak{N}$$

also, nach der Definition von $f_1(s, u)$, nach (167) und Hilfssatz 8,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, u)\, \mathrm{d}t \right| > c_{244} \frac{k_1}{h_1} \frac{x^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{M}^{\frac{z}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}r_1} k_2^{\frac{1}{2}r_2}} \text{ für } u \in \mathfrak{N};$$

da das Maß von $\mathfrak{N}$ größer als $\frac{1}{3}(1 - \mu)\, x$ ist und $\mathfrak{N}$ im Intervall $\langle \mu x, x\rangle$ liegt, so ist also

$$\int_{\mu x}^{x} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, u)\, \mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}u > \frac{c_{244}^2}{3} (1 - \mu) \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{x^{r-1} \mathfrak{M}^z}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}}.$$

Daraus und aus (159), (171) folgt aber

$$N > \left(\frac{c_{244}^2}{3} (1 - \mu) - c_{245}\, x^{-\frac{1}{8}}\right) \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{k_1^{r_1} k_2^{r_2} (|\beta_2 - \beta_1|\, x)^z},$$

woraus (147) für $x > c_{246}(\mu)$ folgt.

Hilfssatz 24. $S(x) + S_2(x) > c_{250}(\mu) \,.\, F_1(x)$ *für* $x > c_{251}(\mu)$.

Beweis. $F_1(x)$ wurde in Hilfssatz 21 eingeführt. Es ist

$$S(x) + S_2(x) = \sum N(h_1, k_1, h_2, k_2)$$

mit dem Summationsbereich

$$h_j > 0, \quad 0 < k_j \leqq \sqrt{x}, \ \{h_j, k_j\} = 1 \quad (j = 1, 2). \tag{175}$$

Nach Hilfssatz 22 ist $N(h_1, k_1, h_2, k_2) \geqq 0$. Also genügt es offenbar zu zeigen: Ist $x > c_{252}(\mu)$, so läßt sich jedem System v, m, n mit

$$p_v > 0, \quad m/p_v, \quad n/q_v, \quad v \leqq w, \quad \operatorname{Max}(m, n) \leqq x^{l_1}, \tag{176}$$
$$q_{v+1} \operatorname{Min}(m, n) \geqq x^{l_2}$$

ein System h_1, k_1, h_2, k_2 so zuordnen, daß es *erstens* höchstens $c_{253}(\mu)$ Systeme v, m, n mit (176) gibt, welchen dasselbe System h_1, k_1, h_2, k_2 zugeordnet wird, und daß *zweitens*

$$N(h_1, k_1, h_2, k_2) > \frac{c_{254}(\mu)\, x^{r-1}}{q_v^2 n^{r_1-2} m^{r_2-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^z\right). \tag{177}$$

Diese Zuordnung wird folgendermaßen hergestellt: man wähle zunächst eine ungerade Primzahl $\mathfrak{p} = c_{255}(\mu)$ mit

$$\mathfrak{p} > 4\, \frac{c_{233}(\mu)}{c_{231}(\mu)} \tag{178}$$

($c_{230}(\mu)$ bis $c_{234}(\mu)$ sind die Konstanten des Hilfssatzes 23). Aus (176) folgt $\{p_v, q_v\} = 1$, $p_v = mn'$, $q_v = nm'$ (n', m' ganz),

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{n'}{n} - \frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{m'}{m}\right| = \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{q_v}{mn}\left|\frac{p_v}{q_v} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|,$$

$$\frac{\pi}{\alpha_1 mnq_{v+1}} < \left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{n'}{n} - \frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{m'}{m}\right| < \frac{2\pi}{\alpha_1 mnq_{v+1}}. \tag{179}$$

Ist $n \equiv 2 \pmod 4$ (dann ist m ungerade), so sei $K_1 = \frac{1}{2}n$, $H_2 = 2m'$, sonst $K_1 = n$, $H_2 = m'$. Ist $m \equiv 2 \pmod 4$ (dann ist n ungerade), so sei $K_2 = \frac{1}{2}m$, $H_1 = 2n'$, sonst $K_2 = m$, $H_1 = n'$. Ist nun

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{1}{mnq_{v+1}} < \frac{c_{231}(\mu)}{x}, \tag{180}$$

so sei $h_1 = H_1$, $k_1 = K_1$, $h_2 = H_2$, $k_2 = K_2$. Ist aber

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{1}{mnq_{v+1}} \geqq \frac{c_{231}(\mu)}{x}, \tag{181}$$

so setze man:

1. Falls $\mathfrak{p}/K_1$ (also nicht $\mathfrak{p}/K_2$):

$$h_1 = H_1, \quad k_1 = \frac{K_1}{\mathfrak{p}}, \quad h_2 = H_2\mathfrak{p}, \quad k_2 = K_2;$$

2. Falls $\mathfrak{p}/K_2$ (also nicht $\mathfrak{p}/K_1$):

$$h_1 = H_1\mathfrak{p}, \quad k_1 = K_1, \quad h_2 = H_2, \quad k_2 = \frac{K_2}{\mathfrak{p}};$$

3. Falls nicht $\mathfrak{p}/K_1K_2$:

$$h_1 = H_1\mathfrak{p}, \quad k_1 = K_1, \quad h_2 = H_2\mathfrak{p}, \quad k_2 = K_2.$$

Da sich h_1, k_1, h_2, k_2 von den Zahlen n', n, m', m nur um einen der Faktoren $1, 2, \mathfrak{p}, 2\mathfrak{p}, \frac{2}{\mathfrak{p}}, \frac{\mathfrak{p}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\mathfrak{p}}, \frac{1}{2\mathfrak{p}}$ unterscheiden, so gibt es zu jedem System h_1, k_1, h_2, k_2 tatsächlich höchstens c Systeme v, m, n, welchen eben dieses System h_1, k_1, h_2, k_2 zugeordnet ist.

Zweitens: aus unserer Definition der h_j, k_j und aus (176) folgt sofort

$$h_j > 0, \quad k_j > 0, \quad \{h_j, k_j\} = 1, \quad k_j \not\equiv 2 \pmod 4 \quad (j = 1, 2). \tag{182}$$

Weiter

$$\operatorname{Max}(k_1, k_2) \leq \operatorname{Max}(m, n) \leq x^{\frac{4}{11}} < x^{\frac{9}{22}} < x^{\frac{1}{2}}. \tag{183}$$

Wird $V = 1$ gesetzt, wenn (180) gilt und $V = \mathfrak{p} = c_{255}(\mu)$, wenn (181) gilt, so ist nach (179)

$$\frac{\pi V x}{\alpha_1 mn\, q_{v+1}} < |\beta_2 - \beta_1|\, x < \frac{4\pi V x}{\alpha_1 mn\, q_{v+1}}. \tag{184}$$

Daraus folgt erstens

$$\begin{aligned} |\beta_2 - \beta_1| &< \frac{c(\mu)}{nm\, q_{v+1}} = \frac{c(\mu)}{q_{v+1} \operatorname{Min}(m, n) \operatorname{Max}(m, n)} < \\ &< c(\mu)\, x^{-\frac{7}{12}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right) < x^{-\frac{13}{24}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right) \end{aligned} \tag{185}$$

für $x > c(\mu)$.

Beachtet man (182), (183), (185) und Hilfssatz 23, so folgt für $x > c(\mu)$: Gilt (180), so ist nach (184) $|\beta_2 - \beta_1|\, x < c_{231}(\mu)$, also nach Hfs. 23

$$\begin{aligned} N(h_1, k_1, h_2, k_2) &> c_{232}(\mu) \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{k_1^{r_1} k_2^{r_2}} > \\ &> c(\mu) \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{n^{r_1} m^{r_2}} = c(\mu) \frac{x^{r-1}}{p_v^2\, n^{r_1 - 2}\, m^{r_2 - 2}}; \end{aligned}$$

gilt aber (181), so ist nach (184), (178)

$$|\beta_2 - \beta_1|\, x > \frac{\mathfrak{p}}{4} c_{231}(\mu) > c_{233}(\mu).$$

also nach Hfs. 23 und (184)

$$N(h_1, k_1, h_2, k_2) > c_{294}(\mu) \left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \frac{x^{r-1}}{k_1^{r_1} k_2^{r_2} (|\beta_2 - \beta_1| x)^z} >$$
$$> c(\mu) \frac{x^{r-1}}{p_r^2 n^{r_1-2} m^{r_2-2}} \left(\frac{mn\, q_{v+1}}{x}\right)^z.$$

Wegen $p_v \sim q_v$ gilt also (177) stets für $x > c(\mu)$.

Beweis des Hauptsatzes 2. Nach (103) und nach den Hilfssätzen 14, 15, 18, 19, 20, wo $\lambda = 1$ gesetzt wird (sodaß jedes $c(\lambda)$ zu einem c wird) ist

$$M_Q(x) - M_Q(\mu x) < c x^{r-3} + c F(x) < c F(x) \text{ für } x > c \tag{186}$$

(denn nach Hilfssatz 1 ist $F(x) \geqq F'(x) \geqq x^{r-3}$).

Zweitens: Nach (103) und den Hilfssätzen 14, 15, 18, 19, 24 ist für jedes $\lambda \geqq 1$ und jedes μ mit $0 \leqq \mu < 1$

$$M_Q(x) - M_Q(\mu x) > c_{300}(\mu) F_1(x) -$$
$$- (c_{301} + \lambda c_{302}) x^{r-3} - \frac{c_{303}}{\lambda} F(x) \text{ für } x > c_{304}(\lambda, \mu).$$

Man wähle nun

$$\lambda = \mathrm{Max}\left(\frac{2c_{303}}{c_{300}(\mu)}, 1\right)$$

und benutze Hilfssatz 21; es kommt heraus

$$M_Q(x) - M_Q(\mu x) > \tfrac{1}{2} c_{300}(\mu) F(x) - c_{305}(\mu) x^{r-3} \text{ für } x > c_{306}(\mu). \tag{187}$$

Nach Hilfssatz 6 ist aber

$$x^{r-3} < c_{307}(\mu) (M_Q(x) - M_Q(\mu x)) \tag{188}$$

für $x > c_{308}(\mu)$. Nach (187), (188) ist

$$(1 + c_{305}(\mu) c_{307}(\mu)) (M_Q(x) - M_Q(\mu x)) > \tfrac{1}{2} c_{300}(\mu) F(x) \tag{189}$$

für $x > c_{309}(\mu)$ [17]). Aus (186), (189) folgt aber der Hauptsatz 2.

---

[17]) Hier sieht man die Bedeutung des — übrigens fast trivialen — Hilfssatzes 6, dessen elementarer Beweis sich scharf von den analytischen Beweisen der übrigen Hilfssätze unterscheidet. Übrigens kann man Sätze von der Art des Hilfssatzes 6 auch analytisch beweisen; vgl. A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden V, Acta Arithmetica 1 (1936), 222—283, insbes. S. 260—264.

OBSAH.

Příspěvek k teorii mřížových bodů v elipsoidech $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leq x$.

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

Buďte r_1, r_2 celá čísla, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ iracionální; $r = r_1 + r_2$, $z = \operatorname{Min}(r_1, r_2) \geq 6$. Položme dále

$$Q(u) = \alpha_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2 (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Budiž $A_Q(x)$ počet mřížových bodů v elipsoidu $Q(u) \leq x$, budiž $V_Q(x)$ objem tohoto elipsoidu,

$$\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x), \quad M_Q(x) = \int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\, dy \; (x > 0).$$

Buďte $\frac{p_v}{q_v}$ přibližné zlomky řetězce pro číslo $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$; položme

$$F_Q(x) = x^{r-1} \sum_{v,m,n} \frac{1}{q_v^2\, m^{r_2-2} n^{r_1-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1}\, mn}{x}\right)^z\right).$$

Při tom v probíhá všechna celá čísla ≥ 0, pro něž je $p_v > 0$; při pevném v probíhá m resp. n všechny kladné dělitele čísla p_v resp. q_v. Hlavním výsledkem této práce jest pak tato věta: Funkce $F_Q(x)$ vyjadřuje průběh funkce $M_Q(x)$ tak přesně, že jest

$$0 < \liminf_{x \to \infty} \frac{M_Q(x)}{F_Q(x)} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{M_Q(x)}{F_Q(x)} < +\infty. \tag{1}$$

Poněkud obecněji dokazuji, že vztahy (1) platí též, nahradíme-li $M_Q(x)$ funkcí

$$\int_{\mu x}^{x} \mathsf{P}_Q^2(y)\, dy,$$

kde μ $(0 \leq \mu < 1)$ je libovolná konstanta. Poměrně jednoduchý tvar funkce $F_Q(x)$ dovoluje odvoditi řadu důsledků o průběhu funkce $M_Q(x)$, jež jsou dokázány v § 1 této práce.

RÉSUMÉ.

Contribution à la théorie des points à coordonnées entières dans les ellipsoides $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$.

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

Soient r_1, r_2 des nombres entiers, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ un nombre irrationel; $r = r_1 + r_2$, $z = \mathrm{Min}\,(r_1, r_2) \geqq 6$. Posons

$$Q(u) = \alpha_1\,(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2\,(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Soit $A_Q(x)$ le nombre des points à coordonnées entières, situés dans l'ellipsoide $Q(u) \leqq x$, soit $V_Q(x)$ le volume de cet ellipsoide,

$$\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x),\ M_Q(x) = \int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,\mathrm{d}y\ (x > 0).$$

Désignons par $\frac{p_v}{q_v}$ $(v = 0, 1, \ldots)$ les réduites de la fraction continue du nombre $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$; posons

$$F_Q(x) = x^{r-1} \sum_{v,m,n} \frac{1}{q_v^2\, m^{r_2-2} n^{r_1-2}}\ \mathrm{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^z\right).$$

Ici v parcourt tous les nombres entiers $\geqq 0$ tels que $p_v > 0$; v étant donné, m resp. n parcourt tous les diviseurs positifs de p_v resp. de q_v. Le résultat principal peut être énoncé comme il suit: la fonction $F_Q(x)$ représente l'allure de la fonction $M_Q(x)$ avec une telle précision que l'on ait

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{M_Q(x)}{F_Q(x)} \leqq \limsup_{x\to\infty} \frac{M_Q(x)}{F_Q(x)} < +\infty. \tag{1}$$

D'une manière plus générale, je démontre que (1) reste valable, si l'on y remplace $M_Q(x)$ par la fonction

$$\int_{\mu x}^{x} \mathsf{P}_Q^2(y)\,\mathrm{d}y,$$

μ étant une constante quelconque telle que $0 \leqq \mu < 1$. La fonction $F_Q(x)$ n'étant pas trop compliquée, la formule (1) permet de démontrer de nombreux résultats concernant l'allure de la fonction $M_Q(x)$; on trouve ces résultats dans le § 1^er^ de ce Mémoire.