Vojtěch Jarník
O mřížových bodech v rovině

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXIII (1924), No. 36, 23 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500506

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXIII. ČÍSLO 36.

O mřížových bodech v rovině.

Napsal
Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 24. října 1924.

Buďtež dány v rovině dvě pravoúhlé osy u, v. Budiž $x > 0$; označme $A(x)$ počet mřížových bodů (t. j. bodů s celočíselnými souřadnicemi) uvnitř a na obvodě kružnice $u^2 + v^2 = x$, při čemž body na obvodě kružnice se počítají s vahou $1/2$. Sierpiński [1]) dokázal po prvé větu:

Věta (α). Píšeme-li

$$A(x) = \pi x + Q(x),$$

jest

$$Q(x) = O(x^{1/3}).$$

Tento výsledek byl zlepšen teprve v roce 1922 van der Corputem,[2]) jenž dokázal větu:

Věta (β). Existuje jistá konstanta $\Theta < \frac{1}{3}$ tak, že

$$Q(x) = O(x^{\Theta}).$$

Tím jest řád funkce $Q(x)$ odhadnut shora; ale též zdola je možno nalézti jisté odhady. První výsledky v tomto směru podali Landau [3]) a Hardy [4]) v r. 1915. Cituji v tomto směru pouze tuto větu z jedné z posledních prací Landauových: [5])

[1]) O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych, Prace matem.-fizyczne, sv. 17; str. 77—118; 1906.

[2]) Neue zahlentheoretische Abschätzungen, Mathematische Annalen, sv. 89, str. 215—254.

[3]) Über die Gitterpunkte in einem Kreise II., Göttinger Nachrichten, 1915, str. 161—171.

[4]) On the expression of a number as the sum of two squares, The quarterly Journal of pure and applied Mathematics, sv. XLVI (1915), str. 263—283.

[5]) Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Göttinger Nachrichten 1924.

Věta (γ): Lze nalézti dvě konstanty $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ tak, že každá z nerovnin

$$\pm Q(x) > K_1 x^{1/4}$$

má v intervalu $\tau < x < \tau + K_2 \sqrt{\tau}$ $(\tau > 1)$ řešení.

Zobecnění vět (α), (β), (γ) může se díti dvojím směrem. Především jest možno, zobecniti tyto věty na obory, omezené obecnějšími křivkami než kružnice; věty (α)[6]) a (β)[7]) zobecnil v tomto směru van der Corput; zobecnění věty (γ) v tomto směru (spolu s připojením několika dodatků) jest předmětem této práce.

Zobecnění tato mohou však sledovati ještě jiný směr. Jest totiž, položíme-li $U(n)$ = počtu vyjádření čísla n jako součtu dvou čtverců, $A(x) = \sum'_{0 \leqq n \leqq x} U(n)$, při čemž čárka u součtového znamení značí, že pro celistvé x jest místo $U(x)$ vzíti pouze $\frac{1}{2} U(x)$. $A(x)$ jest tedy sumatorická funkce Dirichletovy řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^s}$, jež hoví, jak známo, jisté funkcionální rovnici, analogické rovnici Riemannově pro funkci $\zeta(s)$. Jest tedy též možno, ptáti se po zobecnění vět (α), (β) a (γ) na obecnější řady Dirichletovy, hovící obdobným funkcionálním rovnicím. Příslušné zobecnění vět (α)[8]) a (γ)[9]) v tomto směru provedl Landau.

Tato práce jest rozdělena na tři paragrafy:

V § 1. vytýkám předpoklady o uvažovaných křivkách a odvozuji jisté identity pro $A(x)$ a $\int_1^x A(y)\,dy$. Identity toho druhu byly dříve odvozovány — dosti namahavě — pomocí t. zv. Pfeifferovy methody [10]); jak však Landau [11]) ukázal, lze je jednodušeji odvoditi přímo ze známé Dirichletovy formule z theorie řad Fourierových. Moje odvození identity I pro $A(x)$ je zcela obdobné Landauovu odvození analogické identity pro kružnici.[12]) Identitu II pro $\int_1^x A(y)\,dy$ odvozuji integrací z identity I.,

---

[6]) Over roosterpunten in het platte vlak (Noordhoff, Groningen 1919); Über Gitterpunkte in der Ebene (Mathem. Annalen, sv. 81, str. 1—20.). Srovnej též: Landau a van der Corput, Über Gitterpunkte in ebenen Bereichen, Göttinger Nachrichten 1920.

[7]) Viz práci citovanou pod 2).

[8]) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen II., Göttinger Nachrichten, 1915, str. 209—243.

[9]) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, IV., Göttinger Nachrichten 1924.

[10]) Viz na př. pojednání od Landaua a v. d. Corputa, citované sub 6.

[11]) Die Bedeutungslosigkeit der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie, Monat h. für Math. u. Physik, 34.

[12]) Viz § 3 pojednání, citovaného sub 11).

což je pohodlnější, než dokazovati ji přímo z Dirichletovy formule. Abych dokázal, že jest dovoleno integrovati jisté řady člen po členu, odvozuji v 1. pomocné větě jistou vlastnost Dirichletovy formule. Ježto podmínky pro integraci řad člen po členu jsou jednodušší, užíváme-li Lebesgueovy definice integrálu, používám jí důsledně v této práci (ostatně mají všechny integrály, jež se vyskytují, smysl i tenkráte, beru-li je ve smyslu Riemannově).

V § 2 odvozuji asymptotickou formuli pro dvojné integrály, vyskytující se v identitě pro $A(x)$.

V § 3 odvozuji pak hlavní věty II., III. a IV. Společným klíčem k nim je 4. pomocná věta. Věta III., bezprostřední to důsledek věty II., jest přímým zobecněním Landauovy věty (γ). Pro úplnost dokazuji v tomto paragrafu také větu I. (jež je známa v případech ještě obecnějších,[13]) zobecnění to věty (α) na náš případ.

§ 1. Odvození identit pro $A(x)$ a $\int_1^x A(y)\,dy$.

Buďtež dány v rovině dvě pravoúhlé osy u, v a jednoduchá, spojitá, uzavřená, konvexní křivka L, obsahující počátek souřadnic uvnitř. — Označme $L(x)$ křivku, jež vzniká z L homothetickou transformací v poměru $\sqrt{x} : 1$ vzhledem k počátku, t. j. geometrické místo bodu $(\sqrt{x}\,u, \sqrt{x}\,v)$, když bod (u, v) probíhá křivku L (předpokládám zde i v dalším vždy $x > 1$). Budiž $A(x)$ počet mřížových bodů uvnitř a na obvodě $L(x)$, při čemž mřížové body, položené na $L(x)$, počítám s vahou $\frac{1}{2}$. Označme $J(x)$ obsah oboru, omezeného křivkou $L(x)$; jest patrně $J(x) = J \,.\, x$, kladu-li $J(1) = J$. Naším konečným cílem jest odvození asymptotických vztahů mezi $A(x)$ a $J(x)$ pro velká x. K tomu cíli musíme učiniti o L ještě další předpoklady (jež budu většinou potřebovati až v § 2). Předpoklady tyto jsou následující:

Existují tři positivní čísla ε, k, K taková, že platí toto:

Zavedu-li při libovolném φ nové souřadnice ξ, η rovnicemi

$$\xi = u \cos \varphi + v \sin \varphi,$$
$$\eta = -u \sin \varphi + v \cos \varphi,$$

jest křivka L dána rovnicemi

$$\eta = f_{1,\varphi}(\xi), \qquad \eta = f_{2,\varphi}(\xi),$$

kdež ξ probíhá jistý interval

$\xi_\varphi' \leqq \xi \leqq \xi_\varphi$; pro $\xi_\varphi' < \xi < \xi_\varphi$ jest $f_{1,\varphi}(\xi) > f_{2,\varphi}(\xi)$ a $f_{i,\varphi}(\xi)$ $(i = 1, 2)$ má spojitou první a druhou derivaci pro $\xi_\varphi' < \xi < \xi_\varphi$. (Otočím-li osy

[13]) Viz práce citované sub [6]).

o π, je patrno, že $\xi_{\varphi+\pi} = -\xi_{\varphi}'$, $\xi'_{\varphi+\pi} = -\xi_{\varphi}$, $f_{1,\varphi}(\xi) = -f_{2,\varphi+\pi}(-\xi)$, $f_{2,\varphi}(\xi) = -f_{1,\varphi+\pi}(-\xi)$.)

Při tom platí pro $\xi_{\varphi} - \varepsilon \leq \xi < \xi_{\varphi}$

$$f_{1,\varphi} = \eta_{\varphi} + h_{\varphi}\sqrt{\xi_{\varphi} - \xi} + k_{\varphi}(\xi_{\varphi} - \xi) + l_{\varphi}(\xi_{\varphi} - \xi)^{3/2} + \Phi_{1,\varphi}(\xi),$$
$$f_{2,\varphi} = \eta_{\varphi} - h_{\varphi}\sqrt{\xi_{\varphi} - \xi} + k_{\varphi}(\xi_{\varphi} - \xi) - l_{\varphi}(\xi_{\varphi} - \xi)^{3/2} + \Phi_{2,\varphi}(\xi).$$

$\Phi_{i,\varphi}(\xi)$ $(i = 1, 2)$ mají pro $\xi_{\varphi} - \varepsilon \leq \xi \leq \xi_{\varphi}$ první a druhou spojitou derivaci,[14]) a jest

$$\Phi_{i,\varphi}(\xi_{\varphi}) = \Phi'_{i,\varphi}(\xi_{\varphi}) = 0,$$

$\Phi''_{i,\varphi}(\xi)$ monotonní a absolutně menší než K. Dále jest

$$k < h_{\varphi} < K, \quad |l_{\varphi}| < K.$$

Pro $-\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon \leq \xi \leq \xi_{\varphi} - \varepsilon$ má $f''_{i,\varphi}(\xi)$ nejvýše K intervalů monotonie a jest co do absolutní hodnoty menší než K.

Z těchto předpokladů plyne mimo jiné, že křivka L má v každém bodě křivost, jež v žádném bodě není rovna nule.

Přistoupím nyní k odvození identit pro $A(x)$ a $\int_1^x A(y)\,dy$. Všechny integrály, jež se budou v našich úvahách vyskytovati, pojímám ve smyslu definice Lebesgueovy.

K odvození řečených identit potřebuji známou Dirichletovu formuli, kterou bez důkazu uvádím (specialisuji předpoklady tak, jak je budu potřebovati):

Budiž $\gamma < \delta$; $\gamma - \frac{1}{2}$ = celé číslo, $\delta - \frac{1}{2}$ = celé číslo; budiž $f(\xi)$ funkce, definovaná pro $\gamma \leq \xi \leq \delta$, jež má v intervalu (γ, δ) konečnou variaci; potom platí

$$\sum_{\gamma < n < \delta} \frac{f(n-0) + f(n+0)}{2} = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2\pi a\xi \,.\, f(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

Součet vlevo vztahuje se na všechna celá čísla n mezi γ a δ.

K této formuli budu potřebovati ještě následující, ostatně na snadě ležící dodatek:

1. pomocná věta: *Je-li $\delta - \gamma < \mu$, $|f(\xi)| < M$, a je-li totální variace funkce $f(\xi)$ v (γ, δ) menší než N, jsou všechny částečné součty řady na pravé straně rovnice (1) menší než $A\mu(M + N)$, kde A je jistá absolutní konstanta.*

Důkaz:

Ježto při $m > 0$, $n > 0$ platí

$$\sum_{a=-m}^{n} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2\pi a\xi \,.\, f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\sum_{a=-m}^{m} + \frac{1}{2}\sum_{a=-n}^{n},$$

[14]) Zde i v dalším, mluvím-li o derivaci nějaké funkce v koncovém bodě jejího definičního intervalu, rozumím tím vždy příslušnou jednostrannou derivaci.

stačí, omezíme-li se při důkazu na součty tvaru

$$S_m = \sum_{a=-m}^{m} \int_{\gamma}^{\delta} \cos 2\pi a \xi \, . \, f(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \, f(\xi)\, d\xi .$$

Interval integrační rozdělím na intervaly o délce $\frac{1}{2}$

$$\left(\gamma, \gamma + \frac{1}{2}\right), \left(\gamma + \frac{1}{2}, \gamma + 1\right), \ldots, \left(\delta - \frac{1}{2}, \delta\right).$$

Vzhledem k periodicitě funkce $\frac{\sin (2m-1)\pi\xi}{\sin \pi\xi}$ stačí vyšetřovati na př.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \, f(\xi)\, d\xi .$$

V intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ lze psáti $f(\xi) = f(0) + p(\xi) - n(\xi)$, kdež $p(\xi)$ resp. $n(\xi)$ jest positivní resp. negativní variace funkce $f(\xi)$ v intervalu $(0, \xi)$. Platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \, f(0)\, d\xi = f(0) \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\sum_{a=1}^{m} \cos 2\pi a \xi\right) d\xi = \frac{f(0)}{2} ;$$

tedy jest

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \, f(0)\, d\xi \right| < \frac{M}{2}$$

Funkce $p(\xi)$ jest neklesající a > 0; tedy jest dle 2. věty o střední hodnotě

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \, p(\xi)\, d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{\sin \pi\xi} \, p(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\, p\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\eta}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2m+1)\pi\xi}{\xi} \, d\xi \qquad \left(0 < \eta < \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, p\left(\frac{1}{2}\right) \int_{(2m+1)\pi\eta}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi .$$

Ježto však $p\left(\frac{1}{2}\right) < N$ a ježto integrál $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\,\xi$ konverguje, jest poslední výraz menší než $A' . N$, kde A' je jistá absolutní konstanta. Tedy jest

$$\left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2\,m + 1)\,\pi\,\xi}{\sin \pi\,\xi}\, p\,(\xi)\, d\,\xi \right| < A'\,N$$

a obdobně

$$\left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2\,m + 1)\,\pi\,\xi}{\sin \pi\,\xi}\, n\,(\xi)\, d\,\xi \right| < A'\,N.$$

Uvážím-li ještě, že takových intervalů o délce $\frac{1}{2}$ jest v (γ, δ) nejvýše $2\,\mu$, jest správnost našeho tvrzení patrna.

Konečně budu k důkazu oněch identit potřebovati ještě známou větu Lebesgueovu:

Budiž řada $a_1\,(\xi) + a_2\,(\xi) + \ldots + a_n\,(\xi) + \ldots = f\,(\xi)$ *konvergentní pro* $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$; *buďtež* $a_n\,(\xi)$ *v intervalu* (α, β) *integrace schopny a budiž* $\left| \sum\limits_{n=1}^{m} a_n\,(\xi) \right| < M$ *pro všechna* ξ *intervalu* (α, β) *a všechna celistvá* $m \geqq 1$; *potom jest* $f\,(\xi)$ *v intervalu* (α, β) *integrace schopna a platí*

$$\int\limits_\alpha^\beta f\,(\xi)\, d\,\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_\alpha^\beta a_n\,(\xi)\, d\,\xi.$$

Dokažme nyní identity pro $A\,(x)$ a $\int\limits_1^x A\,(y)\, d\,y$. Budiž $x > 1$; potom kladu $F\,(u, v, x) = 1$, leží-li bod (u, v) uvnitř křivky $L\,(x)$, $F\,(u, v, x) = \frac{1}{2}$, leží-li (u, v) na $L\,(x)$, $F\,(u, v, x) = 0$, leží-li (u, v) vně $L\,(x)$. Budiž

$$f\,(u, x) = \sum_n \frac{F\,(u, n + 0, x) + F\,(u, n - 0, x)}{2}; \text{[15]}$$

potom jest $f\,(u, x) =$ počtu bodů o abscisse u a celistvé pořadnici, ležících uvnitř $L\,(x)$ a na $L\,(x)$, při čemž body na $L\,(x)$ jsou počítány s vahou $\frac{1}{2}$; vyjma ten případ, že u jest abscissou bodu, jenž leží na $L\,(x)$ nejdále na levo nebo na pravo — v tomto případě jest vždy $f\,(u, x) = 0$.

---

[15]) Sčítá se přes všechna celistvá čísla $\gtreqless 0$.

Vytvořme nyní[15]) $\sum_m \frac{f(m+0, x) + f(m-0, x)}{2}$; jest téměř okamžitě patrno, že tento součet jest roven počtu mřížových bodů uvnitř $L(x)$ a na $L(x)$, při čemž body na $L(x)$ jsou počítány s vahou $\frac{1}{2}$; pouze nejvyšší a nejnižší bod křivky $L(x)$ — i když některý z nich je mřížovým bodem — jsou počítány s vahou 0.

Je-li x dáno, lze nalézti čísla α, β, γ, δ ($\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$) tvaru celé číslo $+ \frac{1}{2}$ tak, že $L(x)$ (a tedy i $L(y)$ pro všechna $y < x$) leží uvnitř obdélníku $u = \alpha$, $u = \beta$, $v = \gamma$, $v = \delta$; ježto $f(u, x)$ je rovno 0 pro $u < \alpha$ a $u > \beta$, a $F(u, v, x) = 0$ vně řečeného obdélníku, lze na základě toho, co právě bylo řečeno, psáti:

$$A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) = \sum_{\alpha < m < \beta} \frac{f(m+0, x) + f(m-0, x)}{2}$$

kdež $\begin{Bmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \end{Bmatrix}$ rovná se $\frac{1}{2}$, je-li $\begin{Bmatrix} \text{nejvyšší} \\ \text{nejnižší} \end{Bmatrix}$ bod křivky $L(x)$ mřížovým bodem; jinak jest $\begin{Bmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \end{Bmatrix}$ rovno 0. Při tom jest

$$f(u, x) = \sum_{\gamma < n < \delta} \frac{F(u, n+0, x) + F(u, n-0, x)}{2}.$$

Na funkci $f(u, x)$ lze očividně užiti Dirichletovy formule, rovněž tak na funkci $F(u, v, x)$; jest tedy

$$\begin{aligned} A(x) - \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) &= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_\alpha^\beta \cos 2a\pi u \,.\, f(u, x)\, du = \\ &= \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_\alpha^\beta \cos 2a\pi u \left(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta F(u, v, x) \cos 2b\pi v\, dv \right) du. \end{aligned} \tag{2}$$

Integrací poslední formule dostávám (ježto $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) = 0$ všude až na diskrétní množinu hodnot x)

$$\int_1^x A(y)\, dy = \int_1^x \left(\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_\alpha^\beta \cos 2a\pi u \,.\, f(u, y)\, du \right) dy. \tag{3}$$

Z definice funkce $f(u, y)$ jest patrno, že $f(u, y)$ jest ohraničena pro všechna u, y, jež hoví nerovninám $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $1 < y < x$ (při pevně zvoleném x); rovněž variace $f(u, y)$ v intervalu $\alpha \leqq u \leqq \beta$ jest pro $1 < y < x$ menší než jisté číslo, nezávislé na y. Tedy jsou částečné součty řady

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_\alpha^\beta \cos 2a\pi u \,.\, f(u, y)\, du$$

dle 1. pomocné věty pro $1 < y < x$ ohraničeny, a je tedy dovoleno dle Lebesgueovy věty integrovati tuto řadu člen po členu dle y v mezích $1, x$. Platí tedy dle (3):

$$\int_1^x A(y)\,dy = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_1^x \left(\int_\alpha^\beta \cos 2\,a\,\pi\,u\, f(u, y)\,du \right) dy =$$
$$= \sum_{a=-x}^{+x} \int_1^x \left[\int_\alpha^\beta \cos 2\,a\,\pi\,u \left(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta F(u, v, y) \cos 2\,b\,\pi\,v\,dv \right) du \right] dy. \tag{4}$$

Z definice funkce $F(u, v, y)$ plyne okamžitě:

1. $|F(u, v, y)| \leqq 1$.

2. Variace $F(u, v, y)$ jakožto funkce u je při libovolném v, y v libovolném intervalu pro u nejvýše rovna 2.

Z toho vyplývá dle 1. pomocné věty, že částečné součty řady

$$\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta F(u, v, y) \cos 2\,b\,\pi\,v\,dv$$

mají absolutní hodnoty vesměs menší než jisté číslo, nezávislé na u a na y, je-li $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $1 < y < x$. Z toho plyne dle Lebesgueovy věty, že můžeme tuto řadu násobiti $\cos 2\,a\,\pi\,u$ a integrovati člen po členu dle u přes libovolný konečný interval; t. j.

$$\int_\alpha^\beta \cos 2\,a\,\pi\,u \left(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta F(u, v, y) \cos 2\,b\,\pi\,v\,dv \right) du =$$
$$= \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\alpha^\beta du \int_\gamma^\delta \cos 2\,a\,\pi\,u \,.\, \cos 2\,b\,\pi\,v \,.\, F(u, v, y)\,dv = \tag{5}$$
$$= \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \iint_{L(y)} \cos 2\,a\,\pi\,u \,.\, \cos 2\,b\,\pi\,v\,du\,dv,$$

kdež dvojný integrál jest vzat přes obor, uzavřený křivkou $L(y)$.

Částečné součty poslední řady jsou ovšem též pro $1 < y < x$ absolutně menší než jisté číslo, nezávislé na y; lze tedy tuto řadu dle Lebesgueovy věty integrovati člen po členu dle y v intervalu $(1, x)$, t. j.

$$\int_1^x \left[\int_\alpha^\beta \cos 2\,a\,\pi\,u \left(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma^\delta F(u, v, y) \cos 2\,b\,\pi\,v\,dv \right) du \right] dy =$$
$$= \int_1^x \left(\sum_{b=-\infty}^{+\infty} \iint_{L(y)} \cos 2\,a\,\pi\,u \cos 2\,b\,\pi\,v\,du\,dv \right) dy \quad [\text{dle } (5)] \tag{6}$$
$$= \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x dy \iint_{L(y)} \cos 2\,a\,\pi\,u \cos 2\,b\,\pi\,v\,du\,dv\,.$$

Z (2) a (5) plyne však, klademe-li

$$\iint\limits_{L(x)} \cos 2\, a\, \pi\, u \cos 2\, b\, \pi\, v\, d\, u\, d\, v = P\,(x, a, b),$$

hledaná

Identita I.: *pro* $x > 1$ *platí*

$$A\,(x) - \varepsilon_1\,(x) - \varepsilon_2\,(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} P\,(x, a, b). \tag{7}$$

Z (4) a (6) plyne pak hledaná

Identita II.: *pro* $x > 1$ *platí*

$$\int_1^x A\,(y)\, d\, y = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_1^x P\,(y, a, b)\, d\, y. \tag{8}$$

V obou identitách nutno provésti napřed summaci dle b a potom dle a.

§ 2. Vyšetřování integrálu $P\,(x, a, b)$.

K dosažení našeho konečného cíle jest především třeba, vyšetřiti, jak se chovají dvojné integrály $P\,(x, a, b)$, vyskytující se v identitách (7) a (8). V tomto paragrafu dokáži následující větu:

2. pomocná věta.

Buďtež a, b celá čísla, $x > 1$; potom platí

$$P\,(x, 0, 0) = J\,(x) = J\,.\,x \tag{9}$$

a pro $a^2 + b^2 > 0$ platí

$$P\,(x, a, b) =$$

$$= \eta_{a,b} \frac{x^{1/4}}{4\sqrt{2\pi}\,(a^2+b^2)^{3/4}} \sum_{tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}} h_\varphi \sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \tag{10}$$

$$+ f\,(x, a, b).$$

Při tom je $\eta_{a,b} = 2$, je-li $a\,b = 0$, jinak $\eta_{a,b} = 1$; summace vztahuje se pro $a \neq 0$ na všechna φ, hovící podmínkám $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}$; pro $a = 0$ na $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

$f\,(x, a, b)$ jest jistá (očividně spojitá) funkce x, jež jest co do absolutní hodnoty menší než $\frac{C}{x^{1/4}\,(a^2+b^2)^{3/4}}$, kde C lze voliti nezávisle na x, a, b.

Důkaz: (9) jest triviální; neboť

$$P(x, 0, 0) = \iint\limits_{L(x)} d\,u\,d\,v = J(x).$$

Zbývá tedy případ $a^2 + b^2 > 0$.[16])

Položme $u = \sqrt{x}\,u'$, $v = \sqrt{x}\,v'$; potom jest

$$\begin{aligned} P(x, a, b) &= x \iint\limits_L \cos 2\,a\,\pi \sqrt{x}\,u' \,.\, \cos 2\,b\,\pi \sqrt{x}\,v'\,d\,u'\,d\,v' \\ &= \frac{x}{2}\Big[\iint\limits_L \cos\,[2\,\pi \sqrt{x}\,(a\,u' + b\,v'] \,d\,u'\,d\,v' \\ &+ \iint\limits_L \cos\,[2\,\pi \sqrt{x}\,(a\,u' - b\,v')]\,d\,u'\,d\,v'\Big] \\ &= \frac{x}{2}\Big[A\,(a, b, x) + A\,(a, -b, x)\Big], \end{aligned} \tag{10^a}$$

klademe-li

$$A\,(a, b, x) = \iint\limits_L \cos\,[2\,\pi \sqrt{x}\,(a\,u' + b\,v')]\,d\,u'\,d\,v'.$$

Integruje se nyní přes vnitřek křivky L.

Zavedu nyní nové proměnné ξ, η rovnicemi

$$\xi = \frac{a\,u' + b\,v'}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad \eta = \frac{-\,b\,u' + a\,v'}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

t. j. otočím systém souřadný o úhel φ, stanovený jednoznačně podmínkami $0 \leqq \varphi < 2\,\pi$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Potom jest (viz počátek § 1!)

$$\begin{aligned} A\,(a, b, x) &= \iint\limits_L \cos\,(2\,\pi \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x}\,\xi)\,d\,\xi\,d\,\eta \\ &= \int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} \cos\,(2\,\pi \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x}\,\xi)\,[f_{1,\varphi}(\xi) - f_{2,\varphi}(\xi)]\,d\,\xi \\ &= -\frac{1}{2\,\pi \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x}} \int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{\xi_\varphi} \sin\,(2\,\pi \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x}\,\xi)\,[f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)]\,d\,\xi \end{aligned}$$

(po integraci per partes, ježto integrovaný člen následkem

$$f_{1,\varphi}(\xi_\varphi) - f_{2,\varphi}(\xi_\varphi) = f_{1,\varphi}(-\,\xi_{\varphi+\pi}) - f_{2,\varphi}(-\,\xi_{\varphi+\pi}) = 0$$

vypadne).

Položme pro zkrácení $2\,\pi \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x} = A$ (platí $A > 1$), a rozložme interval integrační $(-\,\xi_{\varphi+\pi}, \xi_\varphi)$ body $-\,\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon$, $\xi_\varphi - \varepsilon$ na tři částečné intervaly.

[16]) Vzhledem k $x > 1$ jest pak ovšem $(a^2 + b^2)\,x > 1$.

$$\text{I.} \qquad \int_{\xi_\varphi - \varepsilon}^{\xi_\varphi} \sin A\,\xi \,.\, [f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)]\, d\,\xi$$

$$= \int_{\xi_\varphi-\varepsilon}^{\xi_\varphi} \sin A\,\xi \left[-\frac{h_\varphi}{\sqrt{\xi_\varphi - \xi}} - 3\,l_\varphi \sqrt{\xi_\varphi - \xi} + \Phi'_{1,\varphi}(\xi) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi)\right] d\,\xi$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \sin A\,(\xi_\varphi - \xi) \left[-\frac{h_\varphi}{\sqrt{\xi}} - 3\,l_\varphi\sqrt{\xi} + \Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)\right] d\,\xi.$$

Tento integrál odhadnu; při tom značím písmenou C positivní konstanty, nezávislé na a, b, x; pímenou Θ konstanty nebo funkce libovolných proměnných, pro které platí $|\Theta| \leqq 1$; různá C a Θ nerozlišuji indexy, takže je na př. $C + C = C$, $C\,.\,C = C$, $\Theta\,.\,\Theta = \Theta$ atd.[17])

Platí

$$\int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} \frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi}} = e^{iA\xi_\varphi} \,.\, \frac{1}{\sqrt{A}} \int_0^{A\varepsilon} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\,\xi;$$

$$\int_0^{A\varepsilon} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\,\xi = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\,\xi - \int_{A\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\,\xi.$$

Jak známo, jest

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\,\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1 - i).$$

Dále jest

$$\int_{A\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\,\xi = -\,i\,\frac{e^{-iA\varepsilon}}{\sqrt{A\,\varepsilon}} + \frac{i}{2}\int_{A\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\xi^{3/2}}\, d\,\xi.$$

Dle 2. věty o střední hodnotě (applikované zvlášť na reálnou a imaginárnou část) je pro každé $B > A\,\varepsilon$:

$$\int_{A\varepsilon}^{B} \frac{e^{-i\xi}}{\xi^{3/2}}\, d\,\xi = \frac{C\,\Theta}{(A\,\varepsilon)^{3/2}} = \frac{C\,\Theta}{A}$$

(když C nezávisí ani na B); tedy jest i

$$\int_{A\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\xi^{3/2}}\, d\,\xi = \frac{C\,\Theta}{A}$$

[17]) Ježto dolní hranice ξ_φ pro $0 \leqq \varphi < 2\pi$ je očividně kladná, lze psáti $\frac{1}{\xi_\varphi} = C\,\Theta$, čehož v následujícím užívám.

Platí tedy

$$\int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = e^{iA\xi_\varphi} \sqrt{\frac{\pi}{2A}}\,(1 - i) + i\, e^{iA(\xi_\varphi - \varepsilon)} \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}} + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}. \quad (11)$$

Dále jest

$$\int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} \sqrt{\xi}\, d\xi = \frac{i}{A} e^{iA(\xi_\varphi - \varepsilon)} \sqrt{\varepsilon} - \frac{i}{2A} \int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} =$$
$$= \frac{i}{A} e^{iA(\xi_\varphi - \varepsilon)} \sqrt{\varepsilon} + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}} \text{ [dle (11)].} \quad (12)$$

Konečně

$$\int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} [\Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)]\, d\xi =$$
$$= \frac{i}{A} e^{iA(\xi_\varphi - \varepsilon)} \Big(\Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon)\Big) +$$
$$+ \frac{i}{A} \int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} [\Phi''_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - \Phi''_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)]\, d\xi.$$

(Viz předpoklady o funkci $\Phi_{i,\varphi}$ v § 1!)

Dle 2. věty o střední hodnotě jest (pro $i = 1, 2$)

$$\int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} \Phi''_{i,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)\, d\xi = \frac{C\,\Theta}{A} = \frac{C\,\Theta}{A^{1/2}},$$

takže

$$\int_0^{\varepsilon} e^{iA(\xi_\varphi - \xi)} [\Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \xi) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \xi)]\, d\xi =$$
$$= \frac{i}{A} e^{iA(\xi_\varphi - \varepsilon)} [\Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon) - \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon)] + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}} \quad (13)$$

Sečtu-li formuli (11), násobenou $-h_\varphi$, formuli (12), násobenou $-3\,l_\varphi$ a formuli (13), a vezmu-li pouze imaginární část, dostávám

$$\int_{\xi_\varphi - \varepsilon}^{\xi_\varphi} \sin A\xi \,.\, [f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)]\, d\xi =$$
$$= h_\varphi \sqrt{\frac{\pi}{A}} \cos\left(A\,\xi_\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cos A(\xi_\varphi - \varepsilon)}{A} \Big[\frac{h_\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + 3\,l_\varphi \sqrt{\varepsilon} -$$
$$- \Phi'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon) + \Phi'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon)\Big] + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}} = \quad (14)$$
$$= h_\varphi \sqrt{\frac{\pi}{A}} \cos\left(A\,\xi_\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\cos A(\xi_\varphi - \varepsilon)}{A} [f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon) -$$
$$- f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon)] + \frac{C\,\Theta}{A^{3/2}}$$

II. $\int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}}^{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon} \sin A\xi \, . \, [f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)]\, d\xi = \int\limits_{\xi_{\varphi+\pi}-\varepsilon}^{\xi_{\varphi+\pi}} \sin A\xi\, [f'_{1,\varphi}(-\xi) - f'_{2,\varphi}(-\xi)]\, d\xi.$

Jak v § 1 bylo poznamenáno, jest

$$f_{1,\varphi}(-\xi) = -f_{2,\varphi+\pi}(\xi),\; f_{2,\varphi}(-\xi) = -f_{1,\varphi+\pi}(\xi).$$

Tedy

$$f'_{1,\varphi}(-\xi) = f'_{2,\varphi+\pi}(\xi),\; f'_{2,\varphi}(-\xi) = f'_{1,\varphi+\pi}(\xi). \tag{15}$$

Jest tedy poslední integrál roven

$$\int\limits_{\xi_{\varphi+\pi}-\varepsilon}^{\xi_{\varphi+\pi}} \sin A\xi\, [f'_{1,\varphi+\pi}(\xi) - f'_{2,\varphi+\pi}(\xi)]\, d\xi$$

$$= h_{\varphi+\pi}\sqrt{\frac{\pi}{A}}\cos\left(A\xi_{\varphi+\pi} + \frac{\pi}{4}\right) - \tag{16}$$

$$\frac{\cos A(\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon)}{A}[f'_{1,\varphi+\pi}(\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon) - f'_{2,\varphi+\pi}(\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon)] + \frac{C\Theta}{A^{3/2}}$$

(dle I.).

III. $$\int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi_{\varphi}-\varepsilon} \sin A\xi\, [f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)]\, d\xi =$$

$$= -\frac{\cos A(\xi_\varphi - \varepsilon)}{A}[f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon) - f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon)] +$$

$$+\frac{\cos A(-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon)}{A}[f'_{1,\varphi}(-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon) - f'_{2,\varphi}(-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon)] \tag{17}$$

$$+\frac{1}{A}\int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi_{\varphi}-\varepsilon} \cos A\xi\, [f''_{1,\varphi}(\xi) - f''_{2,\varphi}(\xi)]\, d\xi.$$

Dle předpokladů o funkcích $f''_{i,\varphi}(\xi)$ mají tyto funkce v $(-\xi_{\varphi+\pi} + \varepsilon, \xi_\varphi - \varepsilon)$ nejvýše K intervalů monotonie a jsou absolutně menší než K. Jest tedy (applikujeme-li na každý interval monotonie 2. větu o střední hodnotě)

$$\left|\int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}-\varepsilon}^{\xi_{\varphi}-\varepsilon} \cos A\xi\, .\, f''_{i,\varphi}(\xi)\, d\xi\right| < \frac{2\,.\,2\,.\,K\,.\,K}{A} = \frac{C}{A} = \frac{C\Theta}{A^{1/2}}.$$

Užijeme-li ještě na druhý integrovaný člen v (17) vztahů (15), dostáváme

$$\int\limits_{-\xi_{\varphi+\pi}+\varepsilon}^{\xi_{\varphi}-\varepsilon} \sin A\xi\, [f'_{1,\varphi}(\xi) - f'_{2,\varphi}(\xi)]\, d\xi$$

$$= -\frac{\cos A(\xi_\varphi - \varepsilon)}{A}[f'_{1,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon) - f'_{2,\varphi}(\xi_\varphi - \varepsilon)] \tag{18}$$

$$-\frac{\cos A(\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon)}{A}[f'_{1,\varphi+\pi}(\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon) - f'_{2,\varphi+\pi}(\xi_{\varphi+\pi} - \varepsilon)] + \frac{C\Theta}{A^{1/2}}.$$

Sečtením rovnic (14), (16) a (18) dostávám, násobím-li

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}} \text{ a kladu-li } A = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}:$$

$$A(a,b,x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi x^{1/4}(a^2+b^2)^{3/4}} \cdot \sum_{tg\,\varphi=\frac{b}{a}} h_\varphi \cos\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+\frac{C\,\Theta}{x^{3/4}(a^2+b^2)^{5/4}}.$$

Přičtu-li k tomuto výrazu $A(a, -b, x)$ a násobím-li $\frac{x}{2}$, dostávám dle (10^a) $P(x, a, b)$, a to vskutku ve tvaru, daném formulí (10).

§ 3. Vlastnosti funkce $A(x)$ pro velké hodnoty x.

V § 1. dokázali jsme identitu

$$A(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \sum_{a=-\infty}^{+\infty}\sum_{b=-\infty}^{+\infty} P(x, a, b).$$

Dle 2. pomocné věty lze tuto identitu psáti ve tvaru

$$A(x) = Jx + Q(x), \text{ kdež[18]} \tag{19}$$

$$Q(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \sum_{a=-\infty}^{+\infty}\sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' [\overline{P}_0(x, a, b) + f(x, a, b)], \tag{20}$$

klademe-li

$$\overline{P}_0(x, a, b) = \eta_{a,b}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{4\sqrt{2}\pi(a^2+b^2)^{3/4}}\sum_{tg\,\varphi=\pm\frac{b}{a}} h_\varphi \sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi - \frac{\pi}{4}\right). \tag{21}$$

Vzhledem k $|f(x, a, b)| < \frac{C}{x^{1/4}(a^2+b^2)^{5/4}}$ jest tedy

$$Q(x) = \overline{Q}_0(x) + O(1), \tag{22}$$

klademe-li

$$\overline{Q}_0(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty}\sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' \overline{P}_0(x, a, b). \tag{23}$$

Kladme dále pro r celé, $r \geq 1$, $a^2 + b^2 > 0$:

---

[18]) $\sum\limits_{a=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{b=-\infty}^{+\infty}{}'$ značí zde i v následujícím, že člen s $a=b=0$ jest vynechati.

$$\overline{P}_r(x, a, b) =$$
$$= \eta_{a,b} \frac{x^{\frac{2r+1}{4}}}{4\sqrt{2}\,\pi^{r+1}(a^2+b^2)^{\frac{2r+3}{4}}} \sum_{tg\,\varphi=\pm\frac{b}{a}} \frac{h_\varphi}{\xi_\varphi^r} \sin\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x}\,\xi_\varphi - r\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (24)$$

$$\overline{Q}_r(x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' \overline{P}_r(x, a, b) \quad (25)$$

(jest patrno, že pro $r \geqq 1$ tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně v každém konečném intervalu proměnné x).

Tvrdím nyní: pro $r \geqq 0$ jest

$$\int_1^x \overline{P}_r(y, a, b)\,dy = \overline{P}_{r+1}(x, a, b) + O\left[\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{2r+5}{4}}}\right] + O\left[\frac{x^{\frac{2r+1}{4}}}{(a^2+b^2)^{\frac{2r+7}{4}}}\right]. \quad (26)$$

Důkaz: pro $A > 0$, $B \gtreqless 0$ jest

$$\int_1^x y^{\frac{2r+1}{4}} \sin(A\sqrt{y} + B)\,dy = 2\int_1^{\sqrt{x}} t^{\frac{2r+3}{2}} \sin(At + B)\,dt =$$
$$= 2\left[\frac{t^{\frac{2r+3}{2}}}{A} \sin\left(At + B - \frac{\pi}{2}\right)\right]_1^{\sqrt{x}}$$
$$- \frac{2r+3}{A}\int_1^{\sqrt{x}} t^{\frac{2r+1}{2}} \sin\left(At + B - \frac{\pi}{4}\right) dt =$$
$$= \frac{2}{A} x^{\frac{2r+3}{4}} \sin\left(A\sqrt{x} + B - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{A}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{2r+1}{4}}}{A^2}\right)$$

(poslední integrál odhadnu dle 2. věty o střední hodnotě).

Kladu-li sem

$$A = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,\xi_\varphi,\ B = -r\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4},$$

násobím-li

$$\eta_{a,b} \frac{1}{4\sqrt{2}\,\pi^{r+1}(a^2+b^2)^{\frac{2r+3}{4}}} \cdot \frac{h_\varphi}{\xi_\varphi^r}$$

a sečtu pro všechna φ, hovící vztahům $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $tg\,\varphi = \pm\frac{b}{a}$, dostávám vskutku formule (26).

Sečtu-li rovnici (26) pro všechny páry celých hodnot a, b kromě $a = b = 0$, dostávám pro $r \geqq 1$ (následkem absolutní a stejnoměrné konvergence příslušných řad)

$$\int_1^x \overline{Q}_r(y)\,dy = \overline{Q}_{r+1}(x) + O\left(x^{\frac{2r+1}{4}}\right). \quad (27)$$

Rovnice (27) platí však i pro $r = 0$, což nyní dokáži (v případě $r = 0$ je třeba jisté opatrnosti, jelikož dvojná řada pro $Q_0(x)$ nekonverguje absolutně).

Integruji-li (19) od 1 do x, dostávám vzhledem k (20) a k okolnosti, že $\sum\limits_{a=-x}^{+x} \sum\limits_{b=-x}^{+x}{}' f(x, a, b)$ lze integrovati člen po členu:

$$\int_1^x A(y)\, dy = J\frac{x^2}{2} - \frac{J}{2} + \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \int_1^x f(y, a, b)\, dy +$$
$$+ \int_1^x \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \bar{P}_0(y, a, b)\, dy.$$

Z identity (8) z § 1 plyne však, že

$$\int_1^x A(y)\, dy = J\frac{x^2}{2} - \frac{J}{2} + \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \int_1^x f(y, a, b)\, dy +$$
$$+ \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \int_1^x \bar{P}_0(y, a, b)\, dy.$$

Srovnáním dostávám

$$\int_1^x Q_0(y)\, dy = \int_1^x \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \bar{P}_0(y, a, b)\, dy = \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \int_1^x \bar{P}_0(y, a, b)\, dy =$$
$$= \sum_{a=-x}^{+x} \sum_{b=-x}^{+x}{}' \left[\bar{P}_1(x, a, b) + O\left(\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{4}}}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{4}}}\right)\right]$$

[dle (26)]

$$= \bar{Q}_1(x, a, b) + O(x^{\frac{1}{4}}).$$

Platí tedy (27) i pro $r = 0$.

Řada v (25) konverguje pro $r \geqq 1$ absolutně, mohu tedy její členy libovolně přemístit. Toto přemístění provedu tímto způsobem: ξ_φ má jakožto funkce φ jistou *positivní* dolní hranici. Jest tedy počet oněch dvojic celých čísel a, b a oněch úhlu φ, pro něž $a^2 + b^2 > 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $tg\,\varphi = \pm\frac{b}{a}$, a pro něž $\pi\sqrt{a^2+b^2}\,\xi_\varphi$ zůstává pod jistou konečnou mezí, rozhodně konečný. Jest tedy možno srovnati veškeré hodnoty, jichž $\pi\sqrt{a^2+b^2}\,\xi_\varphi$ nabývá, když a, b probíhají veškerá celá čísla kromě $a = b = 0$ a φ všechny úhly, pro něž $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $tg\,\varphi = \pm\frac{b}{a}$, dle velikosti; označme tyto hodnoty $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \ldots$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$.

Pišme dále

$$U(\lambda_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{\pi\sqrt{a^2+b^2}\,\xi_\varphi = \sqrt{\lambda_n} \\ tg\,\varphi = \pm\frac{b}{a}}} \eta_{a,b}\, h_\varphi\, \xi_\varphi^{\frac{1}{2}};$$

potom jest očividně pro $r \geqq 1$

$$Q_r(x) = x^{\frac{2r+1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n^{\frac{2r+3}{4}}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\, x - r\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{28}$$

Dirichletova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n^s}$ jest pro $s > 1$ absolutně konvergentní, ježto vznikla přemístěním členu absolutně konvergentní řady

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\eta_{a,b}\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\,\pi^{2s}(a^2+b^2)^s} \sum_{tg\,\varphi = \pm\frac{b}{a}} \frac{h_\varphi}{\xi_\varphi^{2s}}.$$

Následkem toho jest i řada (s členy očividně kladnými)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^s}$$

pro $s > 1$ konvergentní a tedy, je-li δ libovolné číslo kladné, pro $s > 1 + \delta$ stejnoměrně konvergentní.[19]) Každý její člen konverguje k 0 pro $\lim s = \infty$, tedy i řada sama konverguje k 0 pro $\lim s = \infty$. Lze tedy nalézti jisté celistvé číslo kladné ϱ tak, že

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{\frac{2\varrho+3}{4}}} < \frac{1}{2}\, U(\lambda_1) \tag{29}$$

čili že

$$\frac{U(\lambda_1)}{\lambda_1^{\frac{2\varrho+3}{4}}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\lambda_n^{\frac{2\varrho+3}{4}}} > \frac{1}{2}\, \frac{U(\lambda_1)}{\lambda_1^{\frac{2\varrho+3}{4}}}.$$

Zvolme nyní ke každému celému kladnému číslu g dvě čísla $x_1^{(\varrho)}(g)$, $x_2^{(\varrho)}(g)$ rovnicemi

$$x_1^{(\varrho)}(g) = \frac{\left(\varrho\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2g\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2}{4\lambda_1}$$

$$x_2^{(\varrho)}(g) = \frac{\left(\varrho\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2g\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}{4\lambda_1}$$

---

[19]) Neboť jest očividně $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^s} < \sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{U(\lambda_n)}{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{1+\delta}}$, je-li $s > 1 + \delta$.

Platí patrně

$$0 < x_1^{(\varrho)}(g) - x_2^{(\varrho)}(g) < C \, . \, g \text{ [20]}$$
$$0 < x_2^{(\varrho)}(g+1) - x_1^{(\varrho)}(g) < C \, . \, g$$
$$x_1^{(\varrho)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \quad x_2^{(\varrho)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g),$$
$$\sin\left(2\sqrt{\lambda_1 x_1^{(\varrho)}(g)} - \varrho \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$
$$\sin\left(2\sqrt{\lambda_1 x_2^{(\varrho)}(g)} - \varrho \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

jest tedy dle (28) a (29)

$$Q_\varrho\left[x_1^{(\varrho)}(g)\right] > \left[x_1^{(\varrho)}(g)\right]^{\frac{2\varrho+1}{4}} \frac{1}{2} \frac{U(\lambda_1)}{\lambda_1^{\frac{2\varrho+3}{4}}} > C g^{\frac{2\varrho+1}{2}},$$
$$Q_\varrho\left[x_2^{(\varrho)}(g)\right] < -\left[x_2^{(\varrho)}(g)\right]^{\frac{2\varrho+1}{4}} \frac{1}{2} \frac{U(\lambda_1)}{\lambda_1^{\frac{2\varrho+3}{4}}} < -C g^{\frac{2\varrho+1}{2}}.$$

Dokáži nyní, že obdobný výsledek lze odvoditi i pro funkci $Q_1(x)$; t. j. dokáži následující větu:

3. pomocná věta. Jest možno přiřaditi každému celému kladnému číslu g dvě čísla $x_1^{(1)}(g)$, $x_2^{(1)}(g)$ tak, že platí

$$0 < x_1^{(1)}(g) - x_2^{(1)}(g) < C \, . \, g, \quad 0 < x_2^{(1)}(g+1) - x_1^{(1)}(g) < C \, . \, g,$$
$$x_1^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \quad x_2^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g)$$

a že jest

$$Q_1(x_1^{(1)}(g)) > C \, . \, g^{\frac{3}{2}}$$
$$Q_1(x_2^{(1)}(g)) < -C \, . \, g^{\frac{3}{2}}$$

pro všechna $g > C$.

Jak jsme právě ukázali, jest obdobný výrok správný pro funkci $Q_\varrho(x)$. Abychom dokázali tuto větu, stačí tedy dokázati správnost následujícího indukčního kroku:

Budiž r jisté celé číslo ≥ 2 a $\leq \varrho$ (je-li $\varrho = 1$, je věta již dokázána); nechť je správný tento výrok:

(41) Ke každému celému kladnému číslu g je možno přiřaditi dvě čísla $x_1^{(r)}(g)$, $x_2^{(r)}(g)$ tak, že
$$0 < x_1^{(r)}(g) - x_2^{(r)}(g) < C \, . \, g, \quad 0 < x_2^{(r)}(g+1) - x_1^{(r)}(g) < C \, . \, g,$$
$$x_1^{(r)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g), \quad x_2^{(r)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1} g^2 + O(g)$$
a že jest
$$Q_r\left[x_1^{(r)}(g)\right] > C \, . \, g^{\frac{2r+1}{2}}, \quad Q_r\left[x_2^{(r)}(g)\right] < -C \, . \, g^{\frac{2r+1}{2}}$$
pro všechna $g > C$.

[20]) Písmenou C značím nyní positivní číslo, nezávislé na g; různá C nerozlišuji indexy.

Tvrdím: potom jest výrok (A) správný i tehdy, píši-li v něm $r-1$ místo r.

Důkaz: dle (27) platí

$$\int_{x_2^{(r)}(g)}^{x_1^{(r)}(g)} Q_{r-1}(y)\,dy = Q_r\left[x_1^{(r)}(g)\right] - Q_r\left[x_2^{(r)}(g)\right] + O\left(g^{\frac{2r-1}{2}}\right)$$

$$> C\,.\,g^{\frac{2r+1}{2}} + O\left(g^{\frac{2r-1}{2}}\right)$$

pro $g > C$ [dle výroku (A)],

$$> C\,.\,g^{\frac{2r+1}{2}} \quad \text{pro } g > C.$$

Ježto délka integračního intervalu je $< C\,.\,g$, musí existovati aspoň jeden bod $x_1^{(r-1)}(g)$ tak, že

$$x_2^{(r)}(g) < x_1^{(r-1)}(g) < x_1^{(r)}(g)$$

a že

$$Q_{r-1}\left[x_1^{(r-1)}(g)\right] > C\,.\,g^{\frac{2r-1}{2}} \quad \text{pro } g > C.$$

Obdobně existuje v intervalu

$$\left[x_1^{(r)}(g-1),\ x_2^{(r)}(g)\right] \text{ jisté číslo } x_2^{(r-1)}(g)$$

tak, že

$$Q_{r-1}\left[x_2^{(r-1)}(g)\right] < -C\,.\,g^{\frac{2r-1}{2}} \quad \text{pro } g > C.$$

Jest ovšem

$$0 < x_1^{(r-1)}(g) - x_2^{(r-1)}(g) < C\,.\,g,$$
$$0 < x_2^{(r-1)}(g+1) - x_1^{(r-1)}(g) < C\,.\,g,$$
$$x_1^{(r-1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1}\,g^2 + O(g),\quad x_2^{(r-1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1}\,g^2 + O(g);$$

tím je však správnost výroku (A) pro $r-1$ místo r dokázána, a tedy i 3. pomocná věta.

Z 3. pomocné věty vyplývá pak snadno následující

4. pomocná věta. Existují tři kladná čísla C_1, C_2, C_3, takže platí toto:[21]) každému kladnému číslu celému g lze přiřaditi dvě čísla $x_1^{(1)}(g)$, $x_2^{(1)}(g)$ tak, že platí

$$0 < x_1^{(1)}(g) - x_2^{(1)}(g) < C_1\,g,$$
$$0 < x_2^{(1)}(g+1) - x_1^{(1)}(g) < C_1\,g,$$
$$x_1^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1}\,g^2 + O(g),\quad x_2^{(1)}(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1}\,g^2 + O(g)$$

a pro $g > C_2$ jest

[21]) Od nynějška budu konstanty $C_1, C_2 \ldots$ číslovati, abych se vyhnul případnému nedorozumění. $C_1, C_2 \ldots$ značí nyní konstanty, nezávislé na g, po případě (později) na x.

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy > C_3\,g^{3/2} \tag{30}$$

$$\int_{x_1^{(1)}(g)}^{x_2^{(1)}(g+1)} Q(y)\,dy < -C_3\,g^{3/2}. \tag{31}$$

Důkaz: Volme čísla $x_1^{(1)}(g)$, $x_2^{(1)}(g)$ jako v 3. pomocné větě; dle (27) platí

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q_0(y)\,dy = Q_1\left(x_1^{(1)}(g)\right) - Q_1\left(x_2^{(1)}(g)\right) + O(g^{1/2}).$$

Dle (22) jest však

$$\int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,dy = \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q_0(y)\,dy + \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} O(1)\,dy$$

$$= Q_1\left(x_1^{(1)}(g)\right) - Q_1\left(x_2^{(1)}(g)\right) + O(g)$$

$$> C_1\,g^{3/2} - O(g) \quad \text{pro} \quad g > C_5$$

(dle 3. pomocné věty).

Tento výraz je však pro $g > C_2$ větší než $C_3\,g^{3/2}$, čímž jest (30) dokázáno. Analogicky se dokáže (31).

Z této věty plynou jako snadný důsledek věty II., III., IV., které tvoří hlavní výsledek této práce. Dříve však, než tyto věty odvodím, dokáži následující větu I. Věta tato jest sice známa,[22]) ježto však vše k jejímu důkazu potřebné jsme odvodili, provedu zde na několika řádcích její důkaz.

Věta I.

$$A(x) = Jx + O(x^{1/3}).$$

Důkaz: Dle identity II. z § 1 platí, je-li $x - x^{1/3} > 1$,

$$\int_x^{x \pm x^{1/3}} A(y)\,dy = \frac{J}{2}\left((x \pm x^{1/3})^2 - x^2\right)$$

$$+ \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty}{}' \int_x^{x \pm x^{1/3}} P(y, a, b)\,dy.$$

Dle 2. pomocné věty jest

$$P(y, a, b) = O\left(\frac{y^{1/4}}{(a^2 + b^2)^{3/4}}\right)$$

a tedy

$$\int_x^{x + x^{1/3}} P(y, a, b)\,dy = O\left(\frac{x^{1/4 + 1/3}}{(a^2 + b^2)^{3/4}}\right).$$

[22]) Viz pojednání citovaná sub [6]).

Dle (10) a (26) jest však též

$$\int_x^{x\pm x^{1/3}} P(y, a, b)\, dy = \int_x^{x\pm x^{1/3}} f(y, a, b)\, dy + \int_x^{x\pm x^{1/3}} P_0(y, a, b)\, dy =$$

$$= \int_x^{x\pm x^{1/3}} O\left(\frac{1}{y^{1/4}(a^2+b^2)^{3/4}}\right) dy + \Big[P_1(y, a, b)\Big]_x^{x\pm x^{1/3}} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(a^2+b^2)^{3/4}}\right) + O\left(\frac{x^{1/4}}{(a^2+b^2)^{3/4}}\right) = O\left(\frac{x^{1/4}}{(a^2+b^2)^{3/4}}\right)$$

[neboť $P_1(x, a, b) = O\left(\frac{x^{1/4}}{(a^2+b^2)^{3/4}}\right)$ dle (24)].

Jest tedy

$$\int_x^{x\pm x^{1/3}} A(y)\, dy = \pm J x^{4/3} + O(x^{2/3}) + O \sum_{\substack{a,\, b \\ 0 < a^2+b^2 \leq x^{1/3}}} \frac{x^{7/12}}{(a^2+b^2)^{3/4}} + O \sum_{\substack{a,\, b \\ a^2+b^2 > x^{1/3}}} \frac{x^{3/4}}{(a^2+b^2)^{5/4}} \tag{32}$$

Označme $r(n)$ počet representací čísla n jako součtu dvou čtverců; potom jest

$$\sum_{\substack{a,\, b \\ 0 < a^2+b^2 \leq x^{1/3}}} \frac{1}{(a^2+b^2)^{3/4}} = \sum_{1 \leq n \leq x^{1/3}} \frac{r(n)}{n^{3/4}} = O(x^{1/12}),$$

jak známo, a

$$\sum_{\substack{a,\, b \\ a^2+b^2 > x^{1/3}}} \frac{1}{(a^2+b^2)^{5/4}} = \sum_{n > x^{1/3}} \frac{r(n)}{n^{5/4}} = O(x^{-1/12}),$$

jak známo.

Plyne tedy z (32):

$$\int_x^{x\pm x^{1/3}} A(y)\, dy = \pm J x^{4/3} + O(x^{2/3}).$$

Ježto pak $A(x)$ je neklesající funkcí x, platí

$$J x - O(x^{1/3}) = x^{-1/3}\int_{x-x^{1/3}}^{x} A(y)\, dy \leq A(x) \leq x^{-1/3}\int_x^{x+x^{1/3}} A(y)\, dy = J x + O(x^{1/3}),$$

čímž věta I. jest dokázána.

Věta II. Existují tři kladné konstanty C_6, C_7, C_8 takové, že množina bodů x, jež leží v intervalu $(x_2^{(1)}(g), x_1^{(1)}(g))$ a pro něž $Q(x) > C_7 x^{1/4}$, má míru větší než $C_8 g^{3/4}$ a množina bodů x, jež leží v intervalu $(x_1^{(1)}(g), x_2^{(1)}(g+1))$ a pro něž $Q(x) < -C_7 x^{1/4}$, má míru větší než $C_8 g^{3/4}$, je-li $g > C_6$.

Důkaz: Dokažme třeba první polovinu věty (druhá se dokáže analogicky).

Označme m míru množiny bodů x, v nichž jest
$$x_2^{(1)}(g) \leq x \leq x_1^{(1)}(g), \quad Q(x) > C_7\, x^{1/4}.$$
Dle věty I. jest pro všechna $x > 1$
$$Q(x) < C_9 \,.\, x^{1/3}.$$
Pro naše x platí však
$$x < C_{10}\, g^2;$$
tedy jest
$$\int\limits_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\, d\, y < m\, C_9 \,.\, C_{10}^{1/3}\, g^{2/3} + C_1\, g \,.\, C_7\, C_{10}^{1/4}\, g^{1/2}.$$
Dle 4. pomocné věty jest výraz v levo větší než $C_3\, g^{3/2}$ pro $g > C_2$; tedy jest
$$m \,.\, C_9 \,.\, C_{10}^{1/3}\, g^{2/3} + C_1\, C_7\, C_{10}^{1/4}\, g^{3/2} > C_3\, g^{3/2}.$$
Volím-li
$$C_7 = \frac{C_3}{2\, C_1\, C_{10}^{1/4}},$$
jest tedy
$$m > \frac{C_3}{2\, C_9\, C_{10}^{1/3}}\, g^{5/6} = C_8\, g^{5/6},$$
čímž důkaz proveden.

Bezprostředním důsledkem této věty jest

Věta III. Každému celému číslu $g > C_{11}$ lze přiřaditi dvě čísla $x_1(g)$, $x_2(g)$ tak, že
$$0 < x_1(g) - x_2(g) < C_{12}\, g,$$
$$0 < x_2(g+1) - x_1(g) < C_{12}\, g,$$
$$x_1(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1}\, g^2 + O(g), \quad x_2(g) = \frac{\pi^2}{\lambda_1}\, g^2 + O(g),$$
$$Q[x_1(g)] > C_7\, x_1(g)^{1/4},$$
$$Q[x_2(g)] < -C_7\, x_2(g)^{1/4}.$$

Neboť, je-li g dosti velké, existuje dle věty II. v intervalu $[x_2^{(1)}(g), x_1^{(1)}(g)]$ resp. $[x_1^{(1)}(g), x_2^{(1)}(g+1)]$ aspoň jedno takové číslo $x_1(g)$ resp. $x_2(g+1)$.

Je-li křivka L kružnice $u^2 + v^2 = 1$, redukuje se tato věta na Landauovu větu (γ), citovanou v úvodě.

Věta IV. Označme
$$Q^+(x) = \begin{cases} Q(x) \\ 0 \end{cases}, \text{ je-li } \begin{cases} Q(x) > 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases}, \quad Q^-(x) = \begin{cases} 0 \\ -Q(x) \end{cases}, \text{ je-li } \begin{cases} Q(x) > 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases}.$$
Potom pro $x > C_{13}$ platí
$$\int\limits_1^x Q^+(y)\, d\, y > C_{14}\, x^{3/4}, \tag{33}$$

$$\int_1^x Q^-(y)\,d\,y > C_{14}\,x^{5/4}. \tag{34}$$

Dokažme třeba (33), (34) se dokáže analogicky.
Platí

$$\int_1^x Q^+(y)\,d\,y > \sum_{\substack{C_2<g,\\ x_1^{(1)}(g)<x}} \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q^+(y)\,d\,y > \sum_{\substack{C_2<g,\\ x_1^{(1)}(g)<x}} \int_{x_2^{(1)}(g)}^{x_1^{(1)}(g)} Q(y)\,d\,y > C_3 \sum_{\substack{C_2<g,\\ x_1^{(1)}(g)<x}} g^{3/2}$$

(dle 4. pomocné věty).

Vzhledem k $x_1^{(1)}(g) \sim \dfrac{\pi^2}{\lambda_1}\,g^2$ (pro velká g) jest horní mez čísel g, přes něž se sčítá, asymptoticky rovna $\dfrac{\sqrt{\lambda_1 x}}{\pi}$; jest tedy

$$\sum_{\substack{C_2<g,\\ x_1^{(1)}(g)<x}} g^{3/2} \sim \int_0^{\frac{\sqrt{\lambda_1 x}}{\pi}} u^{3/2}\,d\,u = C_{15}\,x^{5/4}.$$

Jest tedy pro $x > C_{13}$:

$$\int_1^x Q^+(y)\,d\,y > C_3 \cdot \frac{C_{15}}{2}\,x^{5/4} = C_{14}\,x^{5/4},$$

čímž důkaz proveden.

Důsledek: Ježto patrně

$$\int_1^x |\,Q(y)\,|\,d\,y = \int_1^x Q^+(y)\,d\,y + \int_1^x Q^-(y)\,d\,y,$$

jest pro $x > C_{13}$:

$$\int_1^x |\,Q(y)\,|\,d\,y > 2\,C_{14}\,x^{5/4}.$$