Vojtěch Jarník

O simultanních diofantických aproximacích

Rozpravy Čes. akademie II. tř., XLV (1935), No. 19, 16 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500490

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XLV. ČÍSLO 19.

O simultanních diofantických aproximacích.

(Práce věnovaná Akademii za přijetí.)

Napsal

Vojtěch Jarník.

(Předloženo dne 18. října 1935.)

§ 1. Formulace problému; výsledky.

Budiž θ reálné číslo (všechna čísla v této práci jsou reálná). Potom nerovnosti

$$q > 0, \quad |q\theta - p| < \frac{1}{q}$$

mají, jak známo, nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech p, q. Tuto větu lze zobecniti dvěma různými způsoby; platí totiž tyto známé věty:

Buďte $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ($s \geqq 1$) jakákoliv čísla (nemusí býti navzájem různá). Potom nerovnosti

$$q > 0, \quad |q\theta_i - p_i| < \frac{1}{q^{\frac{1}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

mají nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech $q, p_1, p_2, \ldots, p_s$ a nerovnosti

$$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i\theta_i \right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^s} \tag{2}$$

mají rovněž nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_s$.

U *některých* systémů $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ platí daleko lepší výsledky než ty, které jsou obsaženy ve vztazích (1), (2). Abychom tuto okolnost mohli blíže sledovati, zaveďme tuto definici:

Definice. *Buďtež* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ($s \geqq 1$) *reálná čísla. Znakem* $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *označme horní hranici oněch čísel* α, *pro něž nerovnosti*

$$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i\theta_i \right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\alpha}}$$

mají nekonečně mnoho řešení v celých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_s$. *Znakem* $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *označme horní hranici oněch čísel* α, *pro něž nerovnosti*

$$q > 0, \quad \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+\alpha}{s}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

mají nekonečně mnoho řešení v celých číslech $q, p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Podle (1), (2) jest vždy

$$0 \leqq \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty, \quad 0 \leqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty.$$

Tuto definici zavedl A. Chinčin.[1])

Poznamenejme:

1. Existují-li celá čísla $x_0, x_1, \ldots, x_s$, jež nejsou vesměs rovna nule, a pro něž platí $x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i = 0$, jest ovšem též $k x_0 + \sum_{i=1}^{s} k x_i \theta_i = 0$ pro každé k a tedy $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$.

2. Pro $s = 1$ jest ovšem $\beta_2(\theta_1) = \beta_1(\theta_1)$.

Pro celé $s > 1$ a pro jakákoliv čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ platí podle Chinčina[2]) vztahy[3])

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \frac{\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{(s-1)\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + s^2}. \tag{4}$$

Z těchto nerovností plyne okamžitě:

Věta 1. *Budiž s celé,* $s > 1$. *Pro libovolná čísla* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *platí potom*

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \frac{s^2 \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{1-(s-1)\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)} \ \textit{pro}\ 0 \leqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) < \frac{1}{s-1}, \tag{5}$$

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty \quad \textit{pro} \quad \infty \geqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \frac{1}{s-1}. \tag{6}$$

---

[1]) A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Palermo Rendiconti 50 (1926), str. 170—195, viz hlavně str. 189—190. Slovní znění definice je u Chinčina trochu jiné, ale jeho definice je s naší definicí ekvivalentní. Definuje totiž $\beta_1(\theta_1\ \theta_2, \ldots, \theta_s)$ jako horní hranici oněch čísel α, pro něž nerovnosti

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} x_i^2} > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{\varepsilon}{r^{s+\alpha}} \tag{3}$$

mají pro každé $\varepsilon > 0$ řešení v celých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_s$. Poznamenejme: mají-li nerovnosti (3) pro každé kladné ε řešení v celistvých $x_0, x_1, \ldots, x_s$, mají i řešení s libovolně velkou hodnotou čísla r. Za druhé: jest $r \geqq \operatorname{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| \geqq r\, s^{-\frac{1}{2}}$.

Z těchto dvou poznámek plyne zřejmě ekvivalence Chinčinovy definice s naší definicí. Obdobně je tomu u čísla $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$.

[2]) L. c. [1]), srovnej zvláště str. 189—195.

[3]) V celém tomto pojednání klademe

$$\infty + a = \infty, \quad \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a}{c} \text{ pro } c \neq 0.$$

Vztahy (4) platí ovšem i pro $s = 1$ (a to se znamením rovnosti), klademe-li $\frac{\infty}{0 \cdot \infty + 1} = \infty$.

Důkaz. (6) je triviální. Budiž tedy

$$0 \leqq \beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) < \frac{1}{s-1}; \tag{7}$$

potom podle (4) jest

$\beta_1 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) (1 - (s-1) \beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)) \leqq s^2 \beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, odkudž vzhledem k (7) plyne (5).

Z výsledků některých mých prací plyne snadno, že nerovnosti (5), (6) jsou ostré; t. j. platí tato:

Věta 2. *Budiž $s > 1$, s celé, $0 \leqq \beta_2 \leqq \infty$. Potom existují čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ tak, že platí*

$$\beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2,$$

$$\beta_1 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{s^2 \beta_2}{1-(s-1)\beta_2} \quad \textit{pro} \quad 0 \leqq \beta_2 < \frac{1}{s-1},$$

$$\beta_1 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty \quad \textit{pro} \quad \frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 \leqq \infty.$$

Důkaz. 1. Budiž především $0 \leqq \beta_2 < \frac{1}{s-1}$; položme

$$\beta_1 = \frac{s^2 \beta_2}{1-(s-1)\beta_2};$$

dokázal jsem tuto větu:[4]) je-li $s > 1$, s celé, $0 \leqq \beta_1 \leqq \infty$, existují čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ taková, že

$$\beta_1 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_1, \quad \beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{\beta_1}{(s-1)\beta_1 + s^2};$$

pro naši hodnotu β_1 plyne tedy existence čísel $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ takových, že

$$\beta_1 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{s^2 \beta_2}{1-(s-1)\beta_2},$$

$$\beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{s^2 \beta_2}{(s-1) s^2 \beta_2 + s^2 (1-(s-1)\beta_2)} = \beta_2,$$

čímž věta 2. je v tomto případě dokázána.

2. Budiž za druhé $\frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 < \infty$.

Jest

$$\infty > 1 + \frac{1+\beta_2}{s} = \frac{s+1+\beta_2}{s} \geqq \frac{(s+1)(s-1)+1}{s(s-1)} = \frac{s}{s-1}. \tag{8}$$

Dokázal jsem tuto větu:[5]) je-li $\frac{s}{s-1} \leqq \alpha < \infty$, existují čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ tak, že nerovnosti

[4]) V. Jarník, Über einen Satz von A. Khintchine, Prace matematyczno-fizyczne, věta 1 (v tisku).

[5]) V. Jarník, Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne 39 (1932), str. 135—144; viz větu 1, kde místo s jest psáti $s-1$.

$$q > 0, \quad \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^a} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1) \tag{9}$$

mají v celistvých číslech $q, p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$ nekonečně mnoho řešení, je-li $a < \alpha$, ale nejvýše konečný počet řešení, je-li $a > \alpha$. Podle (8) můžeme této věty použíti pro hodnotu

$$\alpha = 1 + \frac{1 + \beta_2}{s}.$$

Tím dostáváme čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ taková, že nerovnosti (9) mají nekonečný (resp. nejvýše konečný) počet řešení v celistvých číslech $q, p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$, je-li $a < 1 + \frac{1+\beta_2}{s}$ $\left(\text{resp. } a > 1 + \frac{1+\beta_2}{s}\right)$.

Položme ještě $\theta_s = \theta_1$; potom je zřejmě

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \quad \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty,$$

čímž je věta 2. též v tomto případě dokázána.

3. Budiž konečně $\beta_2 = \infty$. Položme $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 1$; potom jest zřejmě

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty,$$

čímž je věta 2. dokázána ve všech možných případech.

Všimněme si Chinčinových nerovností (4), předpokládajíce $s > 1$. Z nerovností (4) plyne: je-li $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$, je $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$; je-li $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$, je $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$.

V těchto dvou případech je tedy hodnota čísla $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ jednoznačně určena hodnotou čísla $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$; dokážeme nyní, že tyto dva případy ($\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$ nebo $= \infty$) jsou jediné, t. j. dokážeme tuto větu, jež je hlavním obsahem této práce:

Věta 3. *Budiž* $s > 1$, s *celé,* $0 < \beta_2 < \infty$. *Potom existují čísla* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ *tak, že*

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) = \beta_2,$$
$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \neq \beta_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s).$$

Abychom tuto větu dokázali, dokážeme tyto dvě věty:

Věta 4. *Budiž* $s > 1$, s *celé,* $0 < \beta_2 < \frac{s+1}{s-1}$; *potom existují čísla* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *tak, že*

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \quad \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \frac{s(s+1)\beta_2}{s+1-(s-1)\beta_2}.$$

Věta 5. *Budiž* $s \geqq 1$, s *celé,* $0 \leqq \beta_2 < \infty$; *potom existují čísla* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *tak, že*

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \quad \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) < \infty.$$

Z vět 2, 4, 5 plyne věta 3. Budiž totiž s celé, $s > 1$, $0 < \beta_2 < \infty$.

Jestliže jest $0 < \beta_2 < \frac{1}{s-1}$, potom existují podle vět 2, 4 čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ tak, že

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) = \beta_2,$$

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \frac{s^2 \beta_2}{1-(s-1)\beta_2} > \frac{s(s+1)\beta_2}{s+1-(s-1)\beta_2} \geqq \beta_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$$

[neboť

$$s^2 \beta_2 (s+1-(s-1)\beta_2) - s(s+1)\beta_2(1-(s-1)\beta_2) =$$
$$= \beta_2^2 s(s-1) + \beta_2 s(s^2-1) > 0].$$

Jestliže za druhé $\frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 < \infty$, potom podle vět 2, 5 existují čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ tak, že

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) = \beta_2,$$
$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty > \beta_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s).$$

Tím je tedy věta 3. odvozena z vět 2, 4, 5. Ježto věta 2. již byla dokázána, zbývá nám dokázati větu 4. a 5; těmto důkazům jest věnován zbytek této práce.

§ 2. Důkaz věty 4.

Budiž s celé kladné číslo; systémy reálných čísel $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ budeme pojímati jako body s — rozměrného cartézského prostoru R_s. Množství bodů $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, hovících nerovnostem.

$$0 \leqq \theta_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

budeme označovati písmenem W. Budiž M bodové množství v R_s, budiž $\alpha > 0$. Potom definujeme číslo $L(M; x^\alpha)$ takto. Budiž $\rho > 0$ a budiž $\mathfrak{S}$ nejvýše spočetný systém krychlí[6]) $W_1, W_2, \ldots$, jejichž hrany $d_1, d_2, \ldots$ jsou vesměs menší než ρ; systém $\mathfrak{S}$ nechť pokrývá množství M. Položme[7])

$$\Lambda(\mathfrak{S}) = \sum_i d_i^\alpha.$$

Dolní hranici čísel $\Lambda(\mathfrak{S})$ pro všechny takové systémy $\mathfrak{S}$ (pokrývající množství M a složené z nejvýše spočetného množství krychlí o hranách vesměs menších než ρ) označme znakem $L_\varrho(M; x^\alpha)$. Klesá-li ρ, zostřuje se podmínka $d_i < \rho$, tedy $L_\varrho(M; x^\alpha)$ neklesá a tedy existuje limita

$$\lim_{\varrho = 0+} L_\varrho(M; x^\alpha) = L(M; x^\alpha) \quad (0 \leqq L(M; x^\alpha) \leqq \infty).^{8)}$$

[6]) Slovem „krychle" rozumím zde vždy otevřenou krychli, jejíž hrany jsou rovnoběžny s osami souřadnými.

[7]) Je-li řada vpravo divergentní, klademe $\Lambda(\mathfrak{S}) = \infty$.

[8]) Tuto definici (obecněji a v poněkud jiném tvaru) zavedl F. Hausdorff v pojednání „Dimension und äusseres Mass", Mathem. Annalen 79 (1919), str. 157—179. Při pevném α jest $L(M; x^\alpha)$ funkcí množství M, jež splňuje všechny podmínky pro vnější míru ve smyslu Carathéodoryho. Tyto věci však nebudeme potřebovati.

Z definice plynou okamžitě tyto důsledky, jež budeme potřebovati:

I. Je-li $A \subset B$, je $L(A; x^a) \leqq L(B; x^a)$.

II. $L(0; x^a) = 0$.[9])

III. $L(\sum_{i=1}^{\infty} M_i; x^a) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} L(M_i, x^a)$.

Nyní můžeme přistoupiti k důkazu věty 4. Hlavní pomůckou bude při tom tato

pomocná věta: *Budiž s celé,* $s > 1$, $0 < \lambda < \infty$, $\infty > \tau > s - \frac{\lambda}{s+\lambda+1}$. *Pro* $z > 0$ *budiž* E_z *množství oněch bodů* $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ *z* W, *pro něž nerovnosti*

$$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0, \quad |x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+z}}$$

mají nekonečně mnoho řešení v celých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_s$. *Tvrdím*:

$$L(E_\lambda; x^\tau) = 0.$$

Důkaz. Vyšetřujme řadu

$$\sum \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{(s+\lambda+1)(\tau-s+1)-1}}, \tag{10}$$

při čemž se sčítá přes všechna celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_s$, pro něž $\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0$. Dokažme, že řada (10) konverguje. K tomu cíli stačí dokázati, že konverguje řada S, jež se skládá z oněch členů řady (10), pro něž $\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| = |x_1|$. Sloučíme-li v řadě S všechny členy s touž hodnotou čísla $|x_1|$, dostaneme řadu

$$2 \sum_{x_1=1}^{\infty} \frac{(2x_1+1)^{s-1}}{x_1^{(s+\lambda+1)(\tau-s+1)-1}},$$

jež konverguje, neboť

$$(s+\lambda+1)(\tau-s+1)-1-(s-1) > (s+\lambda+1)\left(1-\frac{\lambda}{s+\lambda+1}\right)-s = 1.$$

Tím je konvergence řady (10) dokázána.

Jestliže $x_0, x_1, \ldots, x_s$ jsou celistvá čísla taková, že

$$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0, \tag{11}$$

označme znakem $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ množství oněch bodů $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, pro něž platí

$$0 \leqq \theta_i < 1 \ (i = 1, 2, \ldots, s), \quad |x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda}}. \tag{12}$$

[9]) Znakem 0 značíme jednak nulu, jednak prázdné množství; nedorozumění jest vyloučeno.

Budiž dán nyní systém celých čísel $x_0, x_1, \ldots, x_s$ tak, že platí (11); zvolme index r ($1 \leqq r \leqq s$) tak, že $|x_r| = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|$. Budiž $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ libovolný bod z $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$, t. j. budiž

$$0 \leqq \theta_i < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{|x_r|^{s+\lambda}}. \tag{13}$$

Potom lze zvoliti čísla $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ tak, že jest

$$\eta_i = \frac{k_i}{|x_r|^{s+\lambda+1}} \; (k_i \text{ celé, } 0 \leqq k_i \leqq |x_r|^{s+\lambda+1}), \; |\theta_i - \eta_i| < \frac{1}{|x_r|^{s+\lambda+1}} \text{ pro } i \neq r, \tag{14}$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \eta_i = 0. \tag{15}$$

Potom jest podle (13), (15)

$$\left| \sum_{i=1}^{s} x_i (\theta_i - \eta_i) \right| < \frac{1}{|x_r|^{s+\lambda}}$$

a tedy podle (14)

$$|\theta_r - \eta_r| < \frac{1}{|x_r|} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{s} |x_i| \, |\theta_i - \eta_i| + \frac{1}{|x_r|^{s+\lambda+1}} < \frac{s}{|x_r|^{s+\lambda+1}}. \tag{16}$$

Podle (14), (16) leží tedy bod $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ v krychli o středu $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ a o hraně $2s\,|x_r|^{-s-\lambda-1}$.

Sestrojme všechny body $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$, jež hoví vztahům

$$\eta_i = \frac{k_i}{|x_r|^{s+\lambda+1}} \; (k_i \text{ celé, } 0 \leqq k_i \leqq |x_r|^{s+\lambda+1}) \text{ pro } i \neq r,$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \eta_i = 0;$$

počet těchto bodů jest

$$z(x_0, x_1, \ldots, x_s) = (1 + [|x_r|^{s+\lambda+1}])^{s-1} \leqq (2 \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda+1})^{s-1}. \tag{17}$$

Okolo každého z těchto bodů jako středu sestrojme krychli o hraně

$$\frac{2s}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda+1}}; \tag{18}$$

označme tyto krychle v nějakém pořadí znaky

$$W_h(x_0, x_1, \ldots, x_s) \; (h = 1, 2, \ldots, z(x_0, x_1, \ldots, x_s)); \tag{19}$$

potom jest

$$E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s) \subset \sum_{h=1}^{z(x_0, x_1, \ldots, x_s)} W_h(x_0, x_1, \ldots, x_s). \tag{20}$$

Buďte nyní $x_1, x_2, \ldots, x_s$ celá čísla, pro něž platí (11). Tvrdím: potom existuje nejvýše

$$(2s + 3) \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| \tag{21}$$

celých čísel x_0 takových, že $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0$. Neboť z (12) plyne

$$|x_0| < \sum_{i=1}^{s} |x_i| + \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|^{s+\lambda}} \leq (s+1) \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|,$$

což dává nejvýše

$$2(s+1) \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| + 1 \leq (2s+3) \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|$$

možností pro číslo x_0.

Budiž nyní $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$. Zvolme číslo $T > 0$ tak, že

$$\frac{2s}{T^{s+\lambda+1}} < \rho, \quad (2s)^\tau 2^{s-1} (2s+3) \sum_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_s \\ \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > T}} \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|^{(s+\lambda+1)(\tau-s+1)-1}} < \varepsilon \tag{22}$$

(sčítá se tedy přes celistvá $x_1, x_2, \ldots, x_s$, pro něž $\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > T$); takové T existuje, ježto řada (10) konverguje. Množství E_λ je zřejmě množství oněch bodů $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, jež leží v nekonečně mnoha množstvích $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$; tedy

$$E_\lambda \quad \sum_{\substack{x_0, x_1, \ldots, x_s \\ \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > T}} E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s). \tag{23}$$

Buďtež $W_1, W_2, \ldots$ všechny krychle $W_h(x_0, x_1, \ldots, x_s)$, při čemž $x_0, x_1, \ldots, x_s$ probíhají všechna celá čísla taková, že

$$\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > T, \quad E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0 \tag{24}$$

a index h probíhá čísla $1, 2, \ldots, z(x_0, x_1, \ldots, x_s)$. Budiž d_n hrana krychle W_n. Podle (18), (24), (22) jest $d_n < \rho$; podle (23), (20) jest

$$E_\lambda \subset \sum_n W_n$$

a podle (21), (17), (18), (22), jest

$$\sum_n d_n^\tau \leq \sum_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_s \\ \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| > T}} (2s+3) \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i| \left(2 \underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|^{s+\lambda+1}\right)^{s-1} \left(\frac{2s}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\operatorname{Max}} |x_i|^{s+\lambda+1}}\right) < \varepsilon.$$

Podle definice čísla $L_\varrho(E_\lambda; x^\tau)$ jest tedy $L_\varrho(E_\lambda; x^\tau) < \varepsilon$ pro každé $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$, tedy $L_\varrho(E_\lambda; x^\tau) = 0$ pro každé $\rho > 0$, tedy $L(E_\lambda; x^\tau) = 0$; tím je pomocná věta dokázána.

Důkaz věty 4. Budiž s celé, $s > 1$, $0 < \beta_2 < \frac{s+1}{s-1}$. Položme $\sigma = \frac{s(s+1)\beta_2}{s+1-(s-1)\beta_2}$. Budiž H množství oněch bodů $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ z W, pro něž $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) > \sigma$. Je-li tedy $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ bod z H, existuje celé kladné číslo n tak, že nerovnosti

$$\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0,\ \left|x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i\right| < \frac{1}{\operatorname*{Max}\limits_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\sigma+\frac{1}{n}}}$$

mají nekonečně mnoho řešení v celých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_s$; tedy jest

$$H \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_{\sigma+\frac{1}{n}} \tag{25}$$

(E_s má týž význam jako v pomocné větě). Jest však

$$\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2} = s - \frac{\sigma}{s+\sigma+1} > s - \frac{\sigma+\frac{1}{n}}{s+\left(\sigma+\frac{1}{n}\right)+1}$$

a tedy podle pomocné věty

$$L\left(E_{\sigma+\frac{1}{n}};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = 0$$

a tedy podle (25) (čtenář nechť má nyní stále na paměti vlastnosti I, II, III, uvedené na počátku tohoto paragrafu)

$$L\left(H;\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = 0. \tag{26}$$

Budiž dále K množství oněch bodů $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ z W, pro něž $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2$; pro $z > 0$ budiž K_z množství oněch bodů $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ z W, pro něž nerovnosti

$$q > 0,\quad \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+z}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

mají nekonečně mnoho řešení v celých číslech $q, p_1, p_2, \ldots, p_s$. Zřejmě

$$K_{\beta_2} \subset K + \sum_{n=1}^{\infty} K_{\beta_2+\frac{1}{n}}$$

a tedy

$$L\left(K_{\beta_2};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) \leqq L\left(K;\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} L\left(K_{\beta_2+\frac{1}{n}};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right). \tag{27}$$

Podle první věty mého pojednání „Über die simultanen diophantischen Approximationen“ jest však pro $z > 0$ [10])

$$L(K_z;\ x^\gamma) = \infty \text{ pro } 0 < \gamma \leqq \frac{(s+1)s}{s+1+z},$$

$$L(K_z;\ x^\gamma) = 0 \text{ pro } \gamma > \frac{(s+1)s}{s+1+z};$$

tedy

$$L\left(K_{\beta_2};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = \infty,\ L\left(K_{\beta_2+\frac{1}{n}};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = 0$$

[10]) Math. Zeitschrift 33 (1931), str. 505—543. V označení oné práce jest totiž $K_z = M(x^{-\alpha}; s)$, kde $\alpha = 1 + \frac{1+z}{s}$.

a tedy podle (27)

$$L\,(K\,;\ x^{\frac{(s+1)\,s}{s+1+\beta_2}}) = \infty\,. \tag{28}$$

Podle (26), (28) jest $K - H \neq 0$. Existuje tedy bod $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, ležící v $K - H$; pro tento bod jest však

$$\beta_2\,(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \quad \beta_1\,(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \sigma = \frac{s\,(s+1)\,\beta_2}{s+1-(s-1)\,\beta_2}\,;$$

tím je věta 4. dokázána.

§ 3. Důkaz věty 5.

Budiž s celé kladné, $0 \leqq \beta_2 < \infty$. Znakem $A\ (s, \beta_2)$ označme toto tvrzení:

„Existují čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ tak, že

$$\beta_2\,(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \quad \beta_1\,(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) < \infty\,.\text{“}$$

Máme dokázati, že tvrzení $A\ (s, \beta_2)$ je správné. Důkaz provedeme indukcí podle s.

1. Budiž $s = 1$, $0 \leqq \beta_2 < \infty$. Definujme číslo θ_1 řetězovým zlomkem

$$\theta_1 = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots}}$$

kladme dále

$$p_0 = 0,\ q_0 = 1\,;\ p_1 = 1,\ q_1 = b_1\,;\ p_{n+1} = b_{n+1}\,p_n + p_{n-1}\,,$$
$$q_{n+1} = b_{n+1}\,q_n + q_{n-1} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Při tom čísla $b_1, b_2, \ldots$ volme postupně tak, že $b_{n+1} = [q_n^{\beta_2}]$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Pro $n = 0, 1, \ldots$ jest

$$\frac{1}{3\,q_n^{2+\beta_2}} \leqq \frac{1}{3\,b_{n+1}\,q_n^2} \leqq \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)\,q_n} < \left|\theta_1 - \frac{p_n}{q_n}\right| <$$
$$< \frac{1}{q_{n+1}\,q_n} \leqq \frac{1}{b_{n+1}\,q_n^2} \leqq \frac{2}{q_n^{2+\beta_2}}\,,$$

tedy $\beta_2\,(\theta_1) \geqq \beta_2$. Za druhé: je-li h, k celé, $k > 0$, jest buď $\left|\theta_1 - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{1}{2\,k^2}$ nebo jest $h = tp_n$, $k = tq_n$ (t celé kladné, n celé, $n \geqq 0$) a tedy

$$\left|\theta_1 - \frac{h}{k}\right| = \left|\theta_1 - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{3\,q_n^{2+\beta_2}} \geqq \frac{1}{3\,k^{2+\beta_2}}\,;$$

tedy $\beta_2\,(\theta_1) \leqq \beta_2$. Tedy jest $\beta_2\,(\theta_1) = \beta_2$, $\beta_1\,(\theta_1) = \beta_2\,(\theta_1) < \infty$, čímž tvrzení $A\ (1, \beta_2)$ dokázáno pro $0 \leqq \beta_2 < \infty$.

2. Budiž za druhé s celé, $s > 1$, $0 \leqq \beta_2 < \infty$ a předpokládejme,

že tvrzení A $(s-1, \beta)$ je správné pro každé β $(0 \leqq \beta < \infty)$. Rozeznávejme dva případy:

I. Budiž $0 \leqq \beta_2 < \frac{1}{s-1}$; potom je tvrzení A (s, β_2) správné podle věty 2.

II. Budiž $\frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 < \infty$. Položme

$$1 + \frac{1+\beta_2'}{s-1} = 1 + \frac{1+\beta_2}{s} = \gamma_2;$$

tedy

$$\beta_2' = \frac{s-1}{s}\beta_2 - \frac{1}{s}, \quad 0 \leqq \beta_2' < \infty, \quad \frac{s}{s-1} \leqq \gamma_2 < \infty.$$

Podle tvrzení A $(s-1, \beta_2')$ existují tedy čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$ tak, že

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}) = \beta_2', \quad \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}) = \delta < \infty.$$

Zvolme taková čísla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$. Budiž

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ježto nerovnosti

$$q > 0, \quad \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{\gamma_2 - \varepsilon_n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

mají pro každé celé kladné n nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech $q, p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}$, existuje posloupnost systémů celých čísel

$$q_n, p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{s-1,n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

takových, že

$$\lim_{n=\infty} q_n = \infty,$$

$$q_n > 1, \quad \left|\theta_i - \frac{p_{i,n}}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\gamma_2 - \varepsilon_n}} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, s-1; \; n = 1, 2, \ldots.$$

Položme $\lambda = \gamma_2(s+1) + 2$; znaky $c_1, c_2, \ldots$ budou značiti kladná čísla, závislá jen na $s, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}$. Položme ještě

$$\zeta = \operatorname{Max}(|\theta_1|, |\theta_2|, \ldots, |\theta_{s-1}|, 1).$$

Je-li $0 < a < b$, a celé, b celé, budiž

$$Z = \sum \frac{2(2s+3)\zeta}{|x_s| \operatorname{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda-1}}, \tag{29}$$

kde se sčítá přes všechna celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_s$, vyhovující vztahům

$$x_s \neq 0, \quad a \leqq \operatorname{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| < b.$$

Jest potom

$$\left.\begin{aligned}
Z &\leqq (s-1)\sum_{\substack{a \leqq \operatorname{Max}|x_i| = |x_1| < b\\ i=1,2,\ldots,s}} \frac{2(2s+3)\zeta}{|x_s|\,.\,|x_1|^{s+\lambda-1}} + \sum_{\substack{a \leqq \operatorname{Max}|x_i| = |x_s| < b\\ i=1,2,\ldots,s}} \frac{2(2s+3)\zeta}{|x_s|^{s+\lambda}} < \\
&< c_1 \sum_{a \leqq |x_1| < b} \frac{|x_1|^{s-2}\log(|x_1|+1)\,.}{|x_1|^{s+\lambda-1}} + c_1 \sum_{a \leqq |x_s| < b} \frac{|x_s|^{s-1}}{|x_s|^{s+\lambda}} < \\
&< c_2 \sum_{x=a}^{b-1} \frac{\log(x+1)}{x^{\lambda+1}} < c_3 \frac{1}{a^{\lambda-\frac{1}{2}}}\,.
\end{aligned}\right| \tag{30}$$

Pro celé kladné a jest dále

$$(2s+3)\,a\,\zeta\,(2a+1)^s < c_4\,a^{s+1}. \tag{31}$$

Položme $c_5 = c_4 + 1$. Konečně pro $l > c_6$ jest

$$l^{\frac{1}{2}} > c_3, \quad (l+1)^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}} < l^{s+1+\frac{1}{\gamma_s}}. \tag{32}$$

Zvolme rostoucí posloupnost $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$, jež je částečnou posloupností posloupnosti $q_1, q_2, q_3, \ldots$ a zvolme dále rostoucí posloupnost celých kladných čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ tak, že platí:

$$k_1 > c_6, \quad r_1 < k_1^{s+1+\frac{1}{\gamma_s}}, \tag{33}$$

$$k_n > (4\,c_5\,r_{n-1}^{\gamma_s})^{2\gamma_s}, \quad k_n^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}} < r_n < k_n^{s+1+\frac{1}{\gamma_s}} \text{ pro } n = 2, 3, \ldots. \tag{34}$$

Taková volba jest možná; napřed se položí $r_1 = q_1$ a k_1 se zvolí tak, že platí (33). Je-li n celé, $n > 1$ a jsou-li celá kladná čísla $k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1}$, $r_1 < r_2 < \ldots < r_{n-1}$ již zvolena, zvolíme v posloupnosti q_1, $q_2, \ldots$ za členem r_{n-1} člen r_n tak, že

$$r_n > r_{n-1}, \quad r_n^{\frac{1}{s+1+\frac{1}{\gamma_s}}} > (4\,c_5\,r_{n-1}^{\gamma_s})^{2\gamma_s}, \quad r_n > (k_{n-1}+1)^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}}. \tag{35}$$

Potom existuje celé číslo $k_n > k_{n-1}$ tak, že

$$k_n^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}} < r_n \leqq (k_n+1)^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}}; \tag{36}$$

ježto $k_n > k_1 > c_6$, jest podle (36), (32)

$$k_n^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}} < r_n < k_n^{s+1+\frac{1}{\gamma_s}}; \tag{37}$$

podle (37), (35) jest pak

$$k_n > r_n^{\frac{1}{s+1+\frac{1}{\gamma_s}}} > (4\,c_5\,r_{n-1}^{\gamma_s})^{2\gamma_s},$$

takže platí (34).

XIX.

Pro celé kladné n budiž M_n množství oněch čísel θ_s intervalu $(0, 1)$[11]), pro něž existují celá čísla $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s$ tak, že

$$x_s \neq 0, \quad k_n \leqq \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| < k_{n+1}, \quad |x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\gamma}}.$$

Tvrdím, že množství M_n lze pokrýti konečným počtem otevřených intervalů, jejichž počet je nejvýše roven číslu $c_4 k_{n+1}^{s+1}$ a jejichž délky mají součet, rovný nejvýše číslu $\frac{1}{k_n^{\lambda-1}}$.

Důkaz provedeme takto: jsou-li $(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ celá čísla, hovící podmínkám

$$x_s \neq 0, \quad k_n \leqq \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| < k_{n+1}, \tag{38}$$

budiž $L(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ množství oněch čísel θ_s, pro něž jest

$$0 < \theta_s < 1, \quad |x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i| < \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda}}. \tag{39}$$

Potom jest patrně $M_n = \Sigma L(x_0, x_1, \ldots, x_s)$, kde se sčítá přes všechna celá čísla $x_0, x_1, \ldots, x_s$, hovící vztahům (38).

Ze vztahů (39) plyne

$$|x_0| \leqq \zeta \sum_{i=1}^{s} |x_i| + \frac{1}{\operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda}} \leqq \zeta (s+1) \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|.$$

Jsou-li tedy $x_1, x_2, \ldots, x_s$ celá čísla, hovící vztahům (38), existuje nejvýše

$$1 + 2\zeta (s+1) \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| \leqq \zeta (2s+3) \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|$$

celých čísel x_0, pro něž jest $L(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0$. Každé neprázdné množství $L(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ lze podle (39) pokrýti jistým otevřeným intervalem $J(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ délky

$$\frac{2}{|x_s| \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda}}.$$

Všechny intervaly $J(x_0, x_1, \ldots, x_s)$, příslušné všem soustavám celých čísel $x_0, x_1, \ldots, x_s$, pro něž platí (38) a $L(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0$, pokrývají množství M_n. Počet těchto intervalů jest nejvýše (sčítá se přes celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_s$, hovící vztahům (38))

$$\Sigma\, \zeta (2s+3) \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| \leqq \zeta (2s+3)\, k_{n+1} (2k_{n+1}+1)^s < c_4 k_{n+1}^{s+1}$$

(podle (31)) a součet jejich délek jest nejvýše (podle $k_n > c_6$, (29), (30), (32))

$$\Sigma\, \zeta (2s+3) \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| \cdot \frac{2}{|x_s| \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|^{s+\lambda}} < \frac{c_3}{k_n^{\lambda-\frac{1}{2}}} < \frac{1}{k_n^{\lambda-1}}.$$

Tím jest důkaz proveden.

---

[11]) (a, b) značí otevřený, $< a, b >$ uzavřený interval.

Tvrdím nyní: existuje posloupnost celých čísel $z_1, z_2, z_3, \ldots$, mající tyto vlastnosti: položíme-li pro $n = 1, 2, \ldots$

$$S_n = \left\langle \frac{z_n}{r_n} - \frac{1}{r_n^{\gamma_s}}, \ \frac{z_n}{r_n} + \frac{1}{r_n^{\gamma_s}} \right\rangle,$$

jest pro $n = 2, 3, \ldots$

$$S_1 \subset (0, 1); \tag{40}$$

$$S_n \subset S_{n-1}; \tag{41}$$

$$S_n M_{n-1} = 0. \tag{42}$$

Důkaz provedeme takto: Zvolíme především $z_1 = 1$; ježto $r_1 > 1$, $\gamma_2 > 1$, platí (40). Budiž nyní m celé, $m \geqq 2$ a předpokládejme, že celá čísla $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ byla již zvolena tak, že platí (40) a pro $n = 2, 3, \ldots, m - 1$ též (41), (42) (pro $m = 2$ ovšem podmínky (41), (42) odpadají). Množství M_{m-1} je pokryto otevřenými intervaly, jejichž počet je nejvýše roven číslu $c_4 k_m^{s+1}$ a jejichž délky mají součet nejvýše rovný číslu $k_{m-1}^{-(\lambda-1)}$. Ježto $r_{m-1} < k_{m-1}^{s+1+\frac{1}{\gamma_s}}$, jest

$$\frac{1}{r_{m-1}^{\gamma_s}} > \frac{1}{k_{m-1}^{(s+1)\gamma_s+1}} = \frac{1}{k_{m-1}^{\lambda-1}}.$$

Odstraníme-li tedy z intervalu S_{m-1} všechny body těchto intervalů, zbude nám součet uzavřených intervalů (z nichž některé mohou se redukovati na body), jejichž počet je nejvýše roven číslu $c_4 k_m^{s+1} + 1 \leqq c_5 k_m^{s+1}$ a jejichž délky mají součet nejméně roven číslu $r_{m-1}^{-\gamma_s}$. Aspoň jeden z těchto intervalů — označme jej H — má tedy délku aspoň

$$r_{m-1}^{-\gamma_s} c_5^{-1} k_m^{-(s+1)} > 4 k_m^{-\left(s+1+\frac{1}{2\gamma_s}\right)} > \frac{4}{r_m};$$

existuje tedy celé číslo z_m tak, že

$$\left\langle \frac{z_m - 1}{r_m}, \ \frac{z_m + 1}{r_m} \right\rangle \subset H;$$

tím spíše tedy

$$S_m = \left\langle \frac{z_m}{r_m} - \frac{1}{r_m^{\gamma_s}}, \ \frac{z_m}{r_m} + \frac{1}{r_m^{\gamma_s}} \right\rangle \subset H.$$

Číslo z_m má tedy vskutku žádané vlastnosti, neboť jest $S_m \subset H \subset S_{m-1}$, $S_m M_{m-1} \subset H M_{m-1} = 0$.

Tedy existuje vskutku posloupnost $z_1, z_2, \ldots$, mající žádané vlastnosti. Ježto $r_n \to \infty$, existuje právě jedno číslo — označme je θ_s — ležící ve všech intervalech $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Vzhledem k (40), (41), (42) platí:

$$0 < \theta_s < 1,$$

$$\left| \theta_s - \frac{z_n}{r_n} \right| \leqq \frac{1}{r_n^{\gamma_s}} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{43}$$

θ_s neleží v žádném množství M_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Vyšetřujme nyní systém čísel $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$. Předně: je-li $\gamma > \gamma_2$, mají nerovnosti

$$q > 0, \quad \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^\gamma} \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

a tedy tím spíše nerovnosti

$$q > 0, \quad \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^\gamma} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

nejvýše konečný počet řešení v celých číslech q, p_i. Tedy jest

$$1 + \frac{1 + \beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{s} \leqq \gamma_2 = 1 + \frac{1 + \beta_2}{s}. \tag{44}$$

Za druhé: jest $r_n = q_{m_n}$, kde $m_n \geqq n$; ježto $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, existují pro každé celé kladné n celá čísla $z_{i,n}$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ tak, že

$$\left| \theta_i - \frac{z_{i,n}}{r_n} \right| < \frac{1}{r_n^{\gamma_s - \varepsilon_n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1);$$

dále však platí (43). Ježto $\varepsilon_n \to 0$, plyne odtud

$$1 + \frac{1 + \beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{s} \geqq \gamma_2 = 1 + \frac{1 + \beta_2}{s}. \tag{45}$$

Z (44) a (45) plyne tedy $\beta_2 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2$.

Za třetí: budiž $\mu = \text{Max} (\lambda, \delta)$, tedy $\mu < \infty$. Jsou-li čísla $x_0, x_1, \ldots, x_s$ celá, $\underset{i=1,2,\ldots,s}{\text{Max}} |x_i| \geqq k_1$, $x_s \neq 0$, existuje číslo celé $n > 0$ tak, že

$$k_n \leqq \underset{i=1,2,\ldots,s}{\text{Max}} |x_i| < k_{n+1};$$

ježto θ_s neleží v M_n, jest

$$\left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| \geqq \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\text{Max}} |x_i|^{s+\lambda}} \geqq \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\text{Max}} |x_i|^{s+\mu}};$$

tedy nerovnosti

$$|x_s| \neq 0, \quad \underset{i=1,2,\ldots,s}{\text{Max}} |x_i| > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\text{Max}} |x_i|^{s+\mu}}$$

mají nejvýše konečný počet řešení v celých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_s$. Ježto $\beta_1 (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1}) = \delta$, mají nerovnosti

$$\underset{i=1,2,\ldots,s-1}{\text{Max}} |x_i| > 0, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s-1} x_i \theta_i \right| < \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s-1}{\text{Max}} |x_i|^{(s-1)+(\delta+1)}}$$

nejvýše konečný počet řešení v celých číslech $x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}$. Tedy též nerovnosti

$$| x_s | = 0, \quad \underset{i=1,2,\ldots,s}{\mathrm{Max}} | x_i | > 0, \quad | x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i | < \frac{1}{\underset{i=1,2,\ldots,s}{\mathrm{Max}} | x_i |^{s+\mu}}$$

$$\text{(zde je } \underset{i=1,2,\ldots,s}{\mathrm{Max}} | x_i | = \underset{i=1,2,\ldots,s-1}{\mathrm{Max}} | x_i |, \quad s + \mu \geqq (s-1) + (\delta + 1))$$

mají nejvýše konečný počet řešení v celých číslech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s$. Jest tedy zřejmě $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \mu < \infty$, čímž tvrzení $A(s, \beta_2)$ dokázáno.