Vojtěch Jarník

O derivaci funkce jedné proměnné

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXII (1923), No. 5, 8 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500484

O derivaci funkcí jedné proměnné.

Napsal
Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 12. ledna 1923.

Dříve, než přistoupím k vlastnímu předmětu této práce, vyložím stručně některá označení a pojmy, jichž v dalším užívám.

V tomto článku uvažuji funkce jedné reálné proměnné x, definované na *uzavřeném intervalu* $< a, b >$ (t. j. pro $a \leqq x \leqq b$). Na rozdíl od uzavřeného intervalu nazývám množinu bodů x, hovících nerovninám $a < x < b$, prostě *intervalem* a značím ji (a, b). Za hodnoty funkční připouštím též $+\infty$ a $-\infty$. Funkci, jež nenabývá těchto hodnot, nazývám funkcí *konečnou*; funkci, jejíž hodnoty jsou ohraničeny shora i zdola, funkcí *ohraničenou*. Je-li funkce definována ve všech bodech dokonalé množiny P, říkáme, že je „*spojitá v bodě x_0 na množině P*", je-li x_0 bodem množiny P a je-li $\lim f(x) = f(x_0)$, když x se blíží x_0 po množině P; při tom připouštím i limity nevlastní ($+\infty$ a $-\infty$). Oscilací funkce $f(x)$ na množině A rozumím rozdíl horní a dolní hranice $f(x)$, když x jest na A. Je-li některá z hranic nekonečná (což nastává vždy, je-li funkce v některém bodě množiny A nekonečná, může však nastati i jindy), počítám oscilaci dle početních pravidel

$$(+\infty) - a = +\infty, \quad a - (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

(a konečné). Nedefinuji tedy oscilaci tehdy a jen tehdy, je-li na A buď stále $f(x) = +\infty$ nebo stále $f(x) = -\infty$.

Jako pro funkci, tak i pro její derivaci připouštím hodnoty $+\infty$ a $-\infty$. Konečně užívám obvyklého označení: jsou-li A a B dvě množiny bodové, označuji $A\,B$ množinu bodů, společných oběma množinám.

Je-li funkce $f(x)$ definována na dokonalé množině P, a jestliže v každém intervalu (a, b), obsahujícím bod množiny P,[1]) existuje bod množiny P, v němž je funkce spojitá na P, říkáme, že *funkce je bodově nespojitá na P*.

[1]) a tedy ovšem nekonečně mnoho bodů P.

Baire nazval *funkcemi I. třídy* funkce, jež lze vyjádřiti jako limitu jednoduše spočetné posloupnosti funkcí spojitých a konečných v $< a, b >$. Dokázal pak tuto větu:[2])

Aby funkce (konečná či nekonečná) *byla funkcí I. třídy na* $< a, b >$, *je nutno a stačí, aby byla bodově nespojitá na každé množině dokonalé* P, *obsažené v* $< a, b >$.

Je téměř bezprostředně patrno: má-li funkce spojitá a konečná v $< a, b >$ derivaci v každém bodě $< a, b >$ (v bodě a derivaci z prava, v bodě b z leva), je tato derivace funkcí třídy I. na $< a, b >$.

Stačí totiž voliti posloupnost $h_1 > h_2 > \ldots$, $\lim_{n=\infty} h_n = 0$, položiti $f'(x) = \lim_{n=\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$ pro $a \leqq x < b$, a provésti jednoduchou úvahu ještě v bodě $x = b$ a jeho okolí. V tomto článku chci dokázati, že tuto větu lze rozšířiti i na funkce nespojité tímto způsobem:

I. Je-li $f(x)$ *libovolná funkce konečná v* $< a, b >$, *jež má v každém bodě* $< a, b >$ *derivaci* $f'(x)$ (*v bodě a derivaci z prava, v bodě b z leva*), *je tato derivace funkcí třídy I. na* $< a, b >$.

Je patrno ovšem, že v bodech nespojitosti musí býti $f'(x) = +\infty$ nebo $-\infty$. Že existují funkce nespojité, jež mají v každém bodě $< a, b >$ derivaci, jest rovněž každému jasno. Důkaz provedu tím, že dokáži: zvolím-li v $< a, b >$ libovolnou množinu dokonalou P, jest $f'(x)$ bodově nespojitá na P.

I.

Dříve, než přistoupím k vlastnímu důkazu, dokáži tři pomocné věty:

1. *Věta Steinitzova.*

Budiž $f(x)$ funkce konečná, definovaná v jistém okolí bodu $x = a$, a označme

$$\Psi(x', x'') = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}.$$

Nutná a postačující podmínka, aby existovala derivace $f'(x)$ (konečná nebo nekonečná) *v bodě* $x = a$ *jest, aby*

$$\lim_{n=\infty} \Psi(x_n', x_n'') \tag{1}$$

existovala (konečná či nekonečná) *a to vždy stejná, ať si volím jakkoliv posloupnosti* x_n', x_n'', *hoví-li jen podmínkám*

$$x_n' \leqq a \leqq x_n'', \quad x_n' < x_n'', \quad \lim_{n=\infty} (x_n'' - x_n') = 0. \tag{2}$$

Derivace rovná se pak limitě (1). Posloupnost dvojic $[x_n', x_n'']$, hovící vztahům (2), budu v dalším nazývati „*Steinitzovou posloupností o středu* a“. Důkaz neuvádím, ježto leží na snadě.

---

[2]) Viz na př. René Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris, 1905.

Viz ostatně: S t e i n i t z, Mathematische Annalen 52, str. 58—69; K n o p p, Mathematische Zeitschrift 2, str. 4; R y c h l í k, Über die Funktion von Bolzano, Věstník král. čes. spol. nauk, 1922.

2. *Věta*: *Mám-li interval* (a, b), *obsahující body dokonalé množiny* P, *lze zvoliti uzavřený interval* $< a', b' >$ *takový, že platí*:

a) $a < a' < b' < b$;

b) *bod* a' *je bodem zhuštění bodů* P *z prava.*

Volme v (a, b) libovolný bod x_0 z P, a volme α, β tak, že

$$a < \alpha < x_0 < \beta < b.$$

Potom buď α je již bodem zhuštění množiny P z prava, a v tomto případě volím prostě $a' = \alpha$, $b' = \beta$; nebo body P, ležící v pravo od α, mají jistou dolní hranici $\alpha' > \alpha$. Jest samozřejmě $\alpha' \leqq x_0$; dále α' je bodem zhuštění množiny P, a ježto není bodem zhuštění P z leva, je nutně bodem zhuštění z prava; naší větě hoví potom $a' = \alpha'$, $b' = \beta$.

Poznámka. Je samozřejmo, že bod a' patří ku P, a že v $< a', b' >$ leží nekonečně mnoho bodů P.

3. *Věta*: *Budiž definována funkce* (konečná nebo nekonečná) $f(x)$ *na dokonalé množině* P, *a nechť ke každému číslu* $\varepsilon > 0$ *a ke každému intervalu* $I = (a, b)$, *obsahujícímu body* P, *existuje jistý interval uzavřený*

$$\bar{I}' = < a', b' > \quad (a < a' < b' < b),$$

obsahující nekonečně mnoho bodů P *takový, že platí buď*

a) *oscilace* $f(x)$ *na* $\bar{I}' P$ *je menší nebo rovna* ε: $\mathfrak{O}(f; \bar{I}' P) \leqq \varepsilon$, *nebo*

b) $f(x) \geqq \dfrac{1}{\varepsilon}$ *pro všechny body* $\bar{I}' P$, *nebo*

c) $f(x) \leqq -\dfrac{1}{\varepsilon}$ *pro všechny body* $\bar{I}' P$; *potom je* $f(x)$ *bodově nespojitá na množině* P.

Poznámka. Že oscilace $\mathfrak{O}(f; \bar{I}' P)$ není definována, je-li v $\bar{I}' P$ stále $f(x) = +\infty$ nebo stále $f(x) = -\infty$, nevadí v dalších úvahách, ježto potom nastává případ *b*) nebo *c*).

Důkaz: Volme $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Volme pak libovolně interval $I = (a, b)$, obsahující body P. Mohou pak nastati dva různé případy:

1. případ. Existuje interval uzavřený

$$\bar{I}_1 = < a_1, b_1 > \quad (a < a_1 < b_1 < b),$$

obsahující nekonečně mnoho bodů P, v němž $\mathfrak{O}(f; \bar{I}_1 P) \leqq \varepsilon_1$. Potom $f(x)$ je ohraničená v $\bar{I}_1 P$, a tedy nemůže býti $|f(x)| \geqq \dfrac{1}{\varepsilon_n}$ v žádném bodě $\bar{I}_1 P$, je-li n větší než jisté n_0. Existuje tedy uvnitř intervalu $\bar{I}_1$ jistý interval uzavřený $\bar{I}_{n_0+1} = < a_{n_0+1}, b_{n_0+1} >$ takový, že obsahuje nekonečně mnoho bodů P a že $\mathfrak{O}(f; \bar{I}_{n_0+1} P) \leqq \varepsilon_{n_0+1}$. Zvolme uvnitř $\bar{I}_{n_0+1}$ dvě hodnoty c_{n_0+1}, d_{n_0+1} tak, že

$$a_{n_0+1} < c_{n_0+1} < d_{n_0+1} < b_{n_0+1},\ d_{n_0+1} - c_{n_0+1} < \tfrac{1}{2}(b_{n_0+1} - a_{n_0+1})$$

a že v (c_{n_0+1}, d_{n_0+1}) leží body P. Existuje opět jistý interval uzavřený $\bar{I}_{n_0+2} = < a_{n_0+2}, b_{n_0+2} >$, obsahující nekonečně mnoho bodů P, takový, že

$$\mathfrak{O}(f; \bar{I}_{n_0+2} P) \leqq \varepsilon_{n_0+2},\ c_{n_0+1} < a_{n_0+2} < b_{n_0+2} < d_{n_0+1}.$$

V intervalu (a_{n_0+2}, b_{n_0+2}) zvolíme opět c_{n_0+2}, d_{n_0+2} tak, že

$$a_{n_0+2} < c_{n_0+2} < d_{n_0+2} < b_{n_0+2},\ d_{n_0+2} - c_{n_0+2} < \tfrac{1}{2}(b_{n_0+2} - a_{n_0+2}),$$

a že v (c_{n_0+2}, d_{n_0+2}) leží body P, a sestrojíme obdobně interval uzavřený $\bar{I}_{n_0+3}$. Tak postupujíce, dostáváme posloupnost intervalů uzavřených

$$\bar{I}_{n_0+\varkappa} = < a_{n_0+\varkappa}, b_{n_0+\varkappa} > \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

takových, že $a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \ldots < b_{n_0+2} < b_{n_0+1}$,

(3) $$\lim_{\varkappa=\infty} (b_{n_0+\varkappa} - a_{n_0+\varkappa}) = 0,$$

(4) $$\mathfrak{O}(f; \bar{I}_{n_0+\varkappa} P) \leqq \varepsilon_{n_0+\varkappa};$$

při tom v $\bar{I}_{n_0+\varkappa}$ leží nekonečně mnoho bodů P $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$.

Tyto intervaly mají tedy dle (3) jediný *vnitřní* bod společný, jenž je bodem zhuštění P a tedy sám bodem P; v tomto bodě je pak dle (4) vskutku $f(x)$ spojitá na P.

2. *případ.* Neexistuje žádný uzavřený interval $\bar{I}' = < a', b' >$ $(a < a' < b' < b)$, obsahující nekonečně mnoho bodů P, v němž

$$\mathfrak{O}(f; \bar{I}' P) \leqq \varepsilon_1$$

(a tím méně interval, v němž $\mathfrak{O}(f; \bar{I}' P) \leqq \varepsilon_n$ pro $n > 1$). Potom existuje jistý interval uzavřený $I_1 = < a_1, b_1 >$ $(a < a_1 < b_1 < b)$, obsahující nekonečně mnoho bodů P, v němž buď α) $f(x) \geqq \dfrac{1}{\varepsilon_1}$ pro všechna x z $\bar{I}_1 P$ nebo β) $f(x) \leqq -\dfrac{1}{\varepsilon_1}$ pro všechna x z $\bar{I}_1 P$. Uvažujme případ α) (případ β) lze diskutovati obdobně). Potom v žádném uzavřeném intervalu, obsaženém v $\bar{I}_1$, jenž obsahuje nekonečně mnoho bodů P, nemůže býti splněna okolnost a) ani c) naší věty vzhledem k žádnému ε_n; z toho jako v případě 1. plyne, že lze nalézti uzavřené intervaly

$$\bar{I}_n = < a_n, b_n >,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

takové, že

(5) $$a < a_1 < a_2 \ldots < b_2 < b_1 < b,$$

(6) $$\lim_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

(7) $$f(x) \geqq \frac{1}{\varepsilon_n} \text{ pro všechna } x \text{ v } \bar{I}_n P,$$

a že v $\bar{I}_n$ leží nekonečně mnoho bodů P.

Tyto intervaly mají dle (5) a (6) jediný *vnitřní* bod x_0 společný, jenž je bodem zhuštění P a tedy sám bodem P. V tomto bodě je $f(x_0) \geqq \frac{1}{\varepsilon_n}$ dle (7) pro všechna n, tedy $f(x_0) = +\infty$ a rovněž ze (7) je patrno, že $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá na P. Tedy vskutku v libovolném intervalu (a, b), obsahujícím body P, leží bod spojitosti funkce $f(x)$, čímž naše věta je dokázána.

II.

Vlastní důkaz věty I.

Uvažujme funkci konečnou $f(x)$ v $< a, b >$, jež má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci (konečnou nebo nekonečnou) $f'(x)$, v bodě a pak derivaci z prava, v bodě b z leva. Dokáži, že je nesprávný výrok (A), jejž vyslovím takto:

(A) *Existuje v* $< a, b >$ *množina dokonalá* P, *číslo* $\varepsilon > 0$ *a interval* $I = (\alpha, \beta)$ $(a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$, *obsahující body* P *tak, že v každém uzavřeném intervalu* $\bar{I}_1 = < a_1, b_1 >$ $(\alpha < a_1 < b_1 < \beta)$, *obsahujícím nekonečně mnoho bodů* P, *platí současně*:

1. *oscilace* $f'(x)$ *na* $\bar{I}_1 P$ *je definována a větší než* ε: $\mathfrak{O}(f'; \bar{I}_1 P) > \varepsilon$;
2. *existují body* $\bar{I}_1 P$, *v nichž* $f'(x) < \frac{1}{\varepsilon}$;
3. *existují body* $\bar{I}_1 P$, *v nichž* $f'(x) > -\frac{1}{\varepsilon}$.

Dokáži-li nesprávnost tohoto výroku, bude platiti patrně: mám-li libovolnou množinu dokonalou P v $< a, b >$, potom k libovolnému $\varepsilon > 0$ a libovolnému intervalu $I = (\alpha, \beta)$, obsahujícímu body P, bude existovati uzavřený interval $\bar{I}_1 = < a_1, b_1 >$ $(\alpha < a_1 < b_1 < \beta)$, obsahující nekonečně mnoho bodů P takový, že buď

$$\mathfrak{O}(f'; \bar{I}_1 P) \leqq \varepsilon$$

nebo

$$f'(x) \geqq \frac{1}{\varepsilon} \text{ pro všechna } x \text{ z } \bar{I}_1 P$$

nebo

$$f'(x) \leqq -\frac{1}{\varepsilon} \text{ pro všechna } x \text{ z } \bar{I}_1 P.$$

To však dle 3. pomocné věty znamená, že $f'(x)$ je bodově nespojitá na P, a ježto P je libovolná dokonalá množina v $< a, b >$, jest tím věta I. dokázána.

Nesprávnost výroku (A) dokáži nepřímo. Předpokládejme tedy, že výrok (A) je správný.

Zvolme interval uzavřený $\bar{I}_1 = < x_1, X_1 >$ v (α, β) — t. j. $\alpha < x_1 < X_1 < \beta$ — tak, aby x_1 bylo bodem zhuštění P z prava (to je možno dle 2. pomocné věty). Nechť má $f'(x)$ v bodě x_1 hodnotu a; mohou pak nastati tři případy:

α) $|a| \leq \frac{5}{\varepsilon}$;

β) $a > \frac{5}{\varepsilon}$ (může ovšem býti i $a = +\infty$);

γ) $a < -\frac{5}{\varepsilon}$ (též $a = -\infty$).

V každém z těchto tří případů zvolím body x_1', ξ_1, ξ_1' dle jistých předpisů, jež nyní udám.

Ad α) Zvolím především v pravo od x_1 hodnotu x_1' tak, aby $x_1' < X_1$, aby x_1' bylo bodem P a aby $|\Psi(x_1, x_1') - a| < \frac{\varepsilon}{12}$. To je možno, ježto x_1 je bodem zhuštění z prava množiny P. V intervalu uzavřeném $< x_1, \frac{x_1 + x_1'}{2} >$ leží nekonečně mnoho bodů P, tedy, ježto $\alpha < x_1 < \frac{x_1 + x_1'}{2} < \beta$, existuje dle výroku ($A$) v intervalu uzavřeném $< x_1, \frac{x_1 + x_1'}{2} >$ bod η_1 z P, v němž $|f'(\eta_1) - a| > \frac{\varepsilon}{3}$.

Tento bod η_1 je bodem zhuštění množiny P aspoň z jedné strany, a mimo to $x_1 < \eta_1 < x_1'$. Zvolme bod η_1' z P z té strany bodu η_1, z níž je η_1 bodem zhuštění P, a dále tak blízko, aby jednak

$$|\eta_1' - \eta_1| < \tfrac{1}{2}(x_1' - x_1),$$

jednak $x_1 < \eta_1' < x_1'$, jednak, aby platilo buď:

α_1) $|\Psi(\eta_1, \eta_1') - f'(\eta_1)| < \frac{\varepsilon}{12}$, je-li $f'(\eta_1)$ konečné, nebo

α_2) $|\Psi(\eta_1, \eta_1')| > \frac{6}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12}$, je-li $f'(\eta_1)$ nekonečné.

Označíme-li ještě ξ_1 menší a ξ_1' větší z obou čísel η_1, η_1', platí patrně v případě

α_1) $|\Psi(x_1, x_1') - \Psi(\xi_1, \xi_1')| > \frac{\varepsilon}{3} - 2\frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{6}$ a v případě

α_2) $|\Psi(x_1, x_1') - \Psi(\xi_1, \xi_1')| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ad β) Ježto $a > \frac{5}{\varepsilon}$, mohu volit x_1' v intervalu (x_1, X_1) tak, že $\Psi(x_1, x_1') > \frac{4}{\varepsilon}$. V intervalu uzavřeném $< x_1, \frac{x_1 + x_1'}{2} >$ leží opět nekonečně mnoho bodů P, a mohu tedy dle výroku (A) voliti bod η_1 z P tak, že $f'(\eta_1) < \frac{1}{\varepsilon}$, $x_1 < \eta_1 \leq \frac{x_1 + x_1'}{2}$.

Z té strany, z níž je η_1 bodem zhuštění P, volím η_1' z P tak, aby $|\eta_1' - \eta_1| < \frac{1}{2}(x_1' - x_1)$, $x_1 < \eta_1' < x_1'$, a aby $\Psi(\eta_1, \eta_1') < \frac{2}{\varepsilon}$. Zavedu-li opět označení ξ_1, ξ_1' pro menší resp. větší z čísel η_1, η_1', platí

$$\Psi(x_1, x_1') > \frac{4}{\varepsilon}, \ \Psi(\xi_1, \xi_1') < \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ad γ) Postupuji analogicky jako v případě β), a dostávám opět body x_1, x_1', ξ_1, ξ_1', pro něž nyní platí nerovniny

$$\Psi(x_1, x_1') < -\frac{4}{\varepsilon}, \ \Psi(\xi_1, \xi_1') > -\frac{2}{\varepsilon}.$$

Nyní ve všech třech případech α), β), γ) obsahuje interval (ξ_1, ξ_1') nekonečné množství bodů P, neboť η_1' bylo zvoleno z té strany η_1, z níž η_1 je bodem zhuštění P. Ježto pak každý interval uzavřený $< a_1, b_1 >$, kde $\xi_1 < a_1 < b_1 < \xi_1'$, hoví tím spíše podmínkám $\alpha < a_1 < b_1 < \beta$, lze ve výroku ($A$) nahraditi interval (α, β) intervalem (ξ_1, ξ_1'), a sestrojiti v intervalu (ξ_1, ξ_1') body x_2, x_2', ξ_2, ξ_2' stejně, jako jsme v intervalu (α, β) sestrojili body x_1, x_1', ξ_1, ξ_1'. Tak postupujíce, dostáváme nekonečné množství bodů x_n, x_n', ξ_n, ξ_n', hovících nerovninám

$$\alpha < x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < \xi_2' < x_2' < \xi_1' < x_1' < \beta,$$
$$\xi_n' - \xi_n < \tfrac{1}{2}(x_n' - x_n).$$

Z těchto nerovnin je vidět, že existuje jediný bod x_0 takový, že

$$x_n < x_0 < x_n',$$
$$\xi_n < x_0 < \xi_n'$$

pro všechna n. Dále $[x_n, x_n']$ i $[\xi_n, \xi_n']$ jsou patrně Steinitzovy posloupnosti o středu x_0 (viz pomocnou větu 1). Platí pak pro každé n aspoň jeden ze vztahů ($8\alpha_1$), ($8\alpha_2$), (8β), (8γ):

$$(8\alpha_1) \qquad |\Psi(x_n, x_n') - \Psi(\xi_n, \xi_n')| > \frac{\varepsilon}{6}$$

$$(8\alpha_2) \qquad |\Psi(x_n, x_n') - \Psi(\xi_n, \xi_n')| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(8\beta) \qquad \Psi(x_n, x_n') > \frac{4}{\varepsilon}, \ \Psi(\xi_n, \xi_n') < \frac{2}{\varepsilon}$$

$$(8\gamma) \qquad \Psi(x_n, x_n') < -\frac{4}{\varepsilon}, \ \Psi(\xi_n, \xi_n') > -\frac{2}{\varepsilon}.$$

Při tom, je-li $|\Psi(x_n, x_n')| > \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12}$, platí rozhodně vztahy (8β) nebo (8γ); neboť vztahy ($8\alpha_1$), 8(α_2) dostali jsme v případě, že $|f'(x_n)| \leq \frac{5}{\varepsilon}$, načež jsme volili x_n' tak, aby $|\Psi(x_n, x_n') - f'(x_n)| < \frac{\varepsilon}{12}$.

Je vidět, že výrazy $\Psi(x_n, x_n')$ a $\Psi(\xi_n, \xi_n')$ nemohou míti stejnou limitu konečnou pro $\lim n = \infty$; nemůže tedy v bodě x_0 existovati konečná derivace. Ale v bodě x_0 nemůže existovati ani nekonečná derivace; neboť kdyby bylo na př. $f'(x_0) = +\infty$, musilo by pro $n \geq n_0$ stále býti $\Psi(x_n, x_n') > \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12}$; musilo by tedy pro $n \geq n_0$ platiti buď (8β) nebo

(8γ). Ježto však (8γ) platiti nemůže pro $n \geqq n_0$ (neboť $\Psi(x_n, x_n') > 0$ pro $n \geqq n_0$), musí platiti pro všechna $n \geqq n_0$ (8β). Potom však by bylo $\Psi(\xi_n, \xi_n') < \frac{2}{\varepsilon}$ pro všechna $n \geqq n_0$, a nemohlo by býti

$$\lim_{n=\infty} \Psi(\xi_n, \xi_n') = +\infty.$$

Nemůže tedy v bodě x_0 za předpokladu správnosti výroku (A) existovati derivace $f'(x_0)$ ani konečná ani nekonečná, což je proti předpokladu, že $f(x)$ má v $< a, b >$ všude derivaci. Jest tedy výrok (A) nesprávný, a naše věta I. tím dokázána.

Poznámka. Je-li funkce $f(x)$ definována pouze na množině dokonalé ohraničené P^*, definujeme derivaci v bodě x množiny P^* výrazem $f'(x) = \lim \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$, když x' konverguje k x po množině P^*. I pro tento případ platí věta Steinitzova, kde ovšem x_n', x_n'' značí nyní body množiny P^*. Uvážíme-li ještě, že body x_n, x_n', ξ_n, ξ_n', vyskytující se v důkazu věty I., byly body množiny P — a tedy i bod x_0 byl bodem množiny P — a připomeneme-li si ještě rozšíření věty Baireovy, jež zní: *aby funkce, definovaná na množině dokonalé ohraničené P^* byla třídy 1. na P^*, jest nutno a stačí, aby byla bodově nespojitá na každé množině dokonalé, obsažené v P^**, vidíme, že postup důkazu, jehož bylo užito, dokazuje vlastně i větu poněkud obecnější, jež zní: *Má-li funkce konečná, definovaná na množině P^* dokonalé a ohraničené, derivaci v každém bodě množiny P^*, jest tato její derivace funkce třídy 1. na P^*.* Příslušné nepatrné změny v důkazu si čtenář snadno sám provede.

Věta I. byla téměř samozřejmá, byla-li $f(x)$ spojitá; toto její rozšíření není však samozřejmé ani pro funkce spojité na množině P^*.