Vojtěch Jarník

Über die Menge der Punkte, in welchen die Ableitung unendlich ist

Tôhoku Math. J. 37 (1933), pp. 248--253

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500478

Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist,

von

Vojtěch JARNIK in Prag.

Bezeichnungen. E bedeute im folgenden stets den eindimensionalen cartesischen Raum (d. h. die reelle Zahlengerade mit der üblichen Entfernungsdefinition). Das Wort „Menge" bedeute stets eine Teilmenge von E; $A \subset B$ bedeutet „A ist Teilmenge von B"; $x \varepsilon A$ bedeutet „x ist Element von A"; das Lebesguesche Mass einer Menge A bezeichne ich mit μA (wobei ich, wenn nötig, *eckige* Klammern benutze; z. B. bedeutet $\mu[A(B+C)]$ das Lebesguesche Mass von $A(B+C)$. Die leere Menge bezeichne ich mit 0. Jede offene Menge A lässt sich auf genau eine Weise als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen paarweise fremden offenen Intervallen darstellen:

$$A = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots;$$

diese Darstellung will ich die „kanonische Darstellung von A" nennen; die I_n mögen „kanonische Intervalle von A" heissen. Wenn A offen, B offen, $A \subset B$, so ist offenbar jedes kanonische Intervall von A Teilmenge eines kanonischen Intervalls von B. Eine Menge A soll „eine G_δ-Menge" heissen, wenn sie sich als Durchschnitt einer Folge offener Mengen darstellen lässt:

$$A = A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots \qquad (A_n \text{ offen}).$$

Mit (a, b) (wo $a < b$) bezeichne ich das (endliche oder unendliche) offene Intervall mit den Endpunkten a, b. Alle im folgenden auftretenden Zahlen und Funktionen sind reell.

Es sei nun $f(x)$ eine endliche reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, die für alle reellen x definiert ist. Es sei M_∞ die Menge derjenigen x, für welche $f'(x) = +\infty$ ist; bekanntlich ist[1]

---

(1) Vgl. St. Banach, Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie, *C.R.* **173** (1921), S. 457–459. Ich benutze folgende Bezeichnungen: wird $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x, h)$ gesetzt, so definiere ich die vier Hauptderivierten folgendermassen:

$$D^+f(x) = \limsup_{h=0+} \varphi(x,h); \quad D_+f(x) = \liminf_{h=0+} \varphi(x,h);$$
$$D^-f(x) = \limsup_{h=0-} \varphi(x,h); \quad D_-f(x) = \liminf_{h=0-} \varphi(x,h).$$

Haben alle vier Hauptderivierten denselben Wert, so nenne ich diesen (endlichen oder unendlichen) Wert die Ableitung von $f(x)$ (Zeichen: $f'(x)$).

$$\mu M_\infty = 0.$$

Es sei weiter M_∞^+ die Menge derjenigen x, für welche $D^+f(x) = +\infty$ ist; wenn $f(x)$ in E stetig ist, so ist bekanntlich die Menge M_∞^+ eine G_δ-Menge(1). Es gilt also folgender Satz:

Satz 1. *$f(x)$ sei stetig in E; für jedes x existiere die (endliche oder unendliche) Ableitung $f'(x)$; dann ist M_∞ eine G_δ-Menge vom Mass Null.*

Und noch etwas allgemeiner:

Satz 2. *$f(x)$ sei stetig in E; in jedem Punkt x, in welchem $D^+f(x) = +\infty$ ist, sei $f'(x) = +\infty$. Dann ist M_∞ eine G_δ-Menge vom Mass Null.*

(Denn aus den Voraussetzungen folgt $M_\infty = M_\infty^+$.)

In dieser kurzen Note will ich nun zeigen, dass die im Satz 2 auftretende Menge M_∞ tatsächlich jede G_δ-Menge vom Mass Null sein kann, wenn man die Funktion $f(x)$ geeignet wählt; ich beweise nämlich folgenden (noch etwas mehr besagenden)

Satz 3. *Es sei M eine G_δ-Menge vom Mass Null. Dann gibt es eine Funktion $f(x)$, welche folgende Eigenschaften besitzt:*

1. $f(x)$ ist stetig und monoton (nicht abnehmend) in E.

2. für $x \varepsilon M$ ist $f'(x) = +\infty$.

3. für $x \varepsilon (E - M)$ sind alle vier Hauptderivierten von $f(x)$ endlich(2).

Dem Beweis des Satzes 3. schicke ich folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Es seien drei Mengen M, A, C und eine Zahl η gegeben; $M \subset A$, $M \subset C$, A offen, C offen, $\mu M = 0$, $\mu C < 1$, $\eta > 0$. Dann gibt es eine Menge B mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$M \subset B$, $B \subset A$, $B \subset C$, B ist offen.*
2. *Ist (a, b) ein beliebiges kanonisches Intervall von C, so ist*

---

(1) Beweis: für ganzes $i > 0$, $k > 0$ sei U_{ik} die Menge derjenigen x, die folgende Eigenschaft haben: es gibt ein h mit

$$0 < h < \frac{1}{i}, \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > k;$$

aus der Stetigkeit von $f(x)$ folgt, dass U_{ik} offen ist; offenbar ist

$$M_\infty^+ = \prod_{i,k=1}^{\infty} U_{ik}.$$

Der Satz stammt von W. H. Young: On the infinite derivatives of a function of a single real variable, Arkiv för mat., astr. och fysik 1 (1903/4), S. 201–204.

(2) Ob auch im Satz 1 die Menge M_∞ jede G_δ-Menge vom Mass Null sein kann, d. h. ob es zu jeder G_δ-Menge M vom Mass Null eine in E stetige Funktion $f(x)$ gibt, für welche $f'(x)$ für jedes x existiert und $M_\infty = M$ ist, weiss ich nicht.

$$\mu[B(a,b)] \leqq \eta \mu[(a,b)] = \eta(b-a)$$

(*also* $\mu B \leqq \eta . \mu C < \eta$).

3. *Ist* (c, d) *ein beliebiges kanonisches Intervall von* B *und ist* (a, b) *dasjenige kanonische Intervall von* C, *für welches* $a \leqq c < d \leqq b$ *gilt, so ist*

$$c-a > \frac{d-c}{4}, \quad b-d > \frac{d-c}{4}.$$

Beweis: Es sei

$$C = I_1 + I_2 +$$

die kanonische Darstellung von C, wo $I_n = (a_n, b_n)$. Wegen $\mu M = 0$ ist $E - M$ dicht in E. Man kann also für jedes I_n zwei Folgen $x_{1,n}, x_{2,n},$; $y_{1,n}, y_{2,n} \ldots.$ so wählen, dass

$$a_n + \frac{b_n - a_n}{2^{k+1}} < x_{k,n} < a_n + \frac{b_n - a_n}{2^k}, \quad x_{k,n} \varepsilon\ (E-M);$$

$$b_n - \frac{b_n - a_n}{2^{k+1}} > y_{k,n} > b_n - \frac{b_n - a_n}{2^k}, \quad x_{k,n} \varepsilon\ (E-M)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots.).$$

Dann ist also

$$\left.\begin{aligned}
& x_{1,n} < \frac{a_n + b_n}{2} < y_{1,n}, \\
& x_{1,n} - a_n > \frac{b_n - a_n}{4} > \frac{y_{1,n} - x_{1,n}}{4}; \\
& b_n - y_{1,n} > \frac{b_n - a_n}{4} > \frac{y_{1,n} - x_{1,n}}{4}; \\
& 0 < x_{k,n} - x_{k+1,n} < (b_n - a_n)\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+2}}\right) < \frac{b_n - a_n}{2^k} < 4(x_{k+1,n} - a_n); \\
& b_n - x_{k,n} > b_n - y_{1,n} > \frac{b_n - a_n}{4} > \frac{x_{k,n} - x_{k+1,n}}{4}; \\
& 0 < y_{k+1,n} - y_{k,n} < (b_n - a_n)\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+2}}\right) < \frac{b_n - a_n}{2^k} < 4(b_n - y_{k+1,n}); \\
& y_{k,n} - a_n > x_{1,n} - a_n > \frac{b_n - a_n}{4} > \frac{y_{k+1,n} - y_{k,n}}{4} \\
& \qquad \lim_{k=\infty} x_{k,n} = a_n, \quad \lim_{k=\infty} y_{k,n} = b_n.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir bezeichnen mit P_n die Menge aller Punkte $x_{k,n}, y_{k,n}$ ($k=1, 2, 3, \ldots$):

$$P_n = \{x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots ; y_{1,n}, y_{2,n}, \ldots\}.$$

Wegen $\mu[MI_n]=0$ kann man eine offene Menge V_n mit

$$MI_n \subset V_n, \quad \mu V_n \leqq \eta \mu I_n$$

finden; dann ist

$$W_n = A V_n (I_n - P_n)$$

offenbar eine offene Menge mit

$$MI_n \subset W_n, \quad W_n \subset A, \quad W_n \subset I_n \subset C, \quad \mu W_n \leqq \eta \mu I_n ;$$

ist weiter (c, d) ein kanonisches Intervall von W_n, so ist $(c, d) \subset (e, f)$, wo (e, f) mit einem von den Intervallen

$$(x_{1,n}, y_{1,n}), \quad (x_{k+1,n}, x_{k,n}), \quad (y_{k,n}, y_{k+1,n}) \quad (k=1, 2, \ldots)$$

identisch ist. Nach (1) ist also

$$c - a_n \geqq e - a_n > \frac{f-e}{4} \geqq \frac{d-c}{4} ; \; b_n - d \geqq b_n - f > \frac{f-e}{4} \geqq \frac{d-c}{4}.$$

Setzen wir nun

$$B = W_1 + W_2 + \ldots,$$

so besitzt die Menge B offenbar alle verlangten Eigenschaften.

Beweis des Satzes 3. Es sei

$$M = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots \quad (A_i \text{ offen}, \ \mu M = 0). \qquad (2)$$

Wir wählen eine Folge $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ mit $0 < \eta_n < 1$, so dass die Reihe $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots$ konvergiert. Dann bilden wir eine Folge von Mengen $C_1, C_2, C_3, \ldots$, die für jedes ganze $k \geqq 1$ folgende Eigenschaften besitzt:

1^k) $M \subset C_k \subset A_k$; $\quad 2^k$) C_k ist offen;

3^k) $\mu C_k \leqq \eta_k$; $\quad 4^k$) $C_{k+1} \subset C_k$;

5^k) Ist (a, b) ein beliebiges kanonisches Intervall von C_k, so ist

$$\mu[(a, b) C_{k+1}] \leqq \eta_{k+1} \mu[(a, b)].$$

6^k) Ist (c, d) ein beliebiges kanonisches Intervall von C_{k+1} und ist (a, b) dasjenige kanonische Intervall von C_k, für welches $a \leqq c < d \leqq b$ gilt, so ist

$$c - a > \frac{d-c}{4}, \quad b - d > \frac{d-c}{4}.$$

Die Existenz einer solchen Folge C_1, C_2 ist leicht durch Induktion nachzuweisen:

Erstens: Wir bilden eine offene Menge D mit $M \subset D$, $\mu D \leqq \eta_1$ und setzen $C_1 = A_1 D$; dann gilt $1^k, 2^k, 3^k$ für $k=1$.

Zweitens: Es sei l ganz, $l \geqq 1$ und es seien bereits die Mengen $C_1, C_2, \ldots, C_l$ definiert, so dass die Bedingungen $1^k, 2^k, 3^k$ für $1 \leqq k \leqq l$, die Bedingungen $4^k, 5^k, 6^k$ für $1 \leqq k \leqq l-1$ erfüllt sind. Dann wenden wir den Hilfssatz mit $M, A_{l+1}, C_l, \eta_{l+1}$ statt M, A, C, η an und bezeichnen mit C_{l+1} die durch den Hilfssatz gelieferte Menge B; dann gilt offenbar 1^{l+1}) 2^{l+1}) 3^{l+1}) 4^l) 5^l) 6^l), w. z. b. w.

Wegen 1^k und (2) ist

$$M = C_1 C_2 C_3 \ldots . \tag{3}$$

Für ganzes $k \geqq 1$ und reelles x setzen wir

$$f_k(x) = \mu [C_k(-\infty, x)];$$

wegen $0 \leqq f_k(x) \leqq \mu C_k \leqq \eta_k$ ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

in E stetig und monoton (nicht abnehmend).

Ich soll noch beweisen:

I. Für $x \varepsilon M$ ist $f'(x) = +\infty$.

II. Für $x \varepsilon (E-M)$ sind alle vier Hauptderivierten von $f(x)$ endlich.

Beweis von I. Es sei $x \varepsilon M$; es sei n ganz, $n \geqq 1$. Es ist $x \varepsilon C_1 C_2 \ldots C_n$; also gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $|h| < \delta$ auch $(x+h) \varepsilon C_1 C_2 \ldots C_n$ gilt. Für $0 < |h| < \delta$, $1 \leqq k \leqq n$ ist also

$$\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} = 1,$$

also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqq n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis von II. Es sei $x \varepsilon (E-M)$; wegen (3) gibt es also eine ganze Zahl $p \geqq 1$, sodass $x \varepsilon (E - C_p)$. Ich behaupte nun: für jedes $h > 0$ und jedes ganze $k > p$ ist

$$\frac{f_{k+1}(x+h) - f_{k+1}(x)}{h} < 5\eta_{k+1}. \tag{4}$$

Es sei also $h > 0$, k ganz, $k > p$. Ich führe eine Zahl $h' = h'(x, h, k)$ folgendermassen ein:

1. Wenn $(x+h) \varepsilon (E - C_k)$, so sei $h' = h$.

2. Wenn $(x+h)\varepsilon C_k$, so gibt es ein kanonisches Intervall (c, d) von C_k, so dass $c<x+h<d$ ist; in diesem Fall setze ich $h'=d-x$. Es sei (a, b) dasjenige kanonische Intervall von C_{k-1}, für welches $a\leqq c<d\leqq b$ ist; wegen $x\varepsilon(E-C_p)$, $C_{k-1}\subset C_p$ (da $k-1\geqq p$) ist $a\geqq x$; nach der Eigenschaft 6^{k-1} ist $c-a>\frac{1}{4}(d-c)$, also $d<4(c-a)+c<4h+(x+h)$, also $h'<5h$.

In beiden Fällen ist also $h\leqq h'<5h$ und der Punkt $x+h'$ liegt in keinem kanonischen Intervall von C_k. Die kanonische Darstellung von C_k sei durch

$$C_k=I_1^k+I_2^k+I_3^k+\ldots.$$

gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x+h)-f_{k+1}(x)&\leqq f_{k+1}(x+h')-f_{k+1}(x)\\&=\mu[C_{k+1}(x, x+h')]=\sum_n\mu[I_n^k C_{k+1}];\end{aligned}$$

dabei wird über diejenigen n summiert, für welche

$$I_n^k\subset(x, x+h')$$

ist. Nach 5^k ist aber

$$\sum_n\mu[I_n^k C_{k+1}]\leqq\eta_{k+1}\sum_n\mu I_n^k\leqq\eta_{k+1}h'<5\eta_{k+1}h;$$

daraus folgt aber (4). Für jedes ganze $k\geqq 0$ und jenes $h\neq 0$ ist aber offenbar

$$0\leqq\frac{f_{k+1}(x+h)-f_k(x)}{h}\leqq 1. \tag{5}$$

Für jedes $h>0$ ist also

$$0\leqq\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<p+1+5\sum_{k=p+1}^{\infty}\eta_{k+1};$$

also sind die beiden rechtsseitigen Hauptderivierten endlich und derselbe Beweis gelingt auch für die linksseitigen Hauptderivierten (d. h. für $h<0$). Damit ist der Satz 3. bewiesen.

Prag, den 16. Dezember 1932.