Vojtěch Jarník

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre

Věstník Král. čes. spol. nauk 1931, No. XX, 17 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500470

XX.

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

Von VOJTĚCH JARNÍK.

(Vorgelegt am 4. März 1931.)

§ 1. Einleitung.

Im Folgenden sei stets r ganz, $r \geqq 4$. Ich betrachte in dieser Abhandlung ausschließlich positiv definite quadratische Formen der Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \quad (\alpha_j > 0),$$

die ich »Quadratformen« nennen möchte. Eine solche Quadratform möge rational heißen, wenn alle α_j ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl sind; sonst möge $Q(u)$ irrational heißen. Das Volumen des Ellipsoids $Q(u) \leqq x$, wo x — wie stets im Folgenden — eine positive Zahl ist, ist gleich $Hx^{\frac{r}{2}}$, wo

$$H = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}.$$

Es sei $A(x) = A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Wir definieren noch den »Gitterrest« $P(x) = P_Q(x)$ durch die Gleichung

$$A(x) = Hx^{\frac{r}{2}} + P(x).$$

Über die Größenordnung von $P(x)$ sind mehrere Resultate bekannt; ich führe nur folgende Ergebnisse an:
Für $r \geqq 5$ gilt für jede rationale Form

(1) $$P(x) = O(x^{\frac{r}{2}-1}),$$

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{r}{2}-1})$$

und für jede irrationale Quadratform (ebenfalls für $r \leqq 5$)

(2) $$P(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1}).\ ^{1.)}$$

Es ist weiter bekannt, daß für $r=4$ die Formeln (1), (2) nicht mehr richtig sind [wenigstens für einige Formen $Q(u)$].

Wenn man aber statt der Funktion $P(x)$ die beiden folgenden Mittelbildungen heranzieht: [2]

$$R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |P_Q(y)|\, dy,$$

$$T(x) = T_Q(x) = \left(\frac{1}{x}\int_0^x P^2{}_Q(y)\, dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

kann man Resultate erreichen, die auch noch für $r=4$ gelten. In Mw I habe ich nämlich u. a. bewiesen: für $r \geqq 4$ und für alle rationalen Quadratformen ist

$$R(x) = O(x^{\frac{r}{2}-1}),\ R(x) = \Omega(x^{\frac{r}{2}-1});$$

$$T(x) = O(x^{\frac{r}{2}-1}),\ T(x) = \Omega(x^{\frac{r}{2}-1}).$$

Und in dieser Abhandlung will ich auch ein Analogon der Formel (2) beweisen:

Satz 1. Wenn $r \geqq 4$ und wenn die Quadratform $Q(u)$ irrational ist, so ist

(3) $$R(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1}),\ T(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1}).$$

Satz 2. Die Abschätzungen des Satzes 1. sind scharf; mit anderen Worten:

---

[1]) Und diese Abschätzung läßt sich nicht weiter verschärfen.

[2]) Ich habe diese Mittelwerte in den Abhandlungen »Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre«, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), S. 62—84 und S. 85—97 (Zweite Abhandlung) untersucht; ich zitiere weiter diese Abhandlugen mit Mw I und Mw II. Eine Übersicht der älteren Resultate findet man in Mw I oder noch besser bei A. Walfisz, Über einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre Prace matematyczno-fizyczne, Tom 36, Zeszyt 2 (1928—9).

Es sei $r \leqq 4$, r ganz. Es sei $\varphi(x)$ eine für $x \leqq 0$ positive Funktion, die für $x \to \infty$ gegen Null strebt; dann läßt sich eine irrationale Quadratform

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0)$$

finden, für welche gilt

$$R(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1} \varphi(x)\right), \quad T(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1} \varphi(x)\right).$$

Zu diesen Sätzen möchte ich noch folgendes bemerken:

1) Es ist (Schwarzsche Ungleichung)

$$R(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |P(y)|\, dy \leq \frac{1}{x} \cdot \left(\int_0^x dy \int_0^x P^2(y)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} = T(x);$$

also genügt es, die o-Behauptungen für $T(x)$, die Ω-Behauptungen für $R(x)$ nachzuweisen.

2) Für $r \geqq 5$ und für irrationale Quadratformen gilt (2), also umsomehr (3). Um den Satz 1. zu beweisen, genügt es also zu zeigen: Wenn

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0)$$

eine irrationale Quadratform ist, so ist

$$\int_0^x P^2(y)\, dy = o(x^3).$$

3) Im Wortlaut des Satzes 2. kann man offenbar die Funktion $\varphi(x)$ als stetig und abnehmend annehmen.

Wir werden nun die Sätze 1. und 2. unter Berücksichtigung der eben gemachten Bemerkungen beweisen. Die Schwierigkeit liegt im Beweis des Satzes 1; die betreffende Methode ist eine Kombination der Methoden folgender Abhandlungen: Mw I; V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 2. Abhandlung, Mathematische Annalen 101 (1929), S. 136—146; V. Jarník und A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Zeitschrift 32 (1930), S. 152—160. Wegen Raumersparnis berufe ich mich im Folgenden oft auf die entsprechenden Stellen in Mw I.

§ 2. Beweis des Satzes 1.

Es sei

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{4} a_j u_j^2 \quad (a_j > 0)$$

eine irrationale Form; wir sollen die Abschätzung

$$\int_0^x P^2_Q(y)\, dy = o(x^3)$$

beweisen. Der Anfang des Beweises verläuft wörtlich so wie der Anfang des § 3 in Mw I, so daß ich diesen Anfang nicht zu wiederholen brauche. Dort wurde nämlich folgendes bewiesen (sogar für jedes ganze $r \geq 2$ und für beliebige — auch rationale — Quadratformen):[3])

Wenn wir irgendeine O — oder o — Abschätzung für $\int_0^x P^2_Q(y)$ dy beweisen wollen, genügt es, dieselbe Abschätzung für die folgenden drei Integrale nachzuweisen:

$$K = \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \ldots dt'; \; L = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \ldots dt' = \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \ldots dt' ;$$

$$M = \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \ldots dt'.$$

Der Integrand in diesen Integralen ist

---

[3]) Man lese dort die S. 68, 69, und die erste Hälfte der S. 70 nach, dann noch die letzten 3 Zeilen auf S. 72 und die S. 73.

$$\frac{\left|\prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\; s^{\frac{r}{2}}}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\; s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s|\,.\,|s'|\,.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}$$

und die auftretenden Zeichen haben folgenden Sinn:

$$A = \max_{1 \leq j \leq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}\,;\; s=\frac{1}{x}+ti\,,\; s'=\frac{1}{x}+t'i\;(t, t' \textit{ reell});$$

$$\Theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 s};$$

die vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen. Nun wurden in Mw I[4]) die Integrale K und L bereits hinreichend scharf abgeschätzt; die damaligen Resultate heißen nämlich (für $r=4$ spezialisiert)

$$K = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right) = O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right) = o(x^3),$$

$$L = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right) = O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right) = o(x^3);$$

es genügt also, noch

$$M = o(x^3)$$

zu zeigen.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$Z(s) = |\Theta(s)| + \left|\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right|,$$

$$N = \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{4} Z(\alpha_j s)\, Z(\alpha_j s')}{|s|\,.\,|s'|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\, dt\, dt'\,; \qquad {}^{5})$$

der Integrand in N ist offenbar nicht kleiner als der Integrand in M; also genügt es,

---

[4]) S 74—75.

[5]) Es wäre nicht schwierig, die Konvergenz dieses Integrals zu beweisen; sie folgt aber nachher von selbst.

$$N = o(x^3)$$

zu beweisen.

Zu diesem Zweck wollen wir die Irrationalität der Form Q auf folgende Weise heranziehen: Da mindestens eine von den Zahlen $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \frac{\alpha_4}{\alpha_1}$ irrational ist, so gibt es eine für $x > 0$ definierte und positive Funktion $f(x)$ mit

$$\lim_{x=\infty} f(x) = +\infty,$$

so daß aus

$$(4) \quad \begin{cases} h_j \text{ ganz}, k_j \text{ ganz}, h_j > 0, k_j > 0, \\ \left| \frac{h_j}{k_j} \frac{2\pi}{\alpha_j} - \frac{h_1}{k_1} \frac{2\pi}{\alpha_1} \right| \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}} (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

folgt

$$(5) \qquad Max\,(h_1, h_2, h_3, h_4;\ k_1, k_2, k_3, k_4) > f(x).$$

Es sei nun x so groß, daß $f(x) > 1$ und es sei (4) erfüllt; dann ist entweder

$$\operatorname*{Max}_{j=1,2,3,4} k_j > \sqrt{f(x)} \text{ oder } \operatorname*{Max}_{j=1,2,3,4} k_j \leqq \sqrt{f(x)};$$

im letzteren Fall ist also nach (5)

$$\operatorname*{Max}_{j=1,2,3,4} h_j > f(x), \text{ also } \operatorname*{Max}_{j=1,2,3,4} \frac{h_j}{k_j} > \sqrt{f(x)};$$

dann sind aber nach (4) alle Quotienten $\frac{h_j}{k_j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ grösser als[6]) $c\sqrt{f(x)}$, mindestens für $x > c$; also ist umsomehr $h_j > c\sqrt{f(x)}$. Also: für $x > c$ folgt aus (4) entweder

$$(6) \quad \text{Max}\,(k_1, k_2, k_3, k_4) > \sqrt{f(x)}$$

oder

$$(7) \quad \text{Min}\,(h_1, h_2, h_3, h_4) > c\sqrt{f(x)}.$$

Im Rest dieses Paragraphen sei stets $x > 1$. Eine Zahl $\frac{h}{k}$ nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn

---

[6]) Mit c bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, welche nur von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und von der Wahl der Funktion $f(x)$ abhängen.

$h \geqq 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h, k) = 1$. Ein für allemal bemerke ich: wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h \geqq 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h, k) = 1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) nenne ich benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h + \bar{h}}{k + \bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}, \frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h > 0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $I = \langle a, b)$ ein Intervall ist und $\delta > 0$, so bedeute δ I das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$.

Die kleinste Mediante ist $\frac{0 + 1}{1 + [\sqrt{x}]} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wenn also bei festem $j\ (j = 1, 2, 3, 4)$ die Zahl $\frac{h}{k}$ alle Fareypunkte mit $h > 0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left\langle \frac{2\pi}{\alpha_j \sqrt{x}}, +\infty \right)$, also umsomehr $\left(\text{da } A \geqq \frac{2\pi}{\alpha_j}\right)$ auch das Intervall $\left\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty \right)$. Bekanntlich ist

$$(8) \quad \mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\Theta'}{k\sqrt{x}},\ \frac{h}{k} + \frac{\Theta''}{k\sqrt{x}} \right),$$

$$\text{wo } \frac{1}{2} \leqq \Theta' \leqq 1,\ \frac{1}{2} \leqq \Theta'' \leqq 1.$$

Zur Abschätzung von N werden wir folgenden Hilfssatz oft brauchen:

Hilfssatz 1. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, *wo* t *in* $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ *liegt,*

$x > c$; *dann ist.*

$$(9) \quad c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k},$$

$$(10) \quad Z(\alpha_j s) < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}}$$

Beweis: Nach (8) ist

$$\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}},$$

woraus (wegen $h \geqq 1$) die Formel (9) folgt. Nach Mw I, S 72, Zeile 9. ist

$$|\Theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}}$$

dieselbe Abschätzung gilt aber auch für $\left|\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}\right|$ denn (man beachte (8), (9) und $k \leqq \sqrt{x}$)

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}} > \frac{c}{\sqrt{k}}\sqrt[4]{k^2 x} = c\sqrt[4]{x} > c\sqrt{k} > c\sqrt{\frac{k}{h}}$$

$$> c\sqrt{\frac{1}{t}} > c\left|\sqrt{\frac{1}{s}}\right|.$$

Daraus folgt aber (10).

Folgerungen. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti, x > c$; wenn t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, so ist nach (10)

$$(11) \qquad Z(\alpha_j s) < c\sqrt{\frac{x}{k}}.$$

Weiter: wenn $s = \frac{1}{x} + ti, x > c, t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$, so ist

$$(12) \qquad Z(\alpha_j s) < c\sqrt{x}$$

(denn t liegt dann in einem der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$).

Wenn t eine Zahl des Intervalls $\frac{A}{\sqrt{x}} \leqq t < \infty$ ist, so gibt es zu jedem j $(j = 1, 2, 3, 4)$ genau ein Paar von ganzen Zahlen

$$h_j = h_j(t), \quad k_j = k_j(t),$$

so dass der Punkt t im Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}h_j, k_j$ liegt. Selbstverständlich ist

$$(13) \qquad h_j > 0, \ 0 < k_j \leqq \sqrt{x}, \ (h_j, k_j) = 1 \ (j = 1, 2, 3, 4).$$

Wenn umgekehrt acht ganze Zahlen $h_1, h_2, h_3, h_4, k_1, k_2, k_3, k_4$ gegeben sind, die (13) erfüllen, so sei $M(h; k) = M(h_1, h_2, h_3, h_4; k_1, k_2, k_3, k_4)$ die Menge aller t des Intervalls $\left\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty \right)$, für welche gilt

$$h_j(t) = h_j, \quad k_j(t) = k_j \quad (j = 1, 2, 3, 4);$$

d. h. $M(h; k)$ ist der Durchschnitt der fünf Intervalle

$$\left\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty \right), \quad \frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Jede Menge $M(h; k)$ ist entweder leer oder ein halboffenes Intervall; auf jeder endlichen t-Strecke liegen höchstens endlich viele Mengen $M(h; k)$; je zwei Mengen $M(h; k)$ sind punktfremd; die Vereinigungsmenge aller Mengen $M(h; k)$ (für alle zulässigen Werte von $h_1, h_2, \ldots k_4$) ist genau das Intervall $\left\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty \right)$.

Wenn nun eine Zahl $t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$ in der Menge $M(h, k)$ liegt, so liegt sie im Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}h_j, k_j \ (j = 1, 2, 3, 4)$; also ist nach (8)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j} \right| \leqq \frac{A}{k_j\sqrt{x}} \leqq \frac{A}{\sqrt{x}},$$

woraus

$$\left| \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j} - \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} \right| \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$$

folgt; wenn $x > c$, so muss also entweder (6) oder (7) gelten. Mit anderen Worten:

Hilfssatz 2. Wenn $x > c$ und wenn die Menge $M(h_1, h_2, h_3, h_4; k_1, k_2, k_3, k_4)$ nicht leer ist, so gilt entweder (6) oder (7).

Wir schreiben nun N in der Form einer unendlichen Reihe

$$(14) \qquad N = \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_4 \\ k_1,\ldots,k_4}} \sum_{\substack{h'_1,\ldots,h'_4 \\ k'_1,\ldots,k'_4}} \int\limits_{M(h;k)} \int\limits_{M(h',k')} \ldots dt dt'$$

(der Integrand bleibt derselbe wie in N). Wenn irgendein Glied dieser Reihe von Null verschieden sein soll, so darf weder die zugehörige Menge $M(h; k)$ noch die zugehörige Menge $M(h'; k')$ leer sein; also muss nach Hilfssatz 2. (es sei nun stets $x > c$) entweder

$$(15) \qquad \operatorname{Max}(k_1, k_2, k_3, k_4, k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) > \sqrt{f(x)}$$

oder

(16) $\operatorname{Min}(h_1, h_2, h_3, h_4, h'_1, h'_2, h'_3, h'_4) > c\sqrt{f(x)}$ sein. Wir bezeichnen mit N_1 (bzw. mit N_2) die Summe derjenigen Glieder der Reihe in (14), für welche (15) [bzw. (16)] gilt; dann ist also

$$N \leqq N_1 + N_2$$

und es genügt,

$$(17) \qquad N_1 = o(x^3), \quad N_2 = o(x^3)$$

zu beweisen.

Wir greifen nun ein Glied der Reihe N_1 heraus und schätzen es folgendermassen ab [wobei wir (11), (12), (15) und den Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel benutzen]:

$$\int\limits_{M(h;k)} \int\limits_{M(h',k')} \frac{\prod\limits_{j=1}^{4} Z(\alpha_j s) Z(\alpha_j s')}{|s| . |s'| . \left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)} dt dt'$$

$$\leqq c \frac{x^{1/2}}{f^{1/32}(x)} \int\limits_{M(h,k)} \int\limits_{M(h',k')} \frac{\prod\limits_{j=1}^{4} Z^{7/8}(\alpha_j s) Z^{7/8}(\alpha_j s')}{|s| . |s'| . \left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)} dt dt'$$

$$< c \frac{x^{1/2}}{f^{1/32}(x)} \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{M(h,k)} \int\limits_{M(h',k')} \frac{Z^{7/2}(\alpha_j s) Z^{7/2}(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'.$$

Daher ist (man beachte, dass alle Mengen $M(h;k)$ überhaupt genau das Intervall $t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$ schlicht überdecken)

$$0 < N_1 < c \frac{x^{1/2}}{f^{1/32}(x)} \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{Z^{7/2}(\alpha_j s) Z^{7/2}(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'.$$

Nun wissen wir, dass die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ das ganze Intervall $t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$ überdeckt; um also die gewünschte Abschätzung (17) für N_1 zu beweisen, genügt es, die Abschätzung

$$(18) \quad \sum_{h,k,h',k'} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \mathrm{d}t \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}} \frac{Z^{7/2}(\alpha_j s) Z^{7/2}(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} \mathrm{d}t' = O(x^{5/4}) \quad (j=1,2,3,4)$$

nachzuweisen.

Ebenso greifen wir ein Glied der Reihe N_2 heraus [wo also (16) gilt] und schätzen es folgendermassen ab:[7])

$$\int\limits_{M(h;k)} \int\limits_{M(h';k')} \frac{\prod_{j=1}^{4} Z(\alpha_j s) Z(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'$$

$$< \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{M(h;k)} \int\limits_{M(h';k')} \frac{Z^{4}(\alpha_j s) Z^{4}(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'$$

---

[7]) Der letzte Teil der folgenden Ungleichungen ist eigentlich überflüssig; wir machen diesen Schritt nur, um bei beiden Summen (18), (19) denselben Exponenten $\frac{7}{2}$ zu bekommen.

$$-cx^{1/2}\sum_{j=1}^{4}\int\limits_{M(h;k)}\int\limits_{M(h';k')}\frac{Z^{7/2}(\alpha_j s)\,Z^{7/2}(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt'$$

Betrachten wir nun, dass die Menge $M(h_1,..,h_4;\ k_1,..,k$ im Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegt und dass in N_2 nur Glieder mit $h_j > c\sqrt{x}$ auftreten, und endlich dass entsprechendes auch für $M(h';k')$ gilt, so sehen wir, dass es zum Beweis der zweiten Formel (17) genügt, wenn wir die Abschätzung

$$(19)\quad \sum_{\substack{h,k,h',k'\\ h>c\sqrt{f(x)}\\ h'>c\sqrt{f(x)}}}\ \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}}\ \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}}\frac{Z^{7/2}(\alpha_j s)\,Z^{7/2}(\alpha_j s')}{|s|\ |s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt' = o(x^{5/2})\quad (j=1,2,3,4)$$

beweisen.

Wir setzen nun (bei gegebenem x und j)

$$\lambda(h,k,h',k') = \min\left(x, \frac{1}{\min|t-t'|}\right),$$

wo $\min|t-t'|$ die untere Grenze von $(t-t')$ bedeutet, wenn t das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ und t' das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}$ durchläuft; $\min\left(x, \frac{1}{0}\right)$ bedeute x. Nach dem Hilfssatz 1. ist also

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}}\ \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}}\frac{Z^{7/2}(\alpha_j s)\,Z^{7/2}(\alpha_j s')}{|s|.|s'|.\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt' <$$

$$c\lambda(h,k,h',k')\,\frac{k}{h}\,\frac{k'}{h'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{k^{7/4}\left(\frac{1}{x^2}+\left(t-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2\right)^{7/4}}\ .$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{k'^{7/4}\left(\frac{1}{x^2}+\left(t'-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h'}{k'}\right)^2\right)^{7/4}}$$

$$= c x^{3/2} \frac{1}{h\, h'\, k^{3/4}\, k'^{3/4}}\, \lambda(h, k, h', k') \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{7/4}}\right)^2$$

$$= c x^{3/2} \frac{\lambda(h, k, h', k')}{h\, h'\, k^{3/4}\, k'^{3/4}} \left(\text{Substitution } t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k} = \frac{u}{x}\right).$$

Wir setzen noch für $w \geq 1$

$$S(w) = \sum \frac{\lambda(h, k, h', k',)}{h\, h'\, k^{3/4}\, k'^{3/4}},$$

wobei über alle ganzen h, k, h', k' summiert wird, welche den Bedingungen

$$0 < k \lessdot \sqrt{x}, h \geq w, (h, k) = 1, 0 < k' \lessdot \sqrt{x}, h' \geq w, (h', k') = 1, k' \geq k$$

genügen. Um (18) und (19) zu beweisen, genügt es offenbar, die beiden Abschätzungen

(20) $S(1) = O(x)$, $S(c\sqrt{f(x)}) = o(x)$

nachzuweisen (die Einschränkung $k' \geq k$ ist aus Symmetriegründen unschädlich).

Wir schreiben nun

(21) $S(w) = S_1(w) + S_2(w)$,

wo in $S_1(w)$ alle Glieder mit $\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'}$, in $S_2(w)$ alle übrigen Glieder von $S(w)$ zusammengefasst sind. Die Abschätzung von $S_1(w)$ ist sehr leicht: aus $\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'}$ folgt $h = h'$, $k = k'$, also ist wegen $\lambda(h, k, h', k') \lessdot x$

$$S_1(w) \lessdot x \sum_{h \geq w} \sum_{0 < k \lessdot \sqrt{x}} \frac{1}{h^2\, k^{3/2}} < c\frac{x}{w},$$

also

(22) $S_1(1) = O(x)$, $S_1(c\sqrt{f(x)}) = o(x)$.

Die Abschätzung von $S_2(w)$ ist schwieriger, ich brauche sie aber nicht durchzuführen; denn in Mw I habe ich schon alles notwendige ausgeführt. Dort wurde nämlich (S. 77) mit S_2 folgende Summe bezeichnet:

$$\sum \frac{\lambda(h, k, h', k')}{k^{r/2-1}\, h\, k'^{r/2-1} k'},$$

mit den Summationsbedingungen

$0 < k \leqq \sqrt{x}, h \geqq 1, (h, k) = 1, 0 < k' \leqq \sqrt{x}, h' \geqq 1, (h', k') = 1, k' \geqq k$

$$\frac{h}{k} \neq \frac{h'}{k'};$$

für diese Summe wurde dann auf S. 77—80 eine Abschätzung gegeben, wobei damals in den Resultaten nur die Fälle $r=2, 3, 4$ beachtet wurden; diese Abschätzung (S. 77, Zeile 4. v. u. bis S. 80, Zeile 10. v. u.) lässt sich aber Wort für Wort auch für $r = \frac{7}{2}$ durchführen und ergibt

$$S_2 = O(x^{3/4} \log^2 x);$$

für $r = \frac{7}{2}$ ist aber dieses S_2 offenbar mit dem heutigen $S_2(1)$ identisch, also ist

(23) $S_2(1) = O(x^{3/4} \log^2 x) = o(x)$,

also umsomehr

(24) $S_2(c\sqrt{f(x)}) = o(x)$.

Aus (21), (22), (23), (24) folgt aber (20), w. z. b. w.

§ 3. Beweis des Satzes 2.

Es sei r ganz, $r \geqq 4$. Die Funktion $\varphi(x)$ sei definiert, stetig und abnehmend für $x \geqq 0$ und es sei $\varphi(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Es sei $\varrho(x)$ die zu $\varphi(x)$ inverse Funktion; also ist $\varrho(x)$ für $0 < x \leqq \varphi(0)$ abnehmend und stetig, $\varrho(\varphi(0)) = 0$, $\varrho(x) \to \infty$ für $x \to 0$. Endlich sei $\psi(x) = \varrho\left(\frac{1}{x}\right)$; also ist $\psi(x)$ für $x > \frac{1}{\varphi(0)}$ positiv, stetig und wachsend, $\psi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$: für $x \geqq \frac{1}{\varphi(0)}$ gilt weiter $\varphi(\psi(x)) = \varphi\left(\varrho\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$. Wir wählen nun eine i r r a t i o n a l e Zahl $\alpha > 1$, die folgende Eigenschaft besitzt:

Es gibt eine Folge von Paaren ganzer Zahlen
$p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots; p_n, q_n; \ldots,$ so dass

$$p_n > 0,\ q_n > \frac{1}{\varphi(0)},\ q_n \to \infty \text{ für } n \to \infty,$$

$$(25)\qquad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{3 q_n^2 \psi(q_n)}.\ ^{8)}$$

Wir betrachten nun die Form

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r-1} u_j^2 + \alpha u_r^2$$

und wir werden zeigen, dass

$$(26)\qquad \int_0^x |P_Q(y)|\,dy = \Omega\left(x^{r/2}\varphi(x)\right);$$

damit wird der Satz 2. bewiesen sein.

Es sei n eine beliebig gewählte natürliche Zahl, jedoch so gross, dass $q_n \psi(q_n) > 1$; l sei ganz,

$$(27)\qquad 0 \leqq l < q_n \psi(q_n) - 1.$$

Wir betrachten im r-dimensionalen Cartesischen Raum der Punkte $[u_1, u_2, \ldots, u_r]$ den Bereich

$$(28)\qquad \frac{l + {}^1/_3}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \frac{l + {}^2/_3}{q_n},$$

d. h. den Bereich, der zwischen den Ellipsoidhyperflächen $Q(u) = \frac{l + {}^1/_3}{q_n}$ und $Q(u) = \frac{l + {}^2/_3}{q_n}$ liegt. Wir setzen noch

$$Q_n(u) = \sum_{j=1}^{r-1} u_j^2 + \frac{p_n}{q_n} u_r^2;$$

für die Punkte des Bereiches (28) ist nach (25), (27), (28) (man beachte, dass aus $\alpha > 1$ folgt $u_r^2 \leqq Q(u)$)

$$|Q_n(u) - Q(u)| \leqq \frac{u_r^2}{3 q_n^2 \psi(q_n)} \leqq \frac{Q(u)}{3 q_n^2 \psi(q_n)}$$

---

[8]) Die Existenz solcher Zahlen α ist klar.

$$< \frac{l+1}{3q_n^2\psi(q_n)} < \frac{1}{3q_n},$$

also

$$(29) \qquad \frac{l}{q_n} < Q_n(u) < \frac{l+1}{q_n}.$$

Für jeden Gitterpunkt $|u_1, u_2, \ldots, u_r|$ ist $Q_n(u)$ offenbar ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{q_n}$; also folgt aus (29): im Bereich (28) liegen keine Gitterpunkte; die Funktion

$$A_Q(x) = Hx^{r/2} + P_Q(x)$$

ist also konstant für $\frac{l+{}^1\!/_3}{q_n} \leqq x \leqq \frac{l+{}^2\!/_3}{q_n}$; für diese Werte von x ist also

$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{r}{2}Hx^{r/2-1} < -\frac{r}{2}H\left(\frac{l}{q_n}\right)^{r/2-1}.$$

Diejenigen Punkte des Intervalls $\left(\frac{l+{}^1\!/_3}{q_n}, \frac{l+{}^2\!/_3}{q_n}\right)$, in welchen $|P(x)| < \frac{1}{12q_n}\frac{r}{2}H\left(\frac{l}{q_n}\right)^{r/2-1}$ ist, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens gleich $\frac{1}{6q_n}$ ist. Daher ist

$$\int_{\frac{l+{}^1\!/_3}{q_n}}^{\frac{l+{}^2\!/_3}{q_n}} |P(y)|\,\mathrm{d}y \geqq \frac{1}{6q_n}\cdot\frac{1}{12q_n}\,\frac{r}{2}H\left(\frac{l}{q_n}\right)^{r/2-1},$$

$$\int_0^{\psi(q_n)} |P(y)|\,\mathrm{d}y \geqq \frac{1}{144}rH\frac{1}{q_n^{r/2+1}}\sum_{0\leqq l<q_n\psi(q_n)-1} l^{r/2-1}$$

Daraus folgt aber

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\int\limits_0^{\psi(q_n)} |P(y)|\, dy}{(\psi(q_n))^{r/2}} \cdot q_n > 0,$$

d. h. (man beachte $\frac{1}{q_n} = \varphi\,(\psi(q_n)))$

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\int\limits_0^{\psi(q_n)} |P(y)|\, dy}{(\psi(q_n))^{r/2}\varphi(\psi(q_n))} > 0,$$

woraus wegen $\psi(q_n) \to \infty$ die Abschätzung (26) folgt.

Praha, den 16. Februar 1931.

Résumé.

Sur les valeurs moyennes dans la théorie des points à coordonnées entières.

Par Vojtěch Jarník.

Dans deux mémoires (Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Mathemat. Zeitschrift 33 (1931), p. 62—84 et 85—97), j'ai considéré les valeurs moyennes

$$R(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x |P(y)|\, dy,\ T(x) = \left(\frac{1}{x} \int\limits_0^x P^2(y)\, dy\right)^{1/2};$$

ici, nous démontrons deux théorèmes nouveaux, concernant l'étude — à l'aide de ces valeurs moyennes — des »ellipsoïdes incommensurables«.
