Vojtěch Jarník

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 2. Abhandlung

Math. Zeitschrift 33 (1931), pp. 85--97

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500468

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

Zweite Abhandlung[1]).

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

---

§ 1.

Definitionen und Bezeichnungen[2]).

Es sei stets r ganz, $r \geqq 2$;

$$Q = Q(u) = \sum_{\mu, \nu = 1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

sei stets eine positiv definite Form[3]) mit der Determinante D; die Form Q heiße *rational*, wenn es eine Zahl α gibt, so daß $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\alpha$, wo die $b_{\mu\nu}$ ganz sind; sonst heiße Q *irrational*. Wenn die Form Q die Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0)$$

hat, soll $Q(u)$ eine *Quadratform* heißen.

Wenn $x > 0$ (in der Folge wird stets $x > 0$ vorausgesetzt), so sei $A(x) = A_Q(x)$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte (d. h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_r$) im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Das Volumen dieses Ellipsoides ist

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)};$$

es werde noch

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$$

---

[1]) Die erste gleichbetitelte Abhandlung ist in Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 62 erschienen; sie wird weiter als I zitiert.

[2]) Wörtlich wie in I.

[3]) Mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten.

gesetzt. Weiter sei

$$R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy,$$

$$T(x) = T_Q(x) = \left(\frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

§ 2.

Einleitung; der Hauptsatz.

Die Funktion $\mathsf{P}(x)$ — insbesondere ihre Größenordnung für wachsendes x — ist in neuerer Zeit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen[4]). Die dabei erreichten Resultate sind aber nur in einigen Fällen definitiv und die bisher noch nicht erledigten Fälle scheinen so schwierig zu sein, daß es vielleicht nicht unangemessen ist, wenn man sich ein verwandtes, aber einfacheres Problem aufstellt und versucht, über diese einfachere Frage eine bessere Übersicht zu gewinnen. Dies ist das Ziel dieser Note.

Ich betrachte nämlich nicht die Funktion $\mathsf{P}(x)$ selbst, sondern die beiden im § 1 eingeführten und leichter zugänglichen Funktionen $R(x)$, $T(x)$; dies sind gewisse Mittelbildungen aus $\mathsf{P}(x)$. Weiter werde ich mich ausschließlich auf Quadratformen beschränken. Das Ziel dieser Note ist folgender

Hauptsatz. *Es sei*

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0,\ r \geqq 2).$$

1. *Dann ist für* $r > 3$

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right), \qquad R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

2. *Wenn Q rational ist, so ist für* $r > 3$

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

3. *Dagegen ist für fast alle*[5]) *r-dimensionalen $Q(u)$, wenn* $r > 3$,

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r-1}{4}} \log^{\frac{3+3r}{2}} x\right).$$

---

[4]) Näheres darüber in I, § 2.

[5]) Die Behauptung 3 ist folgendermaßen zu verstehen: Wenn $r > 3$, so gibt es im r-dimensionalen Raume der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eine Menge $N = N_r$ vom Lebesgueschen Maße Null, die folgende Eigenschaft besitzt: wenn $Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2$ $(\alpha_j > 0)$ und wenn der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ nicht in N_r liegt, so ist

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r-1}{4}} \log^{\frac{3+3r}{2}} x\right).$$

4. *Für* $r=3$ *ist für alle Quadratformen*

$$R_Q(x)=\Omega(x^{\frac{1}{2}}),\qquad R_Q(x)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x).\,[6]$$

5. *Für* $r=2$ *ist für alle Quadratformen*

$$R_Q(x)=\Omega(x^{\frac{1}{4}}),\qquad R_Q(x)=O(x^{\frac{1}{4}}\log^2 x).\,[7]$$

6. *Alle diese Resultate bleiben richtig, wenn man in ihnen* $R_Q(x)$ *durch* $T_Q(x)$ *ersetzt.*

Man sieht, daß diese Resultate, wenn man von logarithmischen Faktoren absieht, einen definitiven Charakter tragen; sie geben auch eine ziemlich vollständige[8]) Übersicht über die Abhängigkeit der Größenordnung der Funktionen $R_Q(x)$ und $T_Q(x)$ einerseits von der Dimension r, andererseits vom arithmetischen Charakter der Koeffizienten α_j; z. B. sieht man, daß der Einfluß der α_j, der sich für $r=2, 3$ — wenn überhaupt — höchstens in einem *logarithmischen* Faktor äußert, für $r>3$ sogar den *Exponenten* wesentlich beeinflußt.

Nun habe ich in I schon einen beträchtlichen Teil der Behauptungen des neuen Hauptsatzes bewiesen; in dem damaligen Hauptsatz sind nämlich die Behauptungen 1, 2, 4, 5 und die entsprechenden Behauptungen für $T_Q(x)$ (ja sogar etwas mehr) enthalten. Es genügt daher, wenn wir die Behauptung 3 und die entsprechende Behauptung für $T_Q(x)$ beweisen. Da aber (Schwarzsche Ungleichung)

$$R(x)=\frac{1}{x}\int_0^x|\mathsf{P}(y)|\,dy\leqq\frac{1}{x}\left(\int_0^x dy\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}=T(x),$$

genügt es, die Behauptung 3 nur für $T(x)$ (statt $R(x)$) zu beweisen. Es genügt uns also vollständig, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Wenn* $r>3$, *so ist für fast alle* r-*dimensionalen Quadratformen* Q

$$\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy=O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r}x\right).$$

Der Beweis ist eine Kombination der Beweismethode des Satzes 1 aus I mit einer älteren Methode von mir[9]). Er ist freilich inhaltlich

---

[6]) Man beachte $\frac{1}{2}=\frac{r}{2}-1=\frac{r-1}{4}$.

[7]) Man beachte $\frac{1}{4}=\frac{r-1}{4}>\frac{r}{2}-1$.

[8]) „vollständig" allerdings nur cum grano salis; denn ein Teil der Behauptungen bezieht sich bloß auf „fast alle" Quadratformen.

[9]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Annalen **100** (1928), S. 699—721.

meistens komplizierter als der erwähnte Beweis in I; dagegen aber an einer Stelle ist er sogar einfacher. Dies kommt davon, daß ich in dem vorliegenden Beweis recht verschwenderisch mit den Logarithmuspotenzen umgehe[10]), wogegen ich in I Wert darauf legte, die heutige Behauptung 1 des Hauptsatzes *ohne* logarithmische Faktoren zu beweisen.

§ 3.

Beweis des Satzes 1.

Es sei $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 s}$; diese Reihe konvergiert absolut für $\Re(s) > 0$. Es sei $Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2$ $(\alpha_j > 0,\ r > 3)$, $x > 0$; dann ist[11])

$$(1)\quad \int_0^x \mathrm{P}_Q^2(y)\,dy = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right)$$
$$\times \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right) \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s s' (s+s')}\, ds\, ds'.$$

Dies ist die Formel (12) aus I, deren Beweis dort unabhängig vom übrigen Text lesbar ist.

Im Rest dieses Paragraphen sei nun stets $x > 1$. Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängen. Eine Zahl $\frac{h}{k}$ nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h \geqq 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h, k) = 1$. Ein für allemal bemerke ich: wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h \geqq 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h, k) = 1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}, \frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h > 0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den

---

[10]) Der sachkundige Leser wird selbst erkennen, an welchen Stellen eine Erniedrigung der Logarithmuspotenz ohne weiteres möglich wäre.

[11]) Alle vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

Punkt $\frac{h}{k}$ enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $J = \langle a, b)$ und $\delta > 0$, so bedeute δJ das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$. Es sei $A = \max\limits_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}$. Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]} < \frac{1}{\sqrt{x}}$; wenn also bei festem j $(1 \leqq j \leqq r)$ die Zahl $\frac{h}{k}$ alle Fareyzahlen mit $h > 0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\theta'}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\theta''}{k\sqrt{x}} \right), \tag{2}$$

wo $\frac{1}{2} \leqq \theta' \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \theta'' \leqq 1$.

Folgende Bemerkungen werden wir oft brauchen:

I. Für $0 \leqq t \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$, $x > c$, $s = \frac{1}{x} + ti$ ist

$$\left| \frac{\prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}}{s} \right| < c x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Denn es ist

$$\theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}} (1 + \psi_j(s)), \quad \text{wo} \quad \psi_j(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{\alpha_j s}};$$

für unsere s ist aber $\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1+x^2 t^2} > c$, also

$$|\psi_j(s)| < c e^{-\frac{\pi x}{\alpha_j (1+x^2 t^2)}},$$

also

$$\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} (1 + \chi(s)), \quad \text{wo} \quad |\chi(s)| < c e^{-\frac{cx}{1+x^2 t^2}}.$$

Die Funktion von t

$$\frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2 t^2}}}{|s|^{\frac{r}{2}+1}} = x^{\frac{r}{2}+1} \frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2 t^2}}}{(1+x^2 t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}$$

nimmt aber für $x > c$ im Intervall $0 \leqq t < +\infty$ ihr Maximum für $1 + x^2 t^2 = cx$ an, wie man leicht nachrechnet; dieses Maximum ist also kleiner als $c x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$.

II. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, wo t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, $x > c$. Dann ist

$$c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}, \tag{4}$$

$$|\theta(\alpha_j s)| < c\sqrt{\frac{x}{k}}, \tag{5}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < c\sqrt{\frac{x}{k}}. \tag{6}$$

Beweis. Nach (2) ist $\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}}$, also gilt (4). (5) folgt aus der Formel (vgl. die Formel (13) aus der unter [9]) angeführten Abhandlung)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}};$$

(6) ist wahr, da aus (4) und aus $0 < k \leqq \sqrt{x}$ folgt

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < \frac{1}{\sqrt{t}} < c\sqrt{\frac{k}{h}} < c\sqrt{k} < c\sqrt{\frac{x}{k}}.$$

Betrachten wir nun das Integral rechts in (1); der Faktor [12])

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right)}{s\cdot s'}$$

ändert seinen Betrag nicht, wenn man t durch $-t$ oder t' durch $-t'$ ersetzt; weiter ist

$$|e^{x(s+s')} - 1| \leqq e^2 + 1, \qquad \frac{1}{|s+s'|} < \frac{c}{\frac{1}{x} - \big||t| - |t'|\big|}.$$

Also ist

$$\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy < cJ,$$

wo

$$J = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right|\cdot\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s\cdot s'|\left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)}\,dt\,dt'.$$

Um also eine O-Abschätzung für $\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy$ zu beweisen, genügt es, dieselbe Abschätzung für J nachzuweisen; oder es genügt auch, dieselbe Ab-

[12]) Im folgenden sei stets $s = \frac{1}{x} + ti$, $s' = \frac{1}{x} + t'i$ (t, t' reell).

schätzung für die folgenden Integrale K, L, M zu beweisen:

$$K=\int\limits_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int\limits_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \ldots dt'; \quad L=\int\limits_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \int\limits_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \ldots dt' = \int\limits_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int\limits_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \ldots dt'; \quad M=\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \ldots dt'$$

(der Integrand ist derselbe wie in J).

Wir werden nun folgenden Hilfssatz brauchen:

Hilfssatz[13]. *Es sei* $0 < C < D$, $a > 0$, r *ganz*, $r > 1$. *Dann gibt es im Würfel* W:

$$C \leqq \gamma_j \leqq D \qquad (j=1, 2, \ldots, r)$$

des r*-dimensionalen Raumes der Punkte* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ *eine Punktmenge* $N(C, D, a)$ *vom Lebesgueschen Maß Null und von folgender Beschaffenheit:*

Zu jedem Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ *von* $W - N(C, D, a)$ *gibt es eine positive Zahl*

$$\varrho_0 = \varrho_0(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, a),$$

so daß für jedes System von nichtnegativen ganzen Zahlen

$$l; \quad m_1, m_2, \ldots, m_r; \quad n_2, n_3, \ldots, n_r; \quad \varrho$$

mit $\varrho > \varrho_0$ *die Ungleichungen*

$$\left|\frac{h_1}{k_1}\gamma_1 - \frac{h_j}{k_j}\gamma_j\right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^{\varrho}} \qquad (j=2, 3, \ldots, r),$$

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \quad 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1}, \quad 2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}, \ldots, 2^{m_r} \leqq k_r < 2^{m_r+1}$$

höchstens

$$\mathfrak{M} = \left((\varrho+1)(l+1)\prod_{j=1}^{r}(m_j+1)\prod_{j=2}^{r}(n_j+1)\right)^2 \frac{2^l 2^{m_1+m_2+\cdots+m_r}}{2^{n_2+n_3+\cdots+n_r} 2^{(r-1)\varrho}}$$

Lösungen in ganzen h_j, k_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ *besitzen.*

Es sei nun $i_1, i_2, \ldots, i_r$ irgendeine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, r$; mit $N_{i_1, i_2, \ldots, i_r}(C, D, a)$ bezeichnen wir diejenige Punktmenge, welche der Punkt $(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_r})$ durchläuft, wenn der Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ die Menge $N(C, D, a) = N_{1, 2, \ldots, r}(C, D, a)$ durchläuft. Die Vereinigungsmenge dieser $r!$ Mengen $N_{i_1, i_2, \ldots, i_r}(C, D, a)$ heiße $N^*(C, D, a)$. Offenbar ist $N^*(C, D, a)$ auch eine Nullmenge[14].

Um den Satz 1 zu beweisen, genügt es — da die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Nullmengen wieder eine Nullmenge ist — zu zeigen: Zu jedem $\bar{C}, \bar{D}$ mit $0 < \bar{C} < \bar{D}$ gibt es im r-dimensionalen Raume der

[13]) Dies ist der Hilfssatz 5 aus der unter [9]) zitierten Abhandlung, S. 711, dessen Beweis dort unabhängig vom übrigen Text lesbar ist. Das dortige σ heißt jetzt r.

[14]) Statt „Menge vom Lebesgueschen Maß Null" sagen wir im folgenden auch „Nullmenge".

Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eine Nullmenge $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$, so daß für jeden Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ des Würfels W:

$$\bar{C} \leqq \alpha_j \leqq \bar{D} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

der nicht in $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ liegt, die Abschätzungen gelten:

$$K = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right), \tag{7}$$

$$L = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right), \tag{8}$$

$$M = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right). \tag{9}$$

Wir setzen nun im Hilfssatz $C = \frac{1}{\bar{D}}$, $D = \frac{1}{\bar{C}}$, $a = \frac{3}{\bar{C}}$; mit $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ bezeichnen wir die Menge, die der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ durchläuft, wenn der Punkt $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r}\right)$ die Menge

$$N^*(C, D, a) = N^*\left(\frac{1}{\bar{D}}, \frac{1}{\bar{C}}, \frac{3}{\bar{C}}\right)$$

durchläuft. Offenbar ist $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ eine Nullmenge [15]). Im Rest dieser Abhandlung sei nun $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ ein beliebig aber fest gewählter Punkt aus $W - \bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$; und wir werden für ihn die Abschätzungen (7), (8), (9) beweisen. Damit wird Satz 1 bewiesen sein.

Abschätzung von K.

Es ist

$$K = \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r s^r}}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r s'^r}}\right|}{|s| \cdot |s'| \cdot \left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)} dt'.$$

Nach (3) ist für $x > c$

$$K < c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \frac{dt'}{\frac{1}{x} + |t - t'|} = 2 c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{t} \frac{dt'}{\frac{1}{x} + t - t'}$$

$$= 2 c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \log(1 + x t)\, dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right);$$

damit ist (7) bewiesen.

---

[15]) $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ hat offenbar folgende Symmetrieeigenschaft: Wenn der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ zu $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$ gehört und wenn $i_1, i_2, \ldots, i_r$ irgendeine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, r$ ist, so gehört auch der Punkt $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})$ zu $\bar{N}(\bar{C}, \bar{D})$.

Abschätzung von L und M.

Es ist $\left(\text{man beachte, daß für } 0 \leqq t' \leqq \frac{A}{\sqrt{x}},\ t \geqq \frac{2A}{\sqrt{x}} \text{ gilt } \frac{1}{|s|} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} + |t-t'|} < \frac{2}{t^2}\right)$ nach (3) für $x > c$

$$L = \int\limits_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s'|} dt' \int\limits_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s| \left(\frac{1}{x} + |t-t'|\right)} dt$$

$$< c x^{\frac{r}{4}} \int\limits_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \right| + \frac{1}{|s|^{\frac{r}{2}}}}{t^2} dt.$$

Zur Abschätzung von M benutzen wir die für $n > 0,\ a_j \geqq 0\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ gültige Formel $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ und bekommen — wenn wir noch die Symmetrie des Integranden ausnutzen —

$$M = \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right| \cdot \left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s| \cdot |s'| \left(\frac{1}{x} + |t-t'|\right)} dt\, dt'$$

$$< c \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s)\, \theta(\alpha_j s') \right| + \left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \frac{1}{s'^{\frac{r}{2}}} \right| + \left| \frac{1}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{t t' \left(\frac{1}{x} + |t-t'|\right)} dt\, dt'$$

$$< c \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{r} \theta^2(\alpha_j s) \right| + \left| \frac{1}{s^r} \right|}{t t' \left(\frac{1}{x} + |t-t'|\right)} dt\, dt'.$$

Nun ist für $t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}},\ x > c$

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt'}{t'\left(\frac{1}{x} + |t-t'|\right)} < \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}},\, t-\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{t'(t-t')} dt' + x \int\limits_{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}},\, t-\frac{1}{x}\right)}^{t+\frac{1}{x}} \frac{dt'}{t'} + \int\limits_{t+\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{dt'}{t'(t'-t)}$$

$$< \frac{c}{t} \log(x t).$$

Die zu beweisenden Abschätzungen (8), (9) werden also bewiesen sein, wenn wir beweisen, daß

$$(10)\qquad \int\limits_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left|\prod\limits_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{\left|s^{\frac{r}{2}}\right|}}{t^2}\,dt = O\left(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r} x\right),$$

$$(11)\qquad \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left|\prod\limits_{j=1}^{r}\theta^2(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{\left|s^{r}\right|}}{t^2}\log(xt)\,dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r} x\right).$$

Wenn nun ein $t > \frac{A}{\sqrt{x}}$ gegeben ist, so gibt es zu jedem j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ genau eine Fareyzahl $\frac{h_j}{k_j}$ $(h_j > 0)$, so daß t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ liegt; wenn dazu noch $t \neq \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}$, so gibt es genau eine ganze Zahl n_j, so daß

$$(12)\qquad \frac{2\pi}{\alpha_j 2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}}.$$

Da nach (2) gilt

$$\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k_j \sqrt{x}},$$

so ist $n_j \geqq 0$. Also: zu jedem $t > \frac{A}{\sqrt{x}}$, welches mit keinem der abzählbar vielen Punkte $\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}$ $(0 < k \leqq \sqrt{x},\ h > 0,\ (h, k) = 1,\ j = 1, 2, \ldots, r)$ übereinstimmt, gibt es ein System von $3r$ eindeutig bestimmten ganzen Zahlen

$$h_j,\ k_j,\ n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ h_j > 0;\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x};\ (h_j, k_j) = 1;\ n_j \geqq 0),$$

so daß t im Durchschnitt der r Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ liegt und den r Ungleichungen (12) genügt.

Umgekehrt, wenn ein System von $3r$ ganzen Zahlen

$$h_j,\ k_j,\ n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ h_j > 0;\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x};\ (h_j, k_j) = 1;\ n_j \geqq 0)$$

gegeben ist, so sei

$$S(h_1, h_2, \ldots, h_r;\ k_1, k_2, \ldots, k_r;\ n_1, n_2, \ldots, n_r) = S(h; k; n)$$

die Menge derjenigen t, die im Durchschnitt der r Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ liegen und den Ungleichungen (12) genügen[16]. Die Vereinigungsmenge aller

[16]) $S(h; k; n)$ kann freilich auch leer sein.

Mengen $S(h; k; n)$ überdeckt offenbar, mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, das Intervall $\frac{A}{\sqrt{x}} < t < +\infty$. Es genügt also vollständig, wenn wir statt (10), (11) die Gleichungen

$$(13) \quad L^* = \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_r \\ k_1,\ldots,k_r \\ n_1,\ldots,n_r}} \int\limits_{S(h;k;n)} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{\left|s^{\frac{r}{2}}\right|}}{t^2}\, dt = O\left(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right),$$

$$(14) \quad M^* = \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_r \\ k_1,\ldots,k_r \\ n_1,\ldots,n_r}} \int\limits_{S(h;k;n)} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r} \theta^2(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{|s^r|}}{t^2} \log(xt)\, dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right)$$

beweisen. Aus Symmetriegründen (man beachte die in der Fußnote [15]) hervorgehobene Symmetrieeigenschaft von $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$) dürfen und wollen wir uns bei der Summation in (13) und (14) auf diejenigen $S(h; k; n)$ beschränken, für welche

$$(15) \qquad 2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_2} k_2 \geqq \cdots \geqq 2^{n_r} k_r$$

gilt.

Es sei nun $l;\ m_1, m_2, \ldots, m_r;\ n_1, n_2, \ldots, n_r$ ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen; wir wollen sagen, daß eine Menge

$$S(h; k; n) = S(h_1, \ldots, h_r;\ k_1, \ldots, k_r;\ n_1, \ldots, n_r)$$

zur Klasse

$$[l; m; n] = [l;\ m_1, m_2, \ldots, m_r;\ n_1, n_2, \ldots, n_r]$$

gehört, wenn erstens (15) gilt und wenn zweitens

$$(16) \quad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1};\ 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1},\ 2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}, \ldots, 2^{m_r} \leqq k_r < 2^{m_r+1}.$$ [17])

Jede von unseren Mengen $S(h; k; n)$ gehört also genau einer Klasse $[l; m; n]$ an; wenn eine Menge $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sein soll, muß nach (12) und (15), da $\frac{1}{\alpha_j} \leqq \frac{1}{\overline{C}}$,

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 2^{n_1} k_1 \sqrt{x}} + \frac{2\pi}{\alpha_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}} < 2\pi \frac{3}{\overline{C}} \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}},$$

also muß

$$(17) \qquad \left|\frac{1}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{3}{\overline{C}} \frac{1}{2^{n_j} k_j 2^{\varrho}} \qquad (j = 2, 3, \ldots, r),$$

wenn die ganze Zahl ϱ durch $2^{\varrho} \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ definiert ist.

---

[17]) Wenn die Klasse $[l; m; n]$ gegeben ist, so sind also für die zugehörigen $S(h; k; n)$ die n_j bereits bestimmt, während die h_j, k_j noch einen gewissen Spielraum haben.

Der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ liegt in $\overline{W} - \overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$, also liegt der Punkt $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r}\right)$ im Würfel $\frac{1}{\overline{D}} \leqq \frac{1}{\alpha_j} \leqq \frac{1}{\overline{C}}$ und außerhalb der Menge $N^*\left(\frac{1}{\overline{D}}, \frac{1}{\overline{C}}, \frac{3}{\overline{C}}\right)$, also um so mehr außerhalb der Menge $N\left(\frac{1}{\overline{D}}, \frac{1}{\overline{C}}, \frac{3}{\overline{C}}\right)$. Also gibt es nach dem Hilfssatz eine positive Zahl

$$\varrho_0 = \varrho_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \overline{C}),$$

so daß für $\varrho > \varrho_0$, also um so mehr für $x \geqq 2^{2\varrho_0 + 2}$, das System der $2r$ Ungleichungen (16), (17) höchstens

$$\mathfrak{M} = \left((\varrho + 1)(l+1)\prod_{j=1}^{r}(m_j + 1)\prod_{j=2}^{r}(n_j + 1)\right)^2 \frac{2^l\, 2^{m_1 + m_2 + \ldots + m_r}}{2^{n_2 + n_3 + \ldots + n_r}\, 2^{(r-1)\varrho}}$$

Lösungen in ganzen h_j, k_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ besitzt. Mit anderen Worten: Für $x \geqq 2^{2\varrho_0+2}$ ist die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ höchstens gleich $\mathfrak{M}$.

Für $x > c$ ist $\varrho + 1 < \log x$, $\frac{1}{2^{(r-1)\varrho}} < \frac{c}{x^{\frac{r-1}{2}}}$. Es sei nun stets $x > c$, $x \geqq 2^{2\varrho_0+2}$; dann ist also

$$\mathfrak{M} < c\overline{\mathfrak{M}},$$

wo[18])

$$(18) \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}}(l+1)^2 \prod_{j=1}^{r}(m_j+1)^2(n_j+1)^2 \frac{2^l\, 2^{m_1+m_2+\ldots+m_r}}{2^{n_2+n_3+\ldots+n_r}}.$$

Für ein $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ ist erstens nach (4) — da $S(h; k; n)$ in $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}$ liegt —

$$(19) \qquad t > c\frac{h_1}{k_1} > c\, 2^{l - m_1};$$

zweitens ist nach (5), (6)

$$(20) \qquad |\theta(\alpha_j s)| < c x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}}, \qquad \left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < c x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}};$$

weiter ist das Maß von $S(h; k; n)$ nach (12) kleiner als

$$(21) \qquad \frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}};$$

endlich ist die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$, die zur Klasse $[l; m; n]$ gehören, kleiner als $c\overline{\mathfrak{M}}$. Also ist der Beitrag, den die Klasse $[l; m; n]$ zu L^* bzw. zu M^* liefert, wegen (13), (14), (18), (19), (20), (21) kleiner als (man beachte $\log(xt) < c\log(2^l x)$, $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$)

---

18) Wir fügen noch den überflüssigen Faktor $(n_1+1)^2$ hinzu.

$$\frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \frac{2^{2m_1}}{2^{2l}} \prod_{j=1}^{r} x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}} \cdot \mathfrak{M}$$
$$< c \frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}} \frac{(l+1)^2}{2^l} \prod_{j=1}^{r} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 x^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{m_j}{2}-n_j},$$

bzw. kleiner als

$$\frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \frac{2^{2m_1}}{2^{2l}} \log(2^l x) \prod_{j=1}^{r} x\, 2^{-m_j} \cdot \mathfrak{M}$$
$$< c \frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}} \frac{(\log x + l)(l+1)^2}{2^l} \prod_{j=1}^{r} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 x\, 2^{-n_j}.$$

Um also L^* bzw. M^* nach oben abzuschätzen, genügt es, die eben erhaltenen Ausdrücke über l, m_j, n_j zu summieren, wo die nichtnegativen ganzen Zahlen l, m_j, n_j durch die Bedingung $2^{m_j} \leqq \sqrt{x}$ beschränkt sind.

Eine Abschätzung von L^* ergibt sich also, wenn wir das Produkt der folgenden $r+1$ Ausdrücke abschätzen:

$$\frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)^2}{2^l} = O\left(x^{\frac{-r+1}{2}} \log^2 x\right),$$

$$x^{\frac{1}{2}} \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} \sum_{n_j=0}^{\infty} (m_j+1)^2\, 2^{\frac{m_j}{2}} (n_j+1)^2\, 2^{-n_j} = O\left(x^{\frac{3}{4}} \log^2 x\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Daraus folgt also

$$L^* = O\left(x^{\frac{-r+1}{2}} \cdot \log^2 x \cdot x^{\frac{3}{4}r} \log^{2r} x\right) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \log^{2+2r} x\right),$$

womit (13) bewiesen ist.

Ebenso ergibt sich eine Abschätzung von M^*, wenn wir das Produkt der folgenden $r+1$ Ausdrücke abschätzen:

$$\frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\log x + l)(l+1)^2}{2^l} = O\left(x^{\frac{-r+1}{2}} \log^3 x\right),$$

$$x \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} \sum_{n_j=0}^{\infty} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2\, 2^{-n_j} = O(x \log^3 x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Daraus folgt also

$$M^* = O\left(x^{\frac{-r+1}{2}} \log^3 x \cdot x^r \cdot \log^{3r} x\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right),$$

womit auch (14) bewiesen ist.

Prag, den 23. Februar 1930.

(Eingegangen am 28. Februar 1930.)