Vojtěch Jarník
Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre

Math. Zeitschr. 33 (1931), pp. 62--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500466

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Definitionen und Bezeichnungen.

Es sei stets r ganz, $r \geqq 2$;

$$Q = Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

sei stets eine positiv definite quadratische Form[1]) mit der Determinante D; die Form Q heiße *rational*, wenn es eine Zahl α gibt, so daß $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\alpha$, wo die $b_{\mu\nu}$ ganz sind; sonst heiße Q *irrational*. Wenn die Form Q die Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\text{also } \alpha_j > 0)$$

hat, soll $Q(u)$ eine *Quadratform* heißen. Wenn $x > 0$ (in der Folge wird stets $x > 0$ vorausgesetzt), so sei $A(x) = A_Q(x)$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte (d. h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_r$) im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Das Volumen dieses Ellipsoids ist

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)};$$

es werde noch

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$$

gesetzt. Endlich sei

$$R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy,$$

$$T(x) = T_Q(x) = \left(\frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

[1]) Mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$.

§ 2.

Einleitung; der Hauptsatz.

Man hat sich in den letzten Jahrzehnten ausführlich mit der Funktion $\mathsf{P}(x)$ — hauptsächlich mit ihrer Größenordnung für wachsendes x — beschäftigt. Insbesondere ist[2])

(1) $$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) \quad \text{für} \quad r = 2$$ (Landau **1**, **2**),

(2) $$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \quad \text{für} \quad r = 2$$ (Landau **4**),

(3) $$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{3}{4}}\right) \quad \text{für} \quad r = 3$$ (Landau **1**, **2**),

(4) $$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{für} \quad r = 3$$ (Landau **4**).

Man ist heute — besonders infolge der grundlegenden Arbeiten des Herrn Landau — imstande, die Formeln (1) bis (4) verhältnismäßig einfach zu beweisen.

Zwischen (1) und (2) besteht aber noch eine große Lücke; ebenso zwischen (3) und (4). Man hat sich daher bemüht, die Schranken für $\mathsf{P}(x)$ noch weiter einzuengen. Dabei stößt man aber, besonders bei den O-Formeln, auf ungeheuere Schwierigkeiten. Durch äußerst schwierige und scharfsinnige Überlegungen ist es Herrn van der Corput (v. d. Corput **1**) gelungen, zu beweisen, daß man in (1) den Exponenten $\frac{1}{3}$ noch ein wenig herabdrücken kann; insbesondere für den *Kreis* (d. h. $Q(u) = u_1^2 + u_2^2$) lautet das gegenwärtig schärfste Resultat

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{27}{82}}\right)$$ (Nieland **1**),

wie Herr Nieland mittels der neuesten van der Corputschen Methode bewiesen hat. Für den Kreis wurde auch (2) vom Herrn Hardy zu

$$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x\right)$$ (Hardy **1**)

verschärft. Auch für die *Kugel* (d. h. $Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$) ist es gelungen, die Formeln (3), (4) entsprechend zu verschärfen:

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{43}{58}+\varepsilon}\right) \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0$$ (Walfisz **3**),

$$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x\right)$$ (Szegö **1**).

---

[2]) Die Zitate beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Abhandlung; ich strebe dabei keine Vollständigkeit an und gebe meistens zu jedem Resultat nur ein — und zwar nicht immer das historisch erste — Zitat an.

Die Methoden, die zu (1) bis (4) führen, sind für jedes $r \geqq 2$ anwendbar und liefern

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}}\right) \tag{5}$$ (Landau **1**, **2**),

$$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right) \tag{6}$$ (Landau **4**).

Man sieht, was für eine ungeheure Kluft sich zwischen diesen beiden Abschätzungen für große r öffnet!

Nun ist es eine fast triviale Tatsache, daß für jede *rationale* Form Q die Formel

$$\mathsf{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2} - 1}\right) \tag{7}$$ (Jarník bei Landau **6**)

gilt; und für große r ist diese Formel viel schärfer als (6). Es wäre daher natürlich zu glauben, daß die Landausche Formel (6) für große r nur eine recht ungenaue Abschätzung liefert.

Wie man sieht, sind die Formeln (1) bis (6) und auch die für $r = 2, 3$ besprochenen Verschärfungen weit davon entfernt, eine definitive Lösung des Problems zu geben. Es wirkte daher höchst überraschend, als es 1924 Herrn Walfisz gelang (Walfisz **1**), das O-Problem für rationale Q mit $r \geqq 8$ vollständig zu lösen. Durch eine geeignete Modifikation seiner Methode konnte dann Herr Landau auch die Fälle $4 \leqq r \leqq 7$ bewältigen (Landau **5**). Ihre Resultate lauten: wenn die Form $Q(u)$ rational ist, so ist

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{2} - 1}\right) \quad \text{für} \quad r > 4, \tag{8}$$

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log^2 x) \quad \text{für} \quad r = 4. \tag{9}$$

Ein Vergleich von (8) und (9) mit (7) zeigt, daß für rationale Q die Größenordnung von $\mathsf{P}(x)$ für $r > 4$ ganz genau, für $r = 4$ bis auf einen logarithmischen Faktor genau bestimmt ist. Dabei darf man den Faktor $\log^2 x$ in (9) nicht völlig weglassen, da für die vierdimensionale Kugel $\left(Q(u) = \sum_{j=1}^{4} u_j^2\right)$

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x \log \log x)$$ (Walfisz **2**)

gilt; man kann freilich noch eine Verkleinerung des Faktors $\log^2 x$ in (9) anstreben, was auch verschiedene Autoren mit Erfolg versuchten.

Der Erfolg, den die Gitterpunktlehre dadurch bei *rationalen* Q mit $r \geqq 4$ verzeichnet hat, hat natürlich die Untersuchung des Einflusses von *irrationalen* Koeffizienten in der Form Q angeregt; in dieser Richtung hat Herr Walfisz (Walfisz **4**) den ersten erfolgreichen Schritt getan. Ich habe dann ausführlich die irrationalen Quadratformen untersucht und habe unter anderem bewiesen (Jarník **2**): Wenn $r \geqq 4$, so ist für fast alle Quadratformen[3]) und für jedes $\varepsilon > 0$

$$(10)\qquad \mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right).$$

Man sieht, wie scharf die anscheinend so ungenaue Landausche Formel (6) ist; vielleicht ist sie sogar völlig scharf (bis auf logarithmische Faktoren?), da die Abschätzung (10) wahrscheinlich noch nicht definitiv ist.

Zu jeder Form Q gibt es eine Zahl $f = f(Q)$, so daß

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{f+\varepsilon}), \qquad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Für rationale Formen ist nach (2), (4), (7), (8), (9)

$$(11)\qquad f = \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r > 3,$$

$$f \geqq \frac{1}{2} = \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r = 3, \qquad f \geqq \frac{1}{4} > \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r = 2.$$

Die Formel (11) ist also für $r > 3$ richtig, für $r = 2$ sicher falsch. Es entsteht also die Frage: Gilt (11) auch noch für $r = 3$ (für rationale Q)?

Zweitens ist nach (10) $f \leqq \frac{r}{4}$ für fast alle Quadratformen, wenn $r \geqq 4$; weil $\frac{r}{4} < \frac{r}{2} - 1$ für $r > 4$, so hängt f für $r > 4$ wesentlich vom arithmetischen Charakter der Koeffizienten der Form Q ab. Also entsteht eine weitere Frage: Hängt f auch für $r = 2, 3, 4$ von den Koeffizienten von Q ab?

Die Beantwortung dieser beiden Fragen scheint ein Problem zu sein, das hoch über den Möglichkeiten der heutigen Mathematik steht. Wir werden uns daher ein einfacheres Problem stellen: Wir bilden die Funktionen $R(x)$, $T(x)$ nach § 1; das sind gewisse Mittelbildungen aus der Funktion $\mathsf{P}(x)$, die leichter zu behandeln sind als $\mathsf{P}(x)$ selbst; und wir werden folgenden Hauptsatz beweisen:

Hauptsatz. 1. *Es ist*

$$R(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right),\text{[4]}$$

ja sogar

$$\liminf_{x=\infty} x^{\frac{-r+1}{4}} R(x) > 0.$$

---

[3]) „für fast alle Quadratformen" bedeutet: für alle Quadratformen $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2$ $(\alpha_j > 0)$ bis auf einige Quadratformen, deren Koeffizientensysteme $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ im r-dimensionalen Raume der Punkte $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null bilden.

[4]) Das heißt (weil $R(x) \geqq 0$)

$$\limsup_{x=\infty} x^{\frac{-r+1}{4}} R(x) > 0.$$

2. *Für jede rationale Form $Q(u)$ ist*

$$R(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

ja sogar

$$\liminf_{x=\infty} x^{-\frac{r}{2}+1} R(x) > 0.$$

3. *Für jede (rationale oder irrationale) Quadratform ist*

$$R(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}}\log^2 x\right) \quad \textit{für} \quad r = 2,$$
$$R(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right) \quad \textit{für} \quad r = 3,$$
$$R(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \quad \textit{für} \quad r > 3.$$

4. *Die Behauptungen* 1., 2., 3. *bleiben richtig, wenn man in ihnen $R(x)$ durch $T(x)$ ersetzt.*

Es sei nun Q eine Quadratform, $f_1 = f_1(Q)$ sei so gewählt, daß

$$R(x) = O(x^{f_1+\varepsilon}), \qquad R(x) = \Omega(x^{f_1-\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Dann ist nach dem Hauptsatz $f_1 = \frac{1}{4}$ für $r = 2$, $f_1 = \frac{1}{2}$ für $r = 3$, mag Q rational oder irrational sein. Dagegen gilt für $r > 4$: $f_1 = \frac{r}{2} - 1$ für rationale Q und nach (10) $f_1 \leqq \frac{r}{4} < \frac{r}{2} - 1$ für fast alle Q (da offenbar $f_1 \leqq f$). Also hängt für $r > 4$ die Zahl f_1 sicher von den Koeffizienten von Q ab.

Wenn Q rational, so ist nach dem Hauptsatz $f_1 = \frac{r}{2} - 1$ für $r > 2$, $f_1 = \frac{1}{4} > \frac{r}{2} - 1$ für $r = 2$. Das sind also die Beiträge, die der Hauptsatz zur Beantwortung der beiden aufgestellten Fragen liefert; ich bemerke aber noch einmal ausdrücklich, daß der Hauptsatz nicht $\mathsf{P}(x)$ selbst, sondern die beiden leichter zu behandelnden Funktionen $R(x)$, $T(x)$ betrifft.

Auch der Fall $r = 4$ verdient Beachtung; für jede Quadratform ist, wenn $r = 4$,

$$R(x) = O(x), \qquad T(x) = O(x);$$

der logarithmische Faktor aus (9) ist also verschwunden.

Im Spezialfall des Kreises $(Q(u) = u_1^2 + u_2^2)$ ist bereits viel mehr bekannt, als

$$T(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}}\log^2 x\right), \text{ d. h. als } \int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy = O\left(x^{\frac{3}{2}}\log^4 x\right),$$

nämlich

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy = \gamma x^{\frac{3}{2}} + O(x\log^3 x)$$ (Walfisz **2**, etwas schwächer bereits bei Landau **3**),

wo $\gamma > 0$ eine absolute Konstante ist.

Aus der Schwarzschen Ungleichung

$$R(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\mathsf{P}(y)|\, dy \leqq \frac{1}{x}\cdot\left(\int_0^x dy \int_0^x \mathsf{P}^2(y)\, dy\right)^{\frac{1}{2}} = T(x)$$

folgt, daß es genügt, die O-Abschätzungen des Hauptsatzes für $T(x)$ (d. h. die entsprechenden Abschätzungen für $\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy$), die Ω-Abschätzungen für $R(x)$ (d. h. die entsprechenden Abschätzungen für $\int_0^x |\mathsf{P}(y)|\, dy$) zu beweisen. Übrigens ist für jede Quadratform, wenn $r > 4$,

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \qquad \text{(Jarník } \mathbf{3}\text{)},$$

also auch

$$T(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

so daß es genügt, die folgenden Sätze zu beweisen.

Satz 1. *Es sei Q eine Quadratform; dann ist*

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy = O\left(x^{\frac{3}{2}}\log^4 x\right) \quad \textit{für } r = 2,$$

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy = O\left(x^2\log^2 x\right) \quad \textit{für } r = 3,$$

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy = O\left(x^3\right) \quad \textit{für } r = 4.$$

Satz 2.

$$\liminf_{x=\infty} x^{\frac{-r-3}{4}} \int_0^x \max\left(0, \mathsf{P}(y)\right) dy > 0,$$

$$\liminf_{x=\infty} x^{\frac{-r-3}{4}} \int_0^x \max\left(0, -\mathsf{P}(y)\right) dy > 0.$$

Dies ist sogar etwas mehr als wir brauchen, da z.B. $\max(0, \mathsf{P}(y)) \leqq |\mathsf{P}(y)|$.

Satz 3. *Wenn Q rational, so ist*

$$\liminf_{x=\infty} x^{-\frac{r}{2}} \int_0^x |\mathsf{P}(y)|\, dy > 0.$$

Satz 1, in welchem die Hauptschwierigkeit liegt, wird mit einer Methode bewiesen, die an Jarník **2**, **3** erinnert. Der Beweis vom Satz 2 bietet methodisch kaum etwas Neues; er ist nur eine Modifikation des Landauschen Beweises von (6), und auch diese Modifikation habe ich schon einmal (Jarník **1**; damals nur für $r = 2$, dafür aber nicht nur für Ellipsen, sondern für viel allgemeinere Gebiete) ausgeführt. Satz 3 ist trivial.

§ 3.

Beweis des Satzes 1.

Es sei $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 s}$; diese Reihe konvergiert absolut für $\Re(s) > 0$. In diesem ganzen Paragraphen sei eine Quadratform

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0,\ r \geqq 2)$$

fest gegeben. Es seien $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ diejenigen Zahlen, die sich in der Gestalt

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_j^2 \qquad (m_j \text{ ganz})$$

darstellen lassen; a_n sei die Anzahl derartiger Darstellungen der Zahl λ_n. Dann ist offenbar

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n, \qquad \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\Re(s) > 0$. Nach einem Satz vom Herrn Perron über Dirichletsche Reihen ist also für jedes $x > 0$, welches keinem λ_n gleich ist, und für jedes $a > 0$

$$A(x) = A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \frac{e^{xs}}{s} ds.$$

Dazu schreiben wir noch die bekannte Formel auf[5])

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{2\pi i \sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+1}} ds.$$

Daher ist $\left(a = \frac{1}{x} \text{ gewählt}\right)$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x \mathrm{P}^2(y)\, dy \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^x dy \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right) \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right) \\ &\qquad \times \frac{e^{y(s+s')}}{s s'} ds\, ds' \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right) \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right) \\ &\qquad \times \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s s'(s+s')} ds\, ds', \end{aligned}\right.$$

[5]) Alle vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

wenn man im mittleren Glied von (12) die Integrationsfolge vertauschen darf. Statt diese Vertauschbarkeit nachzuweisen, beweisen wir (12) durch direktes Ausrechnen. Es ist

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \mathrm{P}^2(y)\,dy = \int_0^x \Bigg(\sum_{\lambda_n \leqq y} a_n - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} y^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\Bigg)^2 dy \\ \displaystyle = \sum_{\lambda_n \leqq x} \sum_{\lambda_m \leqq x} a_n a_m (x - \max(\lambda_n, \lambda_m)) \\ \displaystyle - 2 \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \frac{\pi^{\frac{r}{2}}\left(x^{\frac{r}{2}+1} - \lambda_n^{\frac{r}{2}+1}\right)}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} + \frac{\pi^r}{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \cdot \frac{x^{r+1}}{(r+1)\left(\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\right)^2}. \end{cases}$$

Im letzten Glied in (12) ist $\left(s = \frac{1}{x} + t i,\ t \text{ reell}\right)$

$$\theta(\alpha_j s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \alpha_j s}; \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| e^{-n^2 \alpha_j s} \right| = \theta\left(\alpha_j \frac{1}{x}\right);$$

weiter sind die Funktionen $\frac{1}{s^{\frac{r}{2}}}$, e^{xs} bei festem $x > 0$ für $\Re(s) = \frac{1}{x}$ beschränkt; wenn wir also noch zeigen, daß das Integral

$$\beta = \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left| \frac{ds\,ds'}{s s' (s+s')} \right|$$

konvergiert, dürfen wir die Integration der unendlichen Reihen im letzten Glied von (12) gliedweise ausführen, und zwar in beliebiger Reihenfolge. Und in der Tat ist ($c(x)$ bedeute eine nur von x abhängige positive Zahl)

$$\beta < c(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt\,dt'}{(1+|t|)(1+|t'|)(1+|t+t'|)} < 4c(x) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt\,dt'}{(1+t)(1+t')(1+|t-t'|)}$$

$$= 8c(x) \int_0^\infty dt \int_0^t \frac{dt'}{(1+t)(1+t')(1+t-t')} = 16c(x) \int_0^\infty \frac{\log(1+t)}{(1+t)(2+t)}\,dt,$$

also ist das Integral β konvergent. Wir schreiben nun im letzten Glied von (12)

$$\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-\lambda_n s} \ \text{bzw.}\ \sum_{m=0}^\infty a_m e^{-\lambda_m s'} \ \text{für}\ \prod_{j=1}^r \theta(\alpha_j s) \ \text{bzw.}\ \prod_{j=1}^r \theta(\alpha_j s')$$

und integrieren gliedweise; wenn wir den Residuensatz und die bekannte Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^{b+1}}\,ds = \frac{x^b}{\Gamma(b+1)} \quad (b > 0,\ a > 0,\ x \geqq 0)$$

benutzen, bekommen wir für die einzelnen Glieder (die Integrationsgrenzen $\frac{1}{x} - i\infty$, $\frac{1}{x} + i\infty$ schreibe ich nicht auf):

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint \frac{e^{-\lambda_n s}\, e^{-\lambda_m s'}\,(e^{x(s+s')}-1)}{s s'(s+s')}\, ds\, ds' = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < \max(\lambda_n, \lambda_m) \\ x - \max(\lambda_n, \lambda_m) & \text{für} \quad x \geqq \max(\lambda_n, \lambda_m); \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}}\iint \frac{e^{-\lambda_n s}\,(e^{x(s+s')}-1)}{s\, s'^{\frac{r}{2}+1}\,(s+s')}\, ds\, ds'$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad x < \lambda_n \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\,\dfrac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}}\displaystyle\int \frac{e^{xs'} - e^{\lambda_n s'}}{s'^{\frac{r}{2}+2}}\, ds' = -\frac{\pi^{\frac{r}{2}}\left(x^{\frac{r}{2}+1} - \lambda_n^{\frac{r}{2}+1}\right)}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} \quad \text{für} \quad x \geqq \lambda_n; \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{\pi^r}{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\iint \frac{e^{x(s+s')}-1}{s^{\frac{r}{2}+1}\, s'^{\frac{r}{2}+1}}\cdot\frac{ds\, ds'}{s+s'}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{\pi^r}{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\int_0^x dy \iint \frac{e^{y(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}+1}\, s'^{\frac{r}{2}+1}}\, ds\, ds'$$

$$= \frac{\pi^r}{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\int_0^x \frac{y^r}{\left(\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\right)^2}\, dy = \frac{\pi^r\, x^{r+1}}{\alpha_1 \ldots \alpha_r (r+1)\, \Gamma^2\left(\frac{r}{2}+1\right)}.$$

Durch Summation bekommt man aber sofort die rechte Seite von (13); damit ist (12) bewiesen.

Im Rest dieses Paragraphen sei stets $x > 1$. Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ abhängen. Eine Zahl $\frac{h}{k}$ nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h \geqq 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$. Ein für allemal bemerke ich: Wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h \geqq 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h > 0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $I = \langle a, b \rangle$ ein Intervall ist und $\delta > 0$, so bedeute δI das Intervall $\langle \delta a, \delta b \rangle$. Es sei

$$A = \max_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}.$$

Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wenn also bei festem j $(1 \leqq j \leqq r)$ die Zahl $\frac{h}{k}$ alle Fareypunkte mit $h > 0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\theta'}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\theta''}{k\sqrt{x}} \right\rangle, \tag{14}$$

wo $\frac{1}{2} \leqq \theta' \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \theta'' \leqq 1$.

Folgende Bemerkungen werden wir oft brauchen:

I. Für $0 \leqq t \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$, $s = \frac{1}{x} + ti$, $x > c$ ist

$$\left| \frac{\theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}}{s} \right| < c x^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Denn es ist

$$\theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}\,(1 + \psi_j(s)), \text{ wo } \psi_j(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{\alpha_j s}};$$

für unsere s ist aber

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1 + x^2 t^2} > c, \text{ also } |\psi_j(s)| < c e^{-\frac{\pi x}{\alpha_j (1 + t^2 x^2)}},$$

also

$$\theta(\alpha_1 s) \ldots \theta(\alpha_r s) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\,(1 + \chi(s)), \text{ wo } |\chi(s)| < c e^{-\frac{c x}{1 + x^2 t^2}}.$$

Die Funktion von t

$$\frac{e^{-\frac{c x}{1 + t^2 x^2}}}{|s|^{\frac{r}{2}+1}} = x^{\frac{r}{2}+1} \frac{e^{-\frac{c x}{1 + t^2 x^2}}}{(1 + t^2 x^2)^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}}$$

nimmt aber für $x > c$ im Intervall $0 \leqq t < \infty$ ihr Maximum für $1 + t^2 x^2 = c x$ an, wie man leicht nachrechnet; dieses Maximum ist also kleiner als $c x^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}$.

II. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, wo t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, $x > c$; dann ist ($a = 1$ für $r = 2$, $a = 0$ sonst):

$$c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{\theta^r(\alpha_j s)}{s}\right| dt < c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{hk^{\frac{r}{2}-1}}\log^a x, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{1}{s^{\frac{r}{2}+1}}\right| dt < c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{hk^{\frac{r}{2}-1}}\log^a x. \tag{18}$$

Beweis: Nach (14) ist

$$\left|t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}},$$

also gilt (16). Zweitens ist[6])

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}};$$

also (wegen (16))

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{\theta^r(\alpha_j s)}{s}\right| dt < \frac{c}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\int\limits_{-\frac{c}{k\sqrt{x}}}^{\frac{c}{k\sqrt{x}}}\frac{du}{\left(\frac{1}{x^2}+u^2\right)^{\frac{r}{4}}}$$

$$= c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\int\limits_{-\frac{c\sqrt{x}}{k}}^{\frac{c\sqrt{x}}{k}}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{r}{4}}} < c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\log^a x \qquad \left(u = t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k},\ v = xu\right).$$

Drittens ist nach (14), (16) und wegen $|s| > t$

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{1}{s^{\frac{r}{2}+1}}\right| dt < c\frac{k^{\frac{r}{2}+1}}{h^{\frac{r}{2}+1}}\cdot\frac{c}{k\sqrt{x}};$$

wegen $h \geqq 1$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$ folgt daraus (18).

Nach (12) ist, wenn wir $s = \frac{1}{x} + ti$, $s' = \frac{1}{x} + t'i$ setzen und bedenken, daß sich der Betrag des letzten Integranden nicht ändert, wenn wir das Wertepaar t, t' durch $-t$, $-t'$ ersetzen,

[6]) Jarník 2, S. 708, Formel (13).

$$\int_0^x \mathrm{P}^2(y)\,dy \leqq \frac{2(e^2+1)}{4\pi^2}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s|}$$

$$\times \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s'|}\cdot\frac{dt'}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+(t+t')^2}}$$

$$= \frac{2(e^2+1)}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s|}\cdot\frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s'|}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+(t+t')^2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+(t-t')^2}}\right)dt\,dt'.$$

Also genügt es offenbar, wenn wir dieselbe O-Abschätzung, die wir für

$$\int_0^x \mathrm{P}^2(y)\,dy$$

beweisen wollen, für das Integral

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right|\cdot\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\ldots\alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s s'|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt'$$

beweisen. Daher genügt es auch, wenn wir dieselbe Abschätzung für die folgenden Integrale K, L, M beweisen (der nicht aufgeschriebene Integrand ist derselbe wie bei J):

$$K=\int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt\int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}}\ldots dt', \qquad L=\int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt\int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\ldots dt'=\int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt\int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}}\ldots dt',$$

$$M=\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\ldots dt'.\ {}^{7})$$

Im Rest dieses Paragraphen sei $2 \leqq r \leqq 4$.

---

[7]) Die etwas künstliche Wahl der Integrationsgrenzen $\left(\text{an einigen Stellen } \frac{A}{\sqrt{x}},\right.$ $\left.\text{an anderen } \frac{2A}{\sqrt{x}}\right)$ wurde absichtlich getroffen, damit die Schwierigkeiten, die sich in der Nähe der Geraden $t=t'$ zeigen, auf möglichst wenigen Stellen auftreten.

Abschätzung von K.

Nach (15) ist für $x > c$

$$K < c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \frac{dt\,dt'}{\frac{1}{x} + |t - t'|} = 2 c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{t} \frac{dt'}{\frac{1}{x} + t - t'}$$

$$= 2 c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \log(1 + xt)\,dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right);$$

dies ist sogar mehr als die gewünschte Abschätzung.

Abschätzung von L.

Wenn $n \geqq 1$, $a_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \tag{19}$$

Also ist

$$\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}} \frac{1}{s'^{\frac{r}{2}}} \right| \leqq \sum_{j=1}^{r} |\theta^r(\alpha_j s')| + \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}} \frac{1}{\left| s'^{\frac{r}{2}} \right|};$$

wenn wir noch bedenken: erstens, daß für $0 \leqq t \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}$, $t' \geqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$ gilt $\frac{1}{\frac{1}{x} + |t - t'|} < \frac{2}{t'}$; zweitens, daß die Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ das Intervall $\left(\frac{2A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ überdecken; drittens, daß $t' > c\frac{h}{k}$, wenn t' in $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ liegt (alles für $x > c$), sehen wir, daß es genügt, wenn wir für die folgenden Integrale L_j $(0 \leqq j \leqq r$, j ganz) die gewünschte Abschätzung beweisen:

$$L_0 = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s|} dt \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt'}{\left| s'^{\frac{r}{2}+1} \right| t'};$$

$$L_j = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s|} dt \cdot \sum_{h,k} \frac{k}{h} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}} \frac{|\theta^r(\alpha_j s')|}{|s'|} dt' \text{ für } 1 \leqq j \leqq r.$$

Nun ist nach (15)

$$L_0 < c\,x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \int\limits_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt'}{t'^{\frac{r}{2}+2}} = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\right)$$

und nach (15), (17) ist für $1 \leqq j \leqq r$

$$L_j < c\,x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \sum_{\substack{h>0 \\ 0<k\leqq\sqrt{x}}} \frac{k}{h}\cdot\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{h\,k^{\frac{r}{2}-1}} \log x = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log x\right);$$

das ist wieder mehr als die gewünschte Abschätzung.

Abschätzung von M.

Wir sollen folgende Integrale abschätzen:

$$\text{(20)} \qquad \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left|\prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s)\,\theta(\alpha_j s')\right|}{|s s'|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt',$$

$$\text{(21)} \qquad \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left|\prod\limits_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s)\right|}{\left|s s'^{\frac{r}{2}+1}\right|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt'$$

(das Integral, welches aus (21) durch Vertauschen von s und s' entsteht, brauchen wir aus Symmetriegründen nicht mehr zu beachten),

$$\text{(22)} \qquad \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt\,dt'}{\left|s^{\frac{r}{2}+1} s'^{\frac{r}{2}+1}\right|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}.$$

In (22) ersetzen wir $|s|$ durch t, $|s'|$ durch t' und sehen, daß (22) für $x > c$ kleiner ist als $\left(\text{es ist } t-\frac{1}{x} > \frac{t}{2} \text{ für } t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}},\ x > c\right)$

$$c\,x\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}}\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{t}\frac{dt'}{t'^{\frac{r}{2}+1}(1+x(t-t'))}$$

$$< c\,x\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}}\left(\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}},\frac{t}{2}\right)}\frac{dt'}{t'^{\frac{r}{2}+1}\,x\,t}+\int\limits_{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}},\frac{t}{2}\right)}^{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}},t-\frac{1}{x}\right)}\frac{dt'}{t^{\frac{r}{2}+1}\,x(t-t')}+\int\limits_{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}},t-\frac{1}{x}\right)}^{t}\frac{dt'}{t^{\frac{r}{2}+1}}\right)$$

$$< c\,x\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}}\left(x^{\frac{r}{4}-1}\cdot\frac{1}{t}+\frac{\log t\,x}{x\,t^{\frac{r}{2}+1}}+\frac{1}{x\,t^{\frac{r}{2}+1}}\right)=O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log x\right),$$

und das ist wieder mehr als die gewünschte Abschätzung.

Wenn wir auf (20), (21) die Formel (19) anwenden, sehen wir, daß es genügt, für die $2r$ Integrale

$$M_{j,1}=\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\frac{|\theta^r(\alpha_j s)\theta^r(\alpha_j s')|}{|s s'|}\,\frac{dt\,dt'}{\frac{1}{x}+|t-t'|},$$

$$M_{j,2}=\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\frac{|\theta^r(\alpha_j s)|}{s s'^{\frac{r}{2}+1}}\,\frac{dt\,dt}{\frac{1}{x}+|t-t'|}$$

$(j=1,2,\ldots,r)$ die gewünschte Abschätzung zu beweisen. Wir verkleinern diese Integrale nicht, wenn wir statt

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}dt\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\ldots dt' \quad \text{schreiben} \quad \sum_{\substack{h,k\\h',k'}}\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}}dt\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}}\ldots dt'.$$

In jedem Glied dieser vierfachen Reihe ersetzen wir im Integranden den Faktor $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+|t-t'|}$ durch die sicher nicht kleinere Zahl

(23) $$\lambda(h,k,h',k')=\min\left(x,\frac{1}{\min|t-t'|}\right),$$

wobei $\min|t-t'|$ die untere Grenze von $|t-t'|$ bedeutet, wenn t das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, t' das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}$ durchläuft; $\min\left(x,\frac{1}{0}\right)$ bedeute x. Wenn wir dann in jedem Glied

$$\lambda(h,k,h',k') \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} dt \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}} \frac{|\theta^r(\alpha_j s)\,\theta^r(\alpha_j s')|}{|s s'|}\,dt'$$

bzw.

$$\lambda(h,k,h',k') \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} dt \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}} \frac{\theta^r(\alpha_j s)|}{\left|s s'^{\frac{r}{2}+1}\right|}\,dt'$$

das Integral nach (17), (18) abschätzen, bekommen wir ($a=1$ für $r=2$, $a=0$ sonst)

(24) $$M_{j,i} < c\,x^{r-2}\log^{2a}x\cdot S \qquad (j=1,2,\ldots,r;\ i=1,2;\ x>c),$$

wo

$$S = \sum \frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\cdot\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-1}h'}\,\lambda(h,k,h',k');$$

dabei wird über alle ganzen h, k, h', k' summiert, welche die Ungleichungen $0<k\leqq\sqrt{x}$, $h>0$, $(h,k)=1$, $0<k'\leqq\sqrt{x}$, $h'>0$, $(h',k')=1$, $k'\geqq k$ erfüllen (die letzte Einschränkung ist aus Symmetriegründen erlaubt). Es ist

$$S = S_1 + S_2,$$

wo in S_1 alle Glieder mit $\frac{h}{k}=\frac{h'}{k'}$, in S_2 alle übrigen Glieder von S zusammengefaßt sind.

Abschätzung von S_1.

Aus $\frac{h}{k}=\frac{h'}{k'}$ folgt $h=h'$, $k=k'$, also ist wegen $\lambda(h,k,h',k')\leqq x$

$$S_1 < c\,x\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{k^{r-2}h^2};$$

also

$S_1 = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ für $r=2$, $S_1=O(x\log x)$ für $r=3$, $S_1=O(x)$ für $r=4$.

Abschätzung von S_2.

Es ist

$$S_2 = S_{2,1} + S_{2,2} + S_{2,3}.$$

Dabei sind in $S_{2,1}$ diejenigen Glieder von S_2 enthalten, für welche

(25) $$\min|t-t'| < \frac{\pi}{\alpha_j}\frac{|h k' - h' k|}{k k'}$$

ist (dabei bedeutet $\min|t-t'|$, wie in (23), die untere Grenze von $|t-t'|$, wenn t das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, t' das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}$ durchläuft); die übrigen Glieder von S_2 sind in $S_{2,2}$ enthalten, wenn $hk'-h'k>0$ und in $S_{2,3}$, wenn $hk'-h'k<0$.

Abschätzung von $S_{2,1}$.

Es ist (alles für $x>c$)

$$\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h'}{k'}=\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{|hk'-h'k|}{kk'}.$$

Die Länge von $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ ist kleiner als $\frac{c}{k\sqrt{x}}$. Wenn also (25) gelten soll, muß

$$\frac{c}{k\sqrt{x}}+\frac{c}{k'\sqrt{x}}>\frac{\pi}{\alpha_j}\frac{|hk'-h'k|}{kk'}$$

sein; wegen $k'\geqq k$ muß also

$$\frac{c}{k\sqrt{x}}>\frac{|hk'-h'k|}{kk'},$$

also

$$k'>c\sqrt{x}, \tag{26}$$

$$|hk'-h'k|<c. \tag{27}$$

Wenn der Fareypunkt $\frac{h}{k}$ gegeben ist, gibt es also für k' höchstens c Möglichkeiten modulo k; denn wegen (27) muß $hk'\equiv l \pmod k$ sein, wo $|l|<c$. Also gibt es überhaupt höchstens $c\frac{\sqrt{x}}{k}$ Möglichkeiten für k'. Wenn weiter h, k, k' bereits gegeben sind, gibt es nach (27) höchstens c Möglichkeiten für h', und zwar ist nach (26), (27)

$$h'>\frac{hk'}{k}-\frac{c}{k}>c\frac{h\sqrt{x}}{k}.$$

Also ist (wegen $\lambda(h,k,h',k')\leqq x$)

$$S_{2,1}<cx\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\cdot\frac{\sqrt{x}}{k}\cdot\frac{1}{x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{k}{h\sqrt{x}}.$$

Also

$$S_{2,1}=O(x^{\frac{3}{2}}) \text{ für } r=2; \qquad S_{2,1}=O(x) \text{ für } r=3;$$
$$S_{2,1}=O(x^{\frac{1}{2}}\log x) \text{ für } r=4.$$

Abschätzung von $S_{2,2}$.

In den Gliedern von $S_{2,2}$ ist, da (25) nicht gilt,

(28)
$$\lambda(h,k,h',k') < c\frac{k\,k'}{|h\,k'-h'\,k|}.$$

Wir setzen

(29)
$$h\,k' - h'\,k = s + \tau\,k,$$

wo $\tau \geqq 0$ ganz, $0 < s \leqq k$. Wenn h, k, s gegeben sind, so ist k' durch die Bedingung $h\,k' \equiv s \pmod{k}$ eindeutig modulo k bestimmt. Wenn k' irgendwie so gewählt ist, daß $h\,k' \equiv s \pmod{k}$ und wenn noch dazu τ gegeben ist, so ist h' durch (29) bestimmt, und zwar ist $h' = \frac{1}{k}(h\,k' - s - \tau\,k)$. Da in $S_{2,2}$ stets $h' \geqq 1$, muß $h\,k' - s - \tau\,k \geqq k$ sein. Also ist wegen (28), (29)

$$S_{2,2} < c\sum_{h=1}^{\infty}\ \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{s=1}^{k}\sum_{k'}\sum_{\tau}\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-2}}\cdot\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}}\cdot\frac{1}{h}\cdot\frac{k}{h\,k'-s-\tau\,k}\cdot\frac{1}{s+\tau\,k}.$$

Dabei ist bei gegebenen h, k, s die Zahl k' modulo k bestimmt und durch $k \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ beschränkt; die ganze Zahl $\tau \geqq 0$ ist bei gegebenen h, k, s, k' durch $h\,k' - s - \tau\,k \geqq k$ beschränkt. Also ist

$$\sum_{\tau}\frac{1}{h\,k'-s-\tau\,k}\cdot\frac{1}{s+\tau\,k} < c\frac{1}{h\,k'}\sum_{s+\tau k\leqq\frac{h k'}{2}}\frac{1}{s+\tau\,k}$$
$$+\,c\frac{1}{h\,k'}\sum_{\frac{h k'}{2}<s+\tau k\leqq h k'-k}\frac{1}{h\,k'-s-\tau\,k} < \frac{c}{h\,k'\,s}\sum_{0\leqq\tau<\frac{h k'}{k}}\frac{1}{1+\tau\frac{k}{s}}$$
$$+\,\frac{c}{h\,k'}\sum_{1\leqq u<\frac{h k'}{2k}}\frac{1}{u\,k} < \frac{c}{h\,k'\,s}\log(2\,h\,k')$$

(man beachte, daß $s \leqq k$ und daß $u = \frac{1}{k}(h\,k' - s - \tau\,k)$ ganz ist). Also ist weiter für $x > c$

$$\sum_{k'}\sum_{\tau}\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}}\cdot\frac{1}{h\,k'-s-\tau\,k}\cdot\frac{1}{s+\tau\,k}$$
$$< \frac{c}{h\,s}\sum_{k'}\frac{\log(2h\,k')}{k'^{\frac{r}{2}-1}} < \frac{c}{h\,s}\log(h\,x)\sum_{0<n\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}\frac{1}{(n\,k)^{\frac{r}{2}-1}}$$
$$< \frac{c}{h\,s}\log(h\,x)\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}}\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r}{2}-2}\log^{b} x,$$

wo $b = 1$ für $r = 4$, $b = 0$ für $r = 2, 3$. Daher ist für $x > c$

$$S_{2,2} < c\,x^{1-\frac{r}{4}}\log^{b} x\sum_{h=1}^{\infty}\ \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{s=1}^{k}\frac{\log h+\log x}{k^{\frac{r}{2}-2}\,h^{2}\,s} < c\,x^{1-\frac{r}{4}}\log^{2+b} x\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-2}}.$$

Also ist

$$S_{2,2} = O\left(x^{\frac{3}{2}} \log^2 x\right) \text{ für } r = 2, \qquad S_{2,2} = O(x \log^2 x) \text{ für } r = 3,$$
$$S_{2,2} = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^3 x\right) \text{ für } r = 4.$$

Abschätzung von $S_{2,3}$.

In den Gliedern von $S_{2,3}$ gilt wieder (28), da (25) nicht gilt. Wir setzen

$$(30) \qquad h'k - hk' = s + \tau k,$$

wo $\tau \geqq 0$ ganz, $0 < s \leqq k$. Wenn h, k, s gegeben sind, so ist k' durch die Bedingung $hk' \equiv -s \pmod k$ eindeutig modulo k bestimmt. Es sei k' irgendwie so bestimmt; wenn dazu noch τ gegeben ist, so gibt es genau ein h', welches (30) erfüllt; und zwar ist $h' = \frac{1}{k}(hk' + s + \tau k)$. Also ist wegen (28), (30)

$$S_{2,3} < c \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{0 < k \leqq \sqrt{x}} \sum_{s=1}^{k} \sum_{k'} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{r}{2}-2}} \cdot \frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{k}{hk' + s + \tau k} \cdot \frac{1}{s + \tau k}.$$

Dabei ist bei gegebenen h, k, s die Zahl k' modulo k bestimmt und durch $k \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ eingeschränkt. Es ist

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{hk' + s + \tau k} \cdot \frac{1}{s + \tau k} < \frac{c}{hk's} \sum_{0 \leqq \tau \leqq \frac{2hk'}{k}} \frac{1}{1 + \tau \frac{k}{s}} + \frac{c}{k^2} \sum_{\tau > \frac{2hk'}{k}} \frac{1}{\tau^2} < \frac{c}{hk's} \log(2hk').$$

Dieselbe Abschätzung haben wir bei $S_{2,2}$ bekommen. Weiter geht alles buchstäblich wie bei $S_{2,2}$, so daß die für $S_{2,2}$ bewiesene Abschätzung auch für $S_{2,3}$ gilt.

Definitive Abschätzung von $M_{j,i}$.

Es ist $S = S_1 + S_{2,1} + S_{2,2} + S_{2,3}$, also

$$S = O(x^{\frac{3}{2}} \log^2 x) \text{ für } r = 2, \qquad S = O(x \log^2 x) \text{ für } r = 3,$$
$$S = O(x) \text{ für } r = 4.$$

Wegen (24) ist also

$$M_{j,i} = O\left(x^{\frac{3}{2}} \log^4 x\right) \quad \text{für} \quad r = 2,$$
$$M_{j,i} = O(x^2 \log^2 x) \quad \text{für} \quad r = 3,$$
$$M_{j,i} = O(x^3) \quad \text{für} \quad r = 4.$$

Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

§ 4.

Beweis des Satzes 2.

Es werde für $x > 0$

$$(31) \qquad A_0(x) = A(x), \quad \mathsf{P}_0(x) = \mathsf{P}(x), \quad A_\varrho(x) = \int_0^x A_{\varrho-1}(y)\,dy,$$

$$\mathsf{P}_\varrho(x) = \int_0^x \mathsf{P}_{\varrho-1}(y)\,dy \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt. Offenbar ist

$$A_\varrho(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}+\varrho}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+\varrho+1\right)} + \mathsf{P}_\varrho(x).$$

Es seien $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ diejenigen Zahlen, die sich durch die Form $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ mit ganzen u_μ darstellen lassen; es sei a_n die Anzahl derartiger Darstellungen der Zahl λ_n. Dann ist [8])

$$\mathsf{P}_\varrho(x) = A_\varrho(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}+\varrho}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+\varrho+1\right)} = \frac{x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r}{4}}}{\pi^\varrho \sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r}{4}}} J_{\varrho+\frac{r}{2}}(2\pi\sqrt{\lambda_n x}),$$

wenn $\varrho > \frac{r}{2}$. Für die Besselsche Funktion $J_\nu(z)$ gilt bekanntlich für $z \to +\infty$

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left(z - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{z}} + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^w}$ konvergiert bekanntlich für $w > \frac{r}{2}$; wenn wir also $d_\varrho = \frac{\varrho}{2} + \frac{r}{4} + \frac{1}{4}$ setzen, bekommen wir für $\varrho > \frac{r}{2}$

$$(32) \quad \mathsf{P}_\varrho(x) = \frac{x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r-1}{4}}}{\pi^{\varrho+1}\sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r+1}{4}}} \cos\pi\left(2\sqrt{\lambda_n x} - d_\varrho\right) + O\left(x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r-3}{4}}\right).$$

---

[8]) Vgl. z. B. Landau (2), S. 452, Formel (6). Dazu ist folgendes zu bemerken: In unserem Fall sind die Landauschen Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_r, z_1, z_2, \ldots, z_r$ gleich Null, also $\mu = \gamma = \delta = \alpha_n = 1$. Weiter ist bei Herrn Landau $B_0(x) = A_0(x) - 1$ (da der Punkt $[0, 0, \ldots, 0]$ nicht mitgezählt wird), $B_\varrho(x) = \int_0^x B_{\varrho-1}(y)\,dy$; also $B_\varrho(x) = A_\varrho(x) - \frac{x^\varrho}{\varrho!}$. Endlich schreibt Herr Landau jedes λ_n a_n-mal auf, so daß bei ihm die a_n nicht auftreten; sein k heißt bei uns r.

Wir bezeichnen nun mit c_ϱ unterschiedslos positive Zahlen, die nur von r, $a_{\mu\nu}$, ϱ abhängen. Aus bekannten Eigenschaften Dirichletscher Reihen ergibt sich, daß für $\varrho > c$ die Ungleichung

$$(33) \qquad \frac{a_1}{\lambda_1^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r+1}{4}}} > 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r+1}{4}}}$$

gilt. Es sei ϱ irgendeine ganze Zahl $> \frac{r}{2}$, für welche (33) gilt; es sei für jedes ganze $g > 0$

$$x_{1,\varrho}(g) = \frac{1}{\lambda_1}\left(g + \frac{d_\varrho}{2}\right)^2, \qquad x_{2,\varrho}(g) = \frac{1}{\lambda_1}\left(g + \frac{d_\varrho}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$$

(also $\cos\pi\left(2\sqrt{\lambda_1 x_{i,\varrho}(g)} - d_\varrho\right) = (-1)^{i+1}$ für $i = 1, 2$). Dann ist erstens

$$(34) \quad x_{1,\varrho}(g) < x_{2,\varrho}(g) < x_{1,\varrho}(g+1); \quad x_{i,\varrho}(g) = \frac{g^2}{\lambda_1} + O(g) \quad (i = 1, 2);$$

zweitens ist wegen (32), (33) für $g > c_\varrho$

$$(35) \qquad \mathsf{P}_\varrho(x_{1,\varrho}(g)) > c_\varrho\, g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}, \qquad \mathsf{P}_\varrho(x_{2,\varrho}(g)) < -c_\varrho\, g^{\varrho+\frac{r-1}{2}};$$

drittens ist (wegen (31), (35))

$$(36) \quad \int_{x_{2,\varrho}(g)}^{x_{1,\varrho}(g+1)} \mathsf{P}_{\varrho-1}(y)\,dy > c_\varrho\, g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}, \qquad \int_{x_{1,\varrho}(g)}^{x_{2,\varrho}(g)} \mathsf{P}_{\varrho-1}(y)\,dy < -c_\varrho\, g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}.$$

Wir behaupten nun: für jedes ganze $\varrho \geqq 1$ gibt es zu jedem ganzen $g > c_\varrho$ zwei Zahlen $x_{1,\varrho}(g)$, $x_{2,\varrho}(g)$, die (34), (35), (36) erfüllen. Diese Behauptung ist für $\varrho > c$ richtig, also genügt die Induktion von ϱ auf $\varrho - 1$. Es sei also für ein ganzes $\varrho > 1$ und für jedes ganze $g > c_\varrho$ (34), (35), (36) erfüllt. Da die Längen der Integrationsintervalle in (36) $O(g)$ sind, gibt es sicher für jedes ganze $g > c_{\varrho-1}$ zwei Zahlen $x_{2,\varrho-1}(g)$, $x_{1,\varrho-1}(g+1)$, so daß

$$(37) \qquad \begin{aligned} &\mathsf{P}_{\varrho-1}(x_{1,\varrho-1}(g+1)) > c_{\varrho-1}\, g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}, \\ &\mathsf{P}_{\varrho-1}(x_{2,\varrho-1}(g)) < -c_{\varrho-1}\, g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}, \end{aligned}$$

$$x_{1,\varrho}(g) < x_{2,\varrho-1}(g) < x_{2,\varrho}(g) < x_{1,\varrho-1}(g+1) < x_{1,\varrho}(g+1);$$

also wegen (34)

$$x_{1,\varrho-1}(g) < x_{2,\varrho-1}(g) < x_{1,\varrho-1}(g+1); \quad x_{i,\varrho-1}(g) = \frac{g^2}{\lambda_1} + O(g) \quad (i = 1, 2);$$

aus (37) folgt aber

$$\int_{x_{2,\varrho-1}(g)}^{x_{1,\varrho-1}(g+1)} \mathsf{P}_{\varrho-2}(y)\,dy > c_{\varrho-1}\, g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}, \qquad \int_{x_{1,\varrho-1}(g)}^{x_{2,\varrho-1}(g)} \mathsf{P}_{\varrho-2}(y)\,dy < -c_{\varrho-1}\, g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}.$$

Damit ist aber die Behauptung durch Induktion bewiesen. Für $\varrho = 1$ angewandt, ergibt sie für $x > c$:

$$\int_0^x \max(0, \mathsf{P}(y))\, dy \geqq \sum_{x_{1,1}(g+1) \leqq x} \int_{x_{1,1}(g)}^{x_{1,1}(g+1)} \mathsf{P}_0(y)\, dy > c \sum_{g < c\sqrt{x}} g^{1+\frac{r-1}{2}} > c x^{\frac{r+3}{4}};$$

$$\int_0^x \max(0, -\mathsf{P}(y))\, dy \geqq \sum_{x_{2,1}(g) \leqq x} - \int_{x_{1,1}(g)}^{x_{2,1}(g)} \mathsf{P}_0(y)\, dy > c \sum_{g < c\sqrt{x}} g^{1+\frac{r-1}{2}} > c x^{\frac{r+3}{4}}.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Satzes 3.

Es sei $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ eine rationale Form, also $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\alpha$, wo $\alpha > 0$ und die $b_{\mu\nu}$ ganz sind. Es sei $n > 0$ ganz; für $\alpha n < x < \alpha(n+1)$ ist offenbar $A(x) = A(\alpha n)$, also

$$\mathsf{P}(x) = A(\alpha n) - \gamma x^{\frac{r}{2}}, \quad \text{wo } \gamma = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)},$$

also

$$\frac{d\mathsf{P}(x)}{dx} = -\frac{r}{2}\gamma x^{\frac{r}{2}-1} \leqq -\frac{r}{2}\gamma(\alpha n)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen x-Werte, welche den Ungleichungen

$$\alpha n < x < \alpha(n+1), \qquad |\mathsf{P}(x)| < \frac{r\gamma\alpha}{8}(\alpha n)^{\frac{r}{2}-1}$$

genügen, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens $\frac{\alpha}{2}$ ist; also ist

$$\int_{\alpha n}^{\alpha(n+1)} |\mathsf{P}(y)|\, dy \geqq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r\gamma\alpha}{8}(\alpha n)^{\frac{r}{2}-1};$$

daher ist

$$\liminf_{x=\infty} x^{-\frac{r}{2}} \int_0^x |\mathsf{P}(y)|\, dy > 0,$$

w. z. b. w.

Literatur.

J. G. van der Corput: (1) Neue zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen 89 (1923), S. 215–254.

G. H. Hardy: (1) On Dirichlet's divisor problem, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 15 (1916), S. 1–25.

V. Jarník: (1) Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1924, S. 1–12.

(2) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Annalen **100** (1928), S. 699–721.

(3) Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1928, S. 1–10.

E. Landau: (1) Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Berliner Akademieberichte 1915, S. 458–476.

(2) Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Wiener Akademieberichte **124** (1915), S. 445–468.

(3) Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Vierte Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1923, S. 58–65.

(4) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Vierte Abhandlung, Göttinger Nachrichten 1924, S. 137–150.

(5) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 126–132.

(6) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 299–310.

L. W. Nieland: (1) Zum Kreisproblem, Math. Annalen **98** (1928), S. 717–736.

G. Szegö: (1) Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II. Zahlentheoretische Anwendungen. Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 388–404.

A. Walfisz: (1) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 300–307.

(2) Teilerprobleme, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 66–88.

(3) Über zwei Gitterpunktprobleme, Math. Annalen **95** (1926), S. 69–83.

(4) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Dritte Abhandlung, Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 245–268.

Prag, den 2. Februar 1930.

(Eingegangen am 6. Februar 1930.)