Vojtěch Jarník

Sur une fonction arithmétique

Věstník Král. čes. spol. nauk 1930, No. 7, 13 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500464

VII.

Sur une fonction arithmétique.

Par VOJTĚCH JARNÍK.

(Présenté le 5 novembre 1930.)

§ 1. Introduction.

Soit k un nombre entier, $k \geqq 5$; soit

$$Q(u) = \sum_{r,s=1}^{k} a_{rs} u_r u_s \quad (a_{rs} = a_{sr})$$

une forme définie et positive, dont les coefficients a_{rs} sont des nombres entiers; nous désignons par D la déterminante de cette forme. Si x est un nombre entier positif (x et, plus tard, y seront toujours des nombres entiers positifs), désignons par $F(x)$ le nombre des points à coordonnées entières („Gitterpunkte“), situés dans l' ellipsoïde fermé $Q(u) \leqq x$. Le volume de cet ellipsoïde est égal à

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)\sqrt{D}} = \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}},$$

où l' on a posé

$$\mathrm{M} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2\,\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{D}};$$

posons encore

$$(1) \qquad P(x) = F(x) - \frac{4M}{k} x^{\frac{k}{2}};$$

on doit à MM. Landau et Walfisz le résultat suivant:[1])

[1]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. *19* (1924), p. 300—307; E. Landau, Über Git-

(2) $$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),\quad P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

(Nous allons utiliser, dans cette note, les symboles O et Ω toujours par rapport à une variable, croissante vers $+\infty$ par des valeurs entières.)

Quant à l' évaluation inférieure de $P(x)$, on connaît encore un résultat plus précis que voici:[2])

Théorème 1er. Il existe deux nombres $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et trois nombres entiers $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $N > 0$ (c_1, c_2, A_1, A_2, N ne dépendant que de la forme $Q(u)$ — c' est - à - dire du nombre k et des nombres a_{rs}) tels que

$P(x) > (M + c_1)\, x^{\frac{k}{2}-1}$ *pour tous les nombres $x > c_2$, satisfaisant à la relation $x \equiv A_1 \pmod N$ et*

$P(x) < (M - c_1)\, x^{\frac{k}{2}-1}$ *pour tous les nombres $x > c_2$, satisfaisant à la relation $x \equiv A_2 \pmod N$.*

Dans cette note, nous allons considérer la somme

(3) $$\sum_{x=1}^{y} P^2(x) \quad (y > 0,\ y \text{ entier})$$

et nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 2ème. Il existe un nombre positif C, ne dépendant que de la forme $Q(u)$, et tel que

$$\sum_{x=1}^{y} P^2(x) = C y^{k-1} + f(y),$$

où

$$f(y) = \Omega(y^{k-2}),$$

$$f(y) = \begin{vmatrix} O(y^{k-2}) \text{ pour } k > 8, \\ O(y^{k-2} \log y) \text{ pour } k = 8, \\ O(y^{\frac{3k}{4}} \log y) \text{ pour } k = 5, 6, 7 \end{vmatrix}$$

(Observons que $k - 2 < \frac{3k}{4} < k - 1$ pour $k = 5, 6, 7$).

terpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschrift *21* 1924), p. 126—132 et *24* (1925), p. 299—310 (zweite Abhandlung).

[2]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Mitteilung, Math. Zeitschr. *28* (1928), p. 311—316.

Mais nous allons démontrer encore un théorème un peu plus général. Observons que, d'après les formules (2), $P(x)$ est précisement d'ordre $x^{\frac{k}{2}-1}$. On est alors conduit à tenter de diminuer la valeur de la somme (3), en y substituant, au lieu de $P(x)$, la fonction $P(x) - E\,x^{\frac{k}{2}-1}$, où E est une constante convenablement choisie. Et en effet, le théorème suivant — dont le théorème $2^{ème}$ n'est qu'un cas particulier — nous apprend qu'un tel choix soit possible:

Théorème $3^{ème}$. Soit E un nombre réel; alors, on peut trouver un nombre positif C_E, ne dépendant que de la forme $Q(u)$ et du nombre E, qui jouit de la propriété suivante: en posant

$$\sum_{x=1}^{y}\left(P(x) - E\,x^{\frac{k}{2}-1}\right)^2 = C_E\,y^{k-1} + f(y),$$

on a

$$f(y) = \Omega\,(y^{k-2}),$$

$$f(y) = \left|\begin{array}{ll} O(y^{k-2}) & pour\ k > 8, \\ O(y^{k-2}\log y) & pour\ k = 8, \\ O(y^{\frac{3k}{4}}\log y) & pour\ k = 5, 6, 7 \end{array}\right|.$$

D'une façon plus précise, on a

$$C_E = \frac{(M - E)^2}{k-1} + K,$$

où K est un nombre positif, ne dépendant que de la forme $Q(u)$ (donc indépendant du nombre E). On obtient alors la plus petite valeur de C_E, en prenant $E = M$.

Dans la démonstration du théorème $3^{ème}$, nous ferons usage d'un thèorème que j'ai démontré dans une autre note:[3]

Théorème $4^{ème}$. La suite

$$\frac{P(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} \quad (x = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

possède une infinité des points limites.

---

[3] Voir la note précédente „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions".

Il serait suffisant pour notre but de savoir que la suite (4) ait plus de deux points limites. (Observons que le théorème 1^{er}, qui va aussi trouver une application dans la démonstration du théorème $3^{\text{ème}}$, nous assure seulement que la suite (4) a au moins deux points limites.)

§ 2. Lemmes.

Dans la suite, nous désignons par c_i $(i = 1, 2, \cdots)$ des nombres positifs, ne dépendant que de la forme $Q(u)$ et de leur indice i (c_1, c_2 sont déjà réservés); par ϑ nous allons désigner des nombres complexes dépendant des variables quelconques, dont la valeur absolue $|\vartheta|$ ne dépasse pas l'unité; nous n'allons pas distinguer les différents ϑ par des indices.

Dans ce §, nous allons établir quelques lemmes assez simples, dont nous ferons usage constamment dans la suite.

Lemme 1^{er}. Soit $\varrho > 1$, $x > 0$, x entier. Alors on a

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\varrho} = \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} + \frac{1}{2} x^{\varrho} + \vartheta \varrho x^{\varrho-1}.$$

Démonstration. La formule sommatoire d'Euler donne

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\varrho} = \frac{1}{2} x^{\varrho} + \int_0^x u^{\varrho}\, du + \varrho \int_0^x \left(u - [u] - \frac{1}{2}\right) u^{\varrho-1}\, du$$

et l'application du second théorème de la moyenne à la dernière intégrale achève la démonstration.

Lemme $2^{\text{ème}}$. Soient donnés trois nombres entiers et positifs x, p, q; soit $(p, q) = 1$, $q > 1$. Posons

$$G(p, q, x) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r\, e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{x} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}};$$

alors, si ϱ désigne un des nombres

$$\frac{k}{2} - 1,\ k - 2,\ k - 1,$$

on a

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\varrho}\, e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = G(p, q, x)\, x^{\varrho} + \vartheta c_3 q^2 x^{\varrho-1}. \tag{5}$$

Remarque. On a

$$(6)\qquad \sum_{r=0}^{q-1} e^{-2\pi i r\frac{p}{q}} = 0\,;$$

alors, p et q étant donnés, $G(p, q, x)$ ne dépend que de la classe du nombre x modulo q.

Démonstration. Posons

$$x = Lq + R,\ L \text{ entier},\ 0 \leqq R < q.$$

Si $L < 100$, l'assertion du lemme est évidente; car, pour $L < 100$, on a $x < 100\,q$ et alors

$$|\,G(p, q, x)\,x^\varrho\,| \leqq 2\,q\,x^\varrho < 200\,q^2\,x^{\varrho-1},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{x} n^\varrho e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}\right| \leqq x^{\varrho+1} < 10000\,q^2\,x^{\varrho-1}.$$

Soit alors $L \geqq 100$, c'est-à-dire $x \geqq 100\,q$. Alors on peut calculer comme il suit (en utilisant le lemme 1er):

$$(7)\quad \sum_{n=0}^{x} n^\varrho\, e^{-2\pi i n\frac{p}{q}} = \sum_{l=0}^{L-1}\sum_{r=0}^{q-1}(lq+r)^\varrho e^{-2\pi i r\frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{R}(Lq+r)^\varrho e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}$$

$$(8)\qquad \sum_{r=0}^{R}(Lq+r)^\varrho\, e^{-2\pi i r\frac{p}{q}} = \sum_{r=0}^{R}(x^\varrho + \vartheta\,\varrho\, q\, x^{\varrho-1})\, e^{-2\pi i r\frac{p}{q}} =$$

$$= x^\varrho \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r\frac{p}{q}} + \vartheta\, c_4 q^2 x^{\varrho-1}.$$

r $(0 \leqq r < q)$ étant donné, on a $\left(\text{observons que } \varrho - 2 \leqq -\dfrac{1}{2}\right)$

$$\sum_{l=0}^{L-1}(lq+r)^\varrho = r^\varrho + \sum_{l=1}^{L-1}(lq)^\varrho + \varrho r \sum_{l=1}^{L-1}(lq)^{\varrho-1} +$$

$$\vartheta\,\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}\, r^2 \sum_{l=1}^{L}(lq)^{\varrho-2}$$

$$= q^\varrho \sum_{l=1}^{L-1} l^\varrho + \varrho\, r\, q^{\varrho-1}\frac{L^\varrho}{\varrho} + \vartheta\, c_5\, q^\varrho\, L^{\varrho-1}$$

$$= q^\varrho \sum_{l=1}^{L-1} l^\varrho + r\,\frac{x^\varrho}{q} + \vartheta\, c_6\, q\, x^{\varrho-1}.$$

Alors (en utilisant la formule (6))

$$(9)\quad \sum_{l=0}^{L-1}\sum_{r=0}^{q-1}(l\,q+r)^{\varrho}\,e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}=\frac{x^{\varrho}}{q}\sum_{r=0}^{q-1} r\,e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}+\vartheta\,c_6\,q^2\,x^{\varrho-1}.$$

Mais les formules (7), (8), (9) donnent le résultat cherché (5), en observant que

$$\sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}=\sum_{r=0}^{x} e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}.$$

Lemme 3ème. Soient x, p, q des nombres entiers; $x>0$ $0<p<q$ (donc $q>1$), $(p,q)=1$; posons

$$s=Max\left(\frac{q}{p}\ ,\ \frac{q}{q-p}\right).$$

Alors on a, pour chaque $\varrho\leqq 0$,

$$\left|\sum_{n=0}^{x} n^{\varrho}\,e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}\right|<s\,x^{\varrho}$$

(pour $\varrho=0$, $n=0$ on doit poser $n^{\varrho}=1$).

Démonstration. Soient m_1, m_2 des nombres entiers, $m_1\leqq m_2$. Alors on a

$$\left|\sum_{n=m_1}^{m_2} e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}\right|\leqq\frac{1}{\left|\sin\pi\frac{p}{q}\right|}\leqq\frac{s}{2}\ ;$$

l'application du lemme d'Abel nous donne alors le résultat cherché.

Remarque. On a évidemment

$$(10)\qquad \sum_{p=0}^{q-1}{}' s=\vartheta\,c_7\,q\log q\,,$$

le symbole $\sum\limits_{p=0}^{q-1}{}'$ signifiant — ici et aussi dans la suite — que la sommation ne s'étend que sur les valeurs p, satisfaisant à la relation $(p,q)=1$.

§ 3. Démonstration du théorème 3ème.

On a [4]) (x entier, $x>0$)

$$F(x)=2M\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1}+2M\sum_{2\leq q\leq\sqrt{x}}\ \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}$$

$$+\vartheta c_7 x^{\frac{k}{4}} \log 2x,$$

où

$$S_{p,q}=\sum_{(m)=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{p}{q}Q(m)}$$

On sait que

$$(11)\qquad |S_{p,q}|<c_8 q^{\frac{k}{2}}.$$

On a alors, d'après (10), (11) et d'après le lemme 3ème, pour $y\geqq x$ (y entier)

$$\left|\sum_{\sqrt{x}<q\leq\sqrt{y}}\ \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}\right|\leqq$$

$$\leqq c_8\sum_{q>\sqrt{x}}\ \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{s}{q^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1}<c_9\sum_{q>\sqrt{x}} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}} x^{\frac{k}{2}-1}<$$

$$\leqq c_{10} x^{\frac{k}{4}} \log(2x),$$

d'où

$$F(x)=2M\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1}+2M\sum_{2\leq q\leq\sqrt{y}}\ \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}+$$

$$+\vartheta c_{11} x^{\frac{k}{4}} \log(2x);$$

on a alors, d'après (1) et d'après le lemme 1er,

$$P(x)-E x^{\frac{k}{2}-1}=F(x)-\frac{4M}{k}x^{\frac{k}{2}}-E x^{\frac{k}{2}-1}=$$

---

[4]) E. Landau, über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. *21* (1924), p. 126—132, formule (4).

$$= F_1(x,y) + \vartheta c_{12}\left(x^{\frac{k}{2}-2} + x^{\frac{k}{4}}\log(2x)\right),$$

où l'on a posé

$$F_1(x,y) = (M-E)\,x^{\frac{k}{2}-1} + 2M \sum_{2\leq q\leq \sqrt{y}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}}.$$

On a, d'après (2), pour $1 \leq x \leq y$

$$|F_1(x,y)| < c_{13}\, x^{\frac{k}{2}-1};$$

d'où

$$\sum_{x=1}^{y}\left(P(x) - Ex^{\frac{k}{2}-1}\right)^2 = \sum_{x=1}^{y} F_1^2(x,y) +$$

(12) $$+ O\sum_{x=1}^{y}\left(x^{k-3} + x^{\frac{3k}{4}-1}\log(2x)\right) =$$

$$= \sum_{x=1}^{y} F_1^2(x,y) + O\left(y^{k-2} + y^{\frac{3k}{4}}\log y\right).$$

Nous allons maintenant cosidérer la somme

(13) $$\sum_{x=1}^{y} F_1^2(x,y) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3.$$

où

$$\sum\nolimits_1 = (M-E)^2 \sum_{x=1}^{y} x^{k-2},$$

$$\sum\nolimits_2 = 4M(M-E)\sum_{x=1}^{y} x^{\frac{k}{2}-1} \sum_{2\leq q\leq\sqrt{y}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n\frac{p}{q}},$$

$$\sum\nolimits_3 = 4M^2 \sum_{x=1}^{y} \sum_{2\leq q\leq\sqrt{y}} \sum_{p=0}^{q=1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n\frac{p}{q}} \sum_{2\leq q'\leq\sqrt{y}} \sum_{p'=0}^{q'-1}{}' \cdot$$

$$\cdot \frac{S_{p',q'}}{q'^k} \sum_{n'=0}^{x} n'^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n'\frac{p'}{q'}}.$$

On a, d'après le lemme 1er,

(14) $$\sum\nolimits_1 = \frac{(M-E)^2}{k-1}\, y^{k-1} + O(y^{k-2}).$$

Pour évaluer Σ_2, on peut calculer comme il suit, en observant que l'on peut indifféremment commencer la sommation chez $x=0$ ou chez $x=1$, chez $n=0$ ou chez $n=1$ et en utilisant le lemme 1[er], 2[ème] et 3[ème]:

$$\sum_2 = 4M(M-E)\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{y}}\sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k}\sum_{n=1}^{y} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n\frac{p'}{q}}\sum_{x=n}^{y} x^{\frac{k}{2}-1};$$

$$\sum_{x=n}^{y} x^{\frac{k}{2}-1} = \frac{2}{k}\left(y^{\frac{k}{2}}-(n-1)^{\frac{k}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(y^{\frac{k}{2}-1}-(n-1)^{\frac{k}{2}-1}\right)+$$

$$+\vartheta c_{13}y^{\frac{k}{2}-2} = \frac{2}{k}\left(y^{\frac{k}{2}}-n^{\frac{k}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(y^{\frac{k}{2}-1}+n^{\frac{k}{2}-1}\right)+\vartheta c_{14}y^{\frac{k}{2}-2};$$

$$\sum_{n=0}^{y} n^{\frac{k}{2}-1}\left(\frac{2}{k}y^{\frac{k}{2}}-\frac{2}{k}n^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{k}{2}-1}+\frac{1}{2}n^{\frac{k}{2}-1}+\right.$$

$$\left.+\vartheta c_{14}y^{\frac{k}{2}-2}\right)e^{-2\pi i n\frac{p}{q}} = \frac{2}{k}G(p,q,y)\,y^{k-1}-$$

$$-\frac{2}{k}G(p,q,y)\,y^{k-1}+\vartheta s\,y^{k-2}+\vartheta c_{15}q^2y^{k-2} = \vartheta c_{16}q^2y^{k-2};$$

$$\sum_2 = O\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{y}}\sum_{p=0}^{q-1}\frac{y^{k-2}}{q^{\frac{k}{2}-2}} = O\left(y^{k-2}\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{y}}\frac{1}{q^{\frac{k}{2}-3}}\right);$$

alors

$$(15)\qquad \sum_2 = \begin{cases} O(y^{k-2}) \text{ pour } k>8 \\ O(y^{k-2}\log y) \text{ pour } k=8 \\ O\left(y^{\frac{3k}{4}}\right) \text{ pour } k=5,6,7 \end{cases}.$$

Il nous reste à évaluer Σ_3. Nous posons, pour cela,

$$A(p,q,p',q',y) = \sum_{x=1}^{y}\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1}e^{2\pi i n\frac{p}{q}}\sum_{n'=0}^{x} n'^{\frac{k}{2}-1}e^{-2\pi i n'\frac{p'}{q'}}$$

$$(0<p<q,\ 0<p'<q',\ (p,q)=1,\ (p',q')=1);$$

alors on a

$$\sum_3 = 4M^2\sum_{2\leqq q\leqq\sqrt{y}}\sum_{p=0}^{q-1}{}'\sum_{2\leqq q'\leqq\sqrt{y}}\sum_{p'=0}^{q'-1}{}'\frac{S_{p,q}S_{p',q'}}{q^k q'^k}A(p,q,p',q',y).$$

Posons (p, q, p', q', x étant donnés)

$$G(p,q,x)\, x^{\frac{k}{2}-1} = f \quad , \quad G(p',q',x)\, x^{\frac{k}{2}-1} = f',$$

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = f+g, \sum_{n'=0}^{x} n'^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n' \frac{p'}{q'}} = f'+g'.$$

On suppose, bien entendu, $0 < p < q \leqq \sqrt{y}$, $(p, q) = 1$, $0 < p' < q' \leqq \sqrt{y}$, $(p', q') = 1$, x entier, $x > 0$. On a alors, en utilisant le lemme 2ème et 3ème,

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \sum_{n'=0}^{x} n'^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n' \frac{p'}{q'}} =$$

$$= f f' + (f+g)\, g' + (f'+g')\, g - g g' =$$

$$= G(p,q,x)\, G(p',q',x)\, x^{k-2} + \vartheta c_{17} \left(s q'^2 + s' q^2 + q^2 q'^2 \frac{1}{x} \right) x^{k-3},$$

en posant

$$s = Max \left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p} \right), \quad s' = Max \left(\frac{q'}{p'}, \frac{q'}{q'-p'} \right).$$

Il s'ensuit

$$A(p,q,p',q',y) = \sum_{x=1}^{y} G(p,q,x)\, G(p',q',x)\, x^{k-2} +$$

$$+ \vartheta c_{18} \left(s q'^2 + s' q^2 + q^2 q'^2 \frac{1}{y} \right) y^{k-2}.$$

Le produit $G(p,q,x)\; G(p',q',x)$ ne dépend que de la classe du nombre x modulo qq'; alors on a (observons que $qq' \leqq y$)

$$\sum_{x=1}^{y} G(p,q,x)\, G(p',q',x)\, x^{k-2} =$$

$$= \sum_{R=0}^{qq'-1} G(p,q,R)\; G(p',q',R) \sum_{0 \leq l \leq \frac{y-R}{qq'}} (lqq'+R)^{k-2}$$

$$\sum_{R=0}^{qq'-1} G(p,q,R)\, G(p',q',R) \sum_{0 \leq l \leq \frac{y-R}{qq'}} ((lqq')^{k-2} + \vartheta c_{19}\, qq' y^{k-3})$$

$$= \sum_{R=0}^{qq'-1} G(p,q,R)\; G(p',q',R) \left(\frac{(qq')^{k-2}}{k-1} \left(\frac{y}{qq'} \right)^{k-1} + \vartheta c_{20}\, y^{k-2} \right);$$

mais on a, d'après le lemme 3ème,

$$(16)\quad |G(p,q,R)| < \frac{1}{q}\left|\sum_{r=0}^{q-1} r e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}\right| + \left|\sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}\right| < 2s,$$

$$(17)\qquad G\,|(p',q',R)| \leq 2s'$$

et alors

$$\sum_{x=1}^{y} G(p,q,x)\, G(p',q',x)\, x^{k-2} =$$

$$= \frac{y^{k-1}}{(k-1)\,qq'} \sum_{R=0}^{qq'-1} G(p,q,R)\; G(p',q',R) + \vartheta c_{21}\, qq'\, ss' y^{k-2};$$

alors on a

$$A(p,q,p',q',y) = \frac{y^{k-1}}{(k-1)\,qq'} \sum_{R=0}^{qq'-1} G(p,q,R)\; G(p',q',R)$$

$$+ \vartheta c_{22}\,(sq'^2 + s'q^2 + ss'\,qq')\, y^{k-2}.$$

Nous avons ainsi obtenu l'évaluation suivante de Σ_3 (en utilisant la formule (11))

$$\sum\nolimits_3 = \frac{4\,M^2}{k-1}\, y^{k-1} \sum_{2\leq q\leq \sqrt{y}}\ \sum_{2\leq q'\leq\sqrt{y}}\ \sum_{p=0}^{q-1}{}'\ \sum_{p'=0}^{q'-1}{}' \frac{S_{pq}\ S_{p'q'}}{q^{k+1}\ q'^{k+1}}\ .$$

$$(18)\qquad .\sum_{R=0}^{qq'-1} G(p,q,R)\; G(p',q',R) +$$

$$+ O\left(y^{k-2} \sum_{2\leq q\leq\sqrt{y}}\ \sum_{2\leq q'\leq\sqrt{y}}\ \sum_{p=0}^{q-1,}{}'\ \sum_{p'=0}^{q'-1,}{}' \frac{sq'^2 + s'q^2 + ss'\,qq'}{q^{\frac{k}{2}}\ q'^{\frac{k}{2}}}\right).$$

La fonction sous le signe O est égale (d'après (10)) à

$$O\left(y^{k-2} \sum_{2\leq q\leq\sqrt{y}}\ \sum_{2\leq q'\leq\sqrt{y}} \left(\frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}\ q'^{\frac{k}{2}-3}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\log q'}{q^{\frac{k}{2}-3}\ q'^{\frac{k}{2}-1}} + \frac{\log q\ \log q'}{q^{\frac{k}{2}-2}\ q'^{\frac{k}{2}-2}}\right)\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} O(y^{k-2}) & \text{pour } k > 8 \\ O(y^{k-2}\log y) & \text{pour } k = 8 \\ O\left(y^{\frac{3k}{4}}\right) & \text{pour } k = 5, 6, 7 \end{array}\right\}.$$

Nous allons faire maintenant encore une modification de la première somme à droite de la formule (18); au lieu d'étendre la sommation sur les q, q' avec $2 \leqq q \leqq \sqrt{y}$, $2 \leqq q' \leqq \sqrt{y}$, nous laissons parcourir q et q' tous les nombres naturels $\geqq 2$. La série infinie, qui représente le changement en question du premier membre à droite de (18), sera majorée par la série (voir (10), (11), (16), (17))

$$c_{23}\, y^{k-1} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{q' > \sqrt{y}} \sum_{p'=0}^{q'-1} \frac{s\, s'}{q^{k/2}\, q'^{\,k/2}} = O\left(y^{k-1} \sum_{q' > \sqrt{y}} \frac{\log q'}{q'^{\frac{k}{2}-1}} \right) =$$

$$= O\left(y^{\frac{3k}{4}} \log y \right)$$

Donc, en posant

$$K = \frac{4\, M^2}{k-1} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{q'=2}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \sum_{p'=0}^{q'-1}{}' \frac{S_{p,q}\, S_{p',q'}}{q^{k+1} q'^{\,k+1}} \sum_{R=0}^{qq'-1} G(p, q, R)\, G(p', q', R),$$

on a

$$\sum\nolimits_3 = K y^{k-1} + O\left(y^{k-2} + y^{\frac{3k}{4}} \log y\right). \tag{19}$$

D'après (12), (13), (14), (15), (19), on a

$$\sum_{x=1}^{y} \left(P(x) - E x^{\frac{k}{2}-1} \right)^2 = \frac{(M-E)^2}{k-1}\, y^{k-1} + \tag{20}$$
$$+ K y^{k-1} + O\left(y^{k-2} + y^{\frac{3k}{4}} \log y \right).$$

Pour achever la démonstration du théorème 3ème, il nous reste à démontrer les faits suivants:

1. $K > 0$.
2. $\sum_{x=1}^{y} \left(P(x) - E x^{\frac{k}{2}-1} \right)^2 - C_E y^{k-1} = \Omega(y^{k-2})$.

Ad 1. On a, d'après le théorème 1er,

$$\sum_{x=1}^{y} \left(P(x) - M x^{\frac{k}{2}-1} \right)^2 \geqq c_1^2 \sum_{\substack{c_2 < x \leqq y \\ x \equiv A_1 \pmod{N}}} x^{k-2} > c_{23}\, y^{k-1}$$

pour $y > c_{24}$. Donc on a, d'après (20) — en y posant $E = M$ — nécessairement $K > 0$.

Ad 2. Supposons que, pour une certaine valeur de E, on aurait

$$\sum_{x=1}^{y}\left(P(x)-Ex^{\frac{k}{2}-1}\right)^2=C_E y^{k-1}+o(y^{k-2});$$

on aurait alors

$$\left(P(y)-Ey^{\frac{k}{2}-1}\right)^2=C_E y^{k-1}-C_E(y-1)^{k-1}+o(y^{k-2})$$
$$=(k-1)\,C_E y^{k-2}+o(y^{k-2});$$

alors

$$\left|P(y)-Ey^{\frac{k}{2}-1}\right|=\sqrt{(k-1)C_E}\,y^{\frac{k}{2}-1}+o\left(y^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

donc, la suite (4) ne pourrait avoir plus de deux points limites, ce qui est en contradiction avec le théorème 4ème.

Prague, le 25. X. 1930.