Vojtěch Jarník
Über die Umordnung unendlicher Reihen

Věstník Král. čes. spol. nauk 1927, VIII, 45 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500444

VIII.

Über die Umordnung unendlicher Reihen.

Von VOJTĚCH JARNÍK.

Vorgelegt am 20. IV. 1927.

§ 1. Definitionen und Problemstellung.

Es sei

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (1)$$

eine Folge von komplexen Zahlen; eine Zahl x heißt Häufungswert der Folge (1), wenn es eine Teilfolge von (1) gibt, die gegen x konvergiert. Die Menge[1]) aller Häufungswerte von (1) nenne ich die Grenzmenge der Folge (1) und bezeichne sie mit

$$m(x_1, x_2, \ldots). \qquad (2)$$

Offenbar ist (2) abgeschlossen.

Es sei nun

$$a_1 + a_2 + \ldots \qquad (3)$$

eine unendliche (konvergente oder divergente) Reihe. Es sei $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; die Grenzmenge der Folge $s_1, s_2, \ldots$ will ich die Grenzmenge der Reihe (3) nennen und mit

$$M(a_1 + a_2 + \ldots) \qquad (4)$$

bezeichnen; es ist also $M(a_1 + a_2 + \ldots) = m(s_1, s_2, \ldots)$. Der Begriff der Grenzmenge einer Reihe ist also eine direkte Verallgemeinerung des Begriffes „Summe einer konvergenten Reihe". In der Tat, wenn (3) zur Summe s konvergiert, so besteht (4) gerade aus dem einzigen Punkt s.

Die Natur von (4) ist im allgemeinen eine recht komplizierte. Offenbar ist (4) abgeschlossen; aber auch umgekehrt können

[1]) Eine komplexe Zahl $a + bi$ kann man durch einen Punkt in einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten a, b darstellen; ich benutze diese Darstellung und spreche unterschiedslos von Zahlen oder Punkten, von Zahlen- oder Punktmengen usw.

wir folgendes behaupten: Es sei μ eine abgeschlossene Punktmenge der komplexen Zahlenebene: dann gibt es eine Reihe $a_1 + a_2 + \ldots.$ für welche

$$M(a_1 + a_2 + \ldots) = \mu.$$

Denn es sei $x_1, x_2, \ldots$ eine höchstens abzählbare Teilmenge von μ, die in μ dicht ist.[2]) Ich wähle die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ so, daß

$$\begin{array}{llll} s_1 = x_1, & & & \qquad (s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ s_2 = x_1, & s_3 = x_2, & & \\ s_4 = x_1, & s_5 = x_2 & s_6 = x_3, & \\ s_7 = x_1, & s_8 = x_2, & s_9 = x_3, & s_{10} = x_4, \end{array}$$

u. s. w.

Dann besteht $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ genau aus den Punkten $x_1, x_2, \ldots$ und ihren Häufungspunkten; d. h. $M(a_1 + a_2 + \ldots) = \mu$.

Der vorliegende Beweis ist auf den Fall zugeschnitten, daß $x_1, x_2, \ldots$ eine unendliche Menge ist; die im Falle einer endlichen Menge notwendige Modifikation liegt auf der Hand.

Wir werden uns daher mit $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ nicht mehr beschäftigen und führen vielmehr einen neuen Begriff ein: wir betrachten alle Reihen $b_1 + b_2 + \ldots$, die aus der gegebenen Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entstehen und bilden die Vereinigungsmenge von allen zugehörigen $M(b_1 + b_2 + \ldots)$. Diese Vereinigungsmenge nennen wir „die Summenmenge der Folge $a_1, a_2, \ldots$“ und bezeichnen sie mit

$$M(a_1, a_2, \ldots). \tag{5}$$

Wenn also $b_1 + b_2 + \ldots$ irgend eine, aus $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entstandene Reihe ist, so ist die Menge $M(b_1 + b_2 + \ldots)$ eine Teilmenge von $M(a_1, a_2, \ldots)$. Es besteht aber der Satz (§ 2, Satz 1): Es gibt eine Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$, die aus $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entsteht und für welche $M(b_1 + b_2 + \ldots) = M(a_1, a_2, \ldots)$. Dadurch gewinnt $M(a_1, a_2, \ldots)$ eine einfache Bedeutung: sie ist die „ausgedehnteste“ unter den Grenzmengen aller Reihen, die aus $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entstehen.

Diese Menge $M(a_1, a_2, \ldots)$ ist aber von einer wesentlich einfacheren Natur als $M(a_1 + a_2 + \ldots)$, und ihre Untersuchung soll den wesentlichen Inhalt dieser Abhandlung bilden. Wir werden nämlich — unter der ein-

---

[2]) Eine solche gibt es; vgl. z. B. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Bd I, S. 93, Satz III.

schränkenden Voraussetzung, daß die Folge $a_1, a_2, \ldots$ beschränkt ist — folgendes beweisen: $M(a_1, a_2, \ldots)$ ist

1. entweder leer
2. oder sie besteht aus einem einzigen Punkt
3. oder aus allen Punkten einer arithmetischen Progression (d. h. aus äquidistanten Punkten auf einer Geraden)
4. oder aus allen Punkten einer Geraden
5. oder aus allen Punkten eines ebenen Zahlengitters
6. oder aus allen Punkten einer Schar von äquidistanten parallelen Geraden
7. oder aus allen Punkten der komplexen Zahlenebene.

Darüber hinaus werden wir noch zeigen, wie man entscheiden kann, welcher von diesen sieben Fällen eintritt.

Der erste Schritt der Untersuchung wird durch folgenden Satz geleistet (§ 2, Satz 2): wenn eine Zahl y zu $M(a_1, a_2, \ldots)$ und eine Zahl x zu $m(a_1, a_2, \ldots)$ gehört, so gehören auch die Zahlen $y + x$ und $y - x$ zu $M(a_1, a_2, \ldots)$.

Wenn also $\mathfrak{M}_1(a_1, a_2, \ldots)$ den kleinsten $m(a_1, a_2, \ldots)$ enthaltenden Modul bezeichnet, und wenn y zu (5) und z zu $\mathfrak{M}_1(a_1, a_2, \ldots)$ gehört, so gehört auch $y + z$ zu (5). Weil aber (5) infolge des Satzes 1 abgeschlossen ist, so darf man in dieser Aussage die Menge $\mathfrak{M}_1(a_1, a_2, \ldots)$ sogar durch $\mathfrak{M}(a_1, a_2, \ldots)$ ersetzen, wo $\mathfrak{M}(a_1, a_2, \ldots)$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}_1(a_1, a_2, \ldots)$ bedeutet.

Wir sehen uns also zunächst dazu geführt, die beiden folgenden Fragen zu beantworten:

1. wann enthält (5) überhaupt wenigstens einen Punkt, oder wann ist (5) leer;
2. wie sieht $\mathfrak{M}(a_1, a_2, \ldots)$ aus.

Dies soll in §§ 3—5 geschehen.

Der Rest der Untersuchung verläuft etwa folgendermaßen: zu jedem Punkt a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestimmen wir denjenigen Punkt $\mathfrak{a}_n$ aus $\mathfrak{M}(a_1, a_2, \ldots)$, dessen Abstand von a_n am kleinsten ausfällt (eventuelle Vieldeutigkeit von $\mathfrak{a}_n$ spielt weiter keine Rolle) und untersuchen, welchen Einfluß die Konvergenzeigenschaften der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \mathfrak{a}_n)$ auf die Menge (5) ausüben. Diesem schwierigsten Teil der Untersuchungen sind §§ 6—12 gewidmet.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, zu beachten, daß in den Aussagen über (5) zahlentheoretische Elemente auftreten

(z. B. ein Punktgitter), obwohl die Fragestellung von einer anscheinend rein infinitesimaler Natur ist. Auch treten zahlentheoretische Hilfsmittel (Approximationen von reellen Zahlen durch rationale Zahlen) oft im Verlauf der Beweise auf.

Eine kurze Zusammenfassung der Resultate findet man im § 13. Trotz den vielen Fallunterscheidungen wird das Ergebnis dem Leser hoffentlich natürlich und verhältnismäßig einfach erscheinen.

Die Beweise sind elementar, aber ziemlich kompliziert; aus diesen beiden Gründen erlaube ich es mir, triviale oder fasttriviale Schlüsse dem Leser zu überlassen.

§ 2. Drei allgemeine Sätze.

Satz 1. *Es sei eine Zahlenfolge*

$$a_1, a_2, \ldots \tag{6}$$

gegeben. Dann gibt es eine Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$, *die aus* $a_1 + a_2 + \ldots$ *durch Umordnung entsteht, und für welche*

$$M(b_1 + b_2 + \ldots) = M(a_1, a_2, \ldots).$$

Beweis. Jede Summe von der Form

$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n}$ (n, k_i ganz und positiv, $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$)

nenne ich eine Teilsumme der Folge (6). Die Tatsache, daß eine Zahl x zu

$$M(a_1, a_2, \ldots) \tag{5}$$

gehört, ist offenbar mit der folgenden Tatsache gleichbedeutend: zu jedem ganzen $n \geqq 1$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Teilsumme

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_m}$$

der Folge (6), die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als Glieder enthält und für welche

$$|a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_m} - x| < \varepsilon.$$

Wenn (5) leer ist, so ist nichts zu beweisen. Sonst wähle ich eine höchstens abzählbare Teilmenge von (5):

$$x_1, x_2, \ldots,$$

die in (5) dicht ist.[3]) Ich konstruiere eine, aus (6) durch

[3]) Vgl. die Fussnote 2).

Umordnung entstehende, Folge $b_1, b_2, \dots$ folgendermaßen:

Ich wähle eine Teilsumme von (6), die das Glied a_1 enthält und sich von x_1 um weniger als 1 unterscheidet; die Glieder dieser Teilsumme bezeichne ich mit

$$b_1, b_2, \dots, b_{k_{1,1}}.$$

Es ist

$$\left|\sum_{i=1}^{k_{1,1}} b_i - x_1\right| < 1.$$

Dann wähle ich eine Teilsumme von (6), die $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots b_{k_{1,1}}$ enthält und sich von x_1 um weniger als $\frac{1}{2}$ unterscheidet; die Glieder dieser Teilsumme darf ich mit

$$b_1, b_2, \dots\dots, b_{k_{2,1}} \quad (k_{2,1} \geq k_{1,1})$$

bezeichnen (die Glieder

$$b_1, b_2, \dots\dots, b_{k_{1,1}}$$

sind bereits bezeichnet worden). Es ist

$$\left|\sum_{i=1}^{k_{2,1}} b_i - x_1\right| < \frac{1}{2}.$$

Nun wähle ich wieder eine Teilsumme von (6), die a_1, a_2, b_i $(1 \leq i \leq k_{2,1})$ als Glieder enthält und sich von x_2 um weniger als $\frac{1}{2}$ unterscheidet; die Glieder dieser Teilsumme darf ich mit

$$b_1, b_2, \dots, b_{k_{2,2}} \quad (k_{2,2} \geq k_{2,1})$$

bezeichnen. Im allgemeinen, wenn die Zahlen

$$b_1, b_2, \dots b_{k_{n-1,n-1}}$$

bereits gewählt sind, wähle ich die Zahlen $k_{n,1}, k_{n,2}, \dots\dots, k_{n,n}$ und die Zahlen b_i $(k_{n-1,n-1} < i \leq k_{n,n})$ so, daß

1. $k_{n-1,n-1} < k_{n,1} < k_{n,2} < \dots < k_{n,n}$.

2. $\sum_{j=1}^{k_{n,i}} b_j = s_{n,i} \quad (i = 1, 2, \dots n)$

sind Teilsummen von (6) und jede von ihnen enthält $a_1, a_2, \dots\dots a_n$ als Glieder.

3. $|s_{n,i} - x_i| < \frac{1}{n} \; (i = 1, 2, \dots, n)$.

Der Leser wird sich schon selbst überzeugen, daß eine solche Wahl stets möglich ist.

Bei festem i und bei $n \to \infty$ ist $s_{n,i} \to x_i$; $M(b_1 + b_2 + \ldots)$ enthält also alle Punkte $x_1, x_2, \ldots$: und weil $M(b_1 + b_2 + \ldots)$ abgeschlossen ist, so ist notwendig $M(b_1 + b_2 + \ldots) = M(a_1, a_2, \ldots)$. w. z. b. w.

Bei dem Beweis wurde die Menge $x_1, x_2, \ldots$ stillschweigend als unendlich angenommen; wie der Beweis zu modifizieren ist, wenn diese Menge endlich ist, liegt auf der Hand.

Corollar 1. *$M(a_1, a_2, \ldots)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Klar nach Satz 1.

Satz 2. *Wenn x eine Zahl aus $m(a_1, a_2, \ldots)$ ist, und y eine Zahl aus $M(a_1, a_2 \ldots)$, so gehören auch die Zahlen $y + x$ und $y - x$ zu $M(a_1, a_2, \ldots)$.*

Beweis. Es gibt eine (aus $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entstehende) Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ und eine Folge natürlicher Zahlen $k_1 < k_2 < \ldots$, so daß

$$s_{k_n} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_n} \to y.$$

Weiter gibt es eine Folge natürlicher Zahlen $l_1 < l_2 < \ldots$ so daß $b_{l_i} \to x$. Ich ordne die Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ auf zwei Arten um:

1. $b_{l_1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{l_1 - 1} + b_{l_2} + b_{l_1+1} + b_{l_1+2} + \ldots$
$\ldots + b_{l_2 - 1} + b_{l_3} + b_{l_2+1} + \ldots + b_{l_n - 1} + b_{l_{n+1}} + b_{l_n + 1} + \ldots$

2. $b_1 + b_2 + \ldots + b_{l_1 - 1} + b_{l_1+1} + \ldots + b_{l_2 - 1} + b_{l_1} + b_{l_2+1} + \ldots$
$\ldots + b_{l_n - 1} + b_{l_{n-1}} + b_{l_n + 1} + \ldots$

Die Partialsummen der ersten $k_n + 1$ (bzw. $k_n - 1$) der ersten (bzw. zweiten) Reihe sind

$$s_{k_n} + b_{l_i} \to y + x \text{ (bzw. } s_{k_n} - b_{l_{i-1}} \to y - x),$$

wo b_{l_i} das erste, in s_{k_n} nicht auftretende Glied der Folge $b_{l_1}, b_{l_2}, \ldots$ bedeutet. Damit ist Satz 2. bewiesen.

Wenn $a_1, a_2, \ldots$ eine Zahlenfolge ist, so bedeute

$$\mathfrak{M}_1(a_1, a_2, \ldots) \tag{7}$$

den kleinsten, die Menge $m(a_1, a_2, \ldots)$ enthaltenden Modul, d. h. die Menge aller Zahlen

$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \ldots + k_n \alpha_n$ ($n \geq 1$ und ganz, α_i aus $m(a_1, a_2, \ldots)$, k_i ganz):

$$\mathfrak{M}(a_1, a_2, \ldots) \tag{8}$$

sei die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}_1(a_1, a_2, \ldots)$.

Satz 3. *Wenn $M(a_1, a_2, \ldots)$ eine Zahl y enthält, so enthält*

M $(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ auch alle Zahlen $y + x$, wo x eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{M}$ $(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ ist.

Beweis: Klar nach Satz 2. und Corrollar 1.

§ 3. Über $\mathfrak{M}$ $(a_1, a_2, \ldots)$.

Ich werde oft folgende Darstellung komplexer Zahlen benutzen: wenn ι_1, ι_2 zwei von Null verschiedene Zahlen sind und $\frac{\iota_1}{\iota_2}$ nicht reell, so läßt sich jede komplexe Zahl x in der Form

$$x = A_1\iota_1 + A_2\iota_2 \, (A_1, A_2 \text{ reell})$$

schreiben, und zwar nur auf eine Art. Den Beweis darf ich wohl unterdrücken.

In dem Rest dieser Abhandlung werde ich immer voraussetzen, daß die Folge

$$a_1, a_2, \ldots . \tag{6}$$

um welche es sich handelt, **beschränkt** ist, ohne es stets ausdrücklich zu betonen. Also ist — nach dem Satz von Bolzano Weierstraß —

$$m \, (a_1, a_2, \ldots\ldots) \tag{9}$$

nicht leer. Es sind nun folgende drei Fälle möglich:

I. (9) enthält nur die einzige Zahl Null (d. h. $a_n \rightarrow 0$)

II. (9) enthält mindestens eine von Null verschiedene Zahl; es gibt aber eine Zahl σ, so daß alle Zahlen von (9) die Form $r\sigma$ (r reell) haben. Hier sind noch zwei Unterfälle möglich:

IIa. Es gibt eine Zahl ϱ', so daß alle Zahlen von (9) die Form $k\varrho'$, (k ganz) haben.

IIb. Der Fall IIa tritt nicht ein.

III. (9) enthält zwei von Null verschiedene Zahlen, deren Quotient nicht reell ist. Drei Unterfälle sind möglich:

IIIa. Es gibt zwei Zahlen σ_1, σ_2, so daß jede Zahl aus (9) die Form $k\sigma_1 + l\sigma_2$ (k, l ganz) hat.

IIIb. Der Fall IIIa tritt nicht ein; es gibt aber zwei Zahlen σ_1, σ_2, so daß jede Zahl aus (9) die Form $k\sigma_1 + r\sigma_2$ (k ganz, r reell) hat.

IIIc. Es tritt weder IIIa noch IIIb ein.

Wie sieht in diesen Fällen

$$\mathfrak{M} \, (a_1, a_2, \ldots\ldots) \tag{8}$$

aus?

Fall I. H i e r b e s t e h t (8) a u s d e r e i n z i g e n Z a h l 0.

Fall IIa. Wegen der Beschränktheit von (6) gibt es in (9) nur endlich viele Zahlen*): $k_1\varrho'$, $k_2\varrho'$, ... $k_n\varrho'$. Es sei δ der größte gemeinsame Teiler von $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$; es sei $\varrho = \varrho' \cdot \delta$. Dann enthält (8) die Zahl ϱ (da die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} k_i l_i = \delta$ in ganzen l_i lösbar ist) und also ist (8) genau die Menge aller Zahlen $k\varrho$ (k ganz und sonst beliebig).

Fall IIb. Ich wähle eine Zahl $\alpha_1 \neq 0$ aus (9). Zu jedem ganzen $n \geqq 2$ gibt es eine Zahl α_n aus (9), so daß der (reelle) Quotient $\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ nicht in der Form $\frac{p}{n!}$ (p ganz) darstellbar ist; denn sonst wären alle Zahlen aus (9) von der Form

$$p \cdot \varrho' \left(\varrho' = \frac{\alpha_1}{n!},\ p \text{ ganz}\right).$$

Ich wähle die ganzen Zahlen p_n, q_n so, daß

$$1 \leqq q_n \leqq n, \quad \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_1} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n}\ ^{4}).$$

Die Zahl $\alpha_n' = \alpha_n q_n - \alpha_1 p_n$ gehört zu

$$\mathfrak{M}_1\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots) \tag{7}$$

und es ist offenbar

$$0 < |\alpha_n'| < \frac{|\alpha_1|}{n}.$$

Also enthält (7) beliebig kleine, von Null verschiedene Zahlen. Da (7) ein Modul von Zahlen der Form $r\sigma$ (r reell) ist, so ist (7) auf der „Geraden“ $r\sigma$ (r reell) überall dicht; seine abgeschlossene Hülle, d. h. (8), ist also genau die Menge aller Zahlen $r\sigma$ (r reell).

Fall IIIa. Alle Zahlen von (8)[5] sind von der Form $k\sigma_1 + l\sigma_2$ (k, l ganz). Ich wähle zwei Zahlen

$$\varrho_1 = K_1\sigma_1 + L_1\sigma_2, \quad \varrho_2 = K_2\sigma_1 + L_2\sigma_2$$

aus (8) so, daß $\Delta = K_1L_2 - K_2L_1 \neq 0$ und die ganze Zahl $|\Delta|$ dabei möglichst klein ausfällt. Jede Zahl $k\sigma_1 + l\sigma_2$ von (8) hat die Form $x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2$, wo

$$x_1 = \frac{L_2k - K_2l}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{K_1l - L_1k}{\Delta}.$$

---

[4]) Vgl. z. B. H. Minkowski, Diophantische Approximationen (Leipzig, B. G. Teubner, 1907), S. 8, Satz III'.

[5]) Es ist hier offenbar (7) = (8).

*) Die griechischen Buchstaben sind lauter etwas tiefer gesetzt; ich bitte den Leser, sich dadurch nicht stören lassen.

Ich behaupte: x_1, x_2 sind ganz. Denn gesetzt, es wäre z. B. $x_2 = a + \frac{b}{\Delta}$ (a, b ganz, $1 \leq b < |\Delta|$). Die Zahl $k_0\sigma_1 + l_0\sigma_2 = (-k + aK_2)\,\sigma_1 + (-l + aL_2)\,\sigma_2$ gehört zu (8): es ist aber $k_0L_1 - l_0K_1 = b$, also $0 < |k_0L_1 - l_0K_1| < |\Delta|$, was der Wahl von Δ widerspricht. Daraus folgt sofort, daß (8) genau die Menge aller Zahlen $k\varrho_1 + l\varrho_2$ (k, l ganz und sonst beliebig) ist.

Offenbar ist $\varrho_1\varrho_2 \neq 0$ und $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ nicht reell.

Fall IIIb. Wenn wir alle Zahlen von (9) in der Form $k\sigma_1 + r\sigma_2$ (k ganz, r reell) schreiben, so nimmt die ganze Zahl k nur endlich viele Werte $k_1, k_2, \ldots, k_n$ an, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als teilerfremd voraussetzen dürfen. Daraus sieht man, daß (7) eine Zahl ϱ_1 von der Form $\varrho_1 = \sigma_1 + r_0\sigma_2$ (r_0 reell) enthält. Jede Zahl aus (7) läßt sich dann auch in der Form $k\varrho_1 + r\varrho_2$ schreiben ($\varrho_2 = \sigma_2$, k ganz, r reell). Es gibt eine Zahl $\alpha_1 = k_1\varrho_1 + r_1\varrho_2$ in (9), so daß $r_1 \neq 0$. Zu jedem ganzen $n \geq 2$ gibt es in (9) eine Zahl $\alpha_n = k_n\varrho_1 + r_n\varrho_2$ (k_n ganz, r_n reell), so daß sich $\frac{r_n}{r_1}$ nicht in der Form $\frac{p}{n!}$ (p ganz) schreiben läßt (sonst würde der Fall IIIa vorliegen). Wir bestimmen zwei ganze Zahlen p_n, q_n mit

$$1 \leq q_n \leq n, \quad \left|\frac{r_n}{r_1} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n n}.$$

Die Zahl

$$\alpha_n' = q_n\alpha_n - p_n\alpha_1 + (p_nk_1 - q_nk_n)\,\varrho_1 = (r_nq_n - r_1p_n)\,\varrho_2$$

liegt in (7), und es ist

$$0 < |\alpha_n'| < \frac{|r_1|}{n}|\varrho_2|.$$

$\mathfrak{M}_1$ liegt also überall dicht auf der Geraden $r\varrho_2$ (r reell). Daraus folgt sofort, daß (8) genau die Menge aller Zahlen $k\varrho_1 + r\varrho_2$ (k ganz, r reell) ist.

Fall IIIc. Es seien α_1, α_2 zwei von Null verschiedene Zahlen aus (9), deren Quotient nicht reel ist. Zu jedem ganzen $n \geq 3$ gibt es in (9) eine Zahl α_n, die nicht in der Form $\frac{p}{n!}\alpha_1 + \frac{q}{n!}\alpha_2$ mit ganzen p, q darstellbar ist; sonst würde der Fall IIIa vorliegen. Es sei $\alpha_n = k_n\alpha_1 + l_n\alpha_2$ (k_n, l_n reell). Wir wählen drei ganze Zahlen p_n, q_n, r_n so, daß[6])

---

[6]) A. a. O. [1]).

$$1 \leq r_n < n, \left| k_n - \frac{p_n}{r_n} \right| < \frac{1}{r_n(\sqrt{n}-1)}, \left| l_n - \frac{q_n}{r_n} \right| < \frac{1}{r_n(\sqrt{n}-1)}.$$

Die Zahl $\alpha_n' = r_n\alpha_n - p_n\alpha_1 - q_n\alpha_2 = (r_nk_n - p_n)\alpha_1 + (r_nl_n - q_n)\alpha_2$ ist in (7) enthalten und es ist

$$0 < |\alpha_n'| < \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{\sqrt{n}-1}.$$

Wir halten nun n fest. Die Zahlen $\frac{\alpha_n'}{\alpha_1}, \frac{\alpha_n'}{\alpha_2}$ sind nicht beide reell; es sei z. B. $\frac{\alpha_n'}{\alpha_1}$ nicht reell (sonst vertausche ich in der folgenden Überlegung α_1 und α_2). Jede Zahl läßt sich dann in der Form $t\alpha_1 + s\alpha_n'$ schreiben (t, s reell). Es gibt in (9) eine Zahl $\beta_1^n = t_1^n\alpha_1 + s_1^n\alpha_n'$ mit $t_1^n \neq 0$.[7] Zu jedem ganzen $m \geq 2$ gibt es in (9) eine Zahl

$$\beta_m^n = t_m^n\alpha_1 + s_m^n\alpha'_n,$$

so daß $\frac{t_m^n}{t_1^n}$ nicht die Form $\frac{p}{m!}$ (p ganz) hat; sonst würde nämlich der Fall IIIb vorliegen. Wir setzen m_n gleich der kleinsten ganzen Zahl, die größer als 1 und $\sqrt{n}\,|t_1^n|$ ist, und wählen die ganzen Zahlen x_n, ϱ_n so, daß

$$1 \leq \varrho_n \leq m_n, \left| \frac{t_{m_n}^n}{t_1^n} - \frac{x_n}{\varrho_n} \right| < \frac{1}{\varrho_n m_n}.$$

Wir setzen nun

$$\gamma_n = \varrho_n\beta_{m_n}^n - x_n\beta_1^n = (\varrho_n t_{m_n}^n - x_n t_1^n)\alpha_1 + R_n\alpha_n'$$

(R_n reell). Der Koeffizient von α_1 ist $\neq 0$. Endlich sei $R_n = g_n + h_n$ (g_n ganz, $0 \leq h_n < 1$) und $\gamma_n' = \gamma_n - g_n\alpha_n'$. Es ist also γ_n' eine Zahl aus (7), und es ist

$$0 < |\gamma_n'| < \frac{|t_1^n|}{m_n}|\alpha_1| + |\alpha_n'| < \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{n}} + \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{\sqrt{n}-1} < 2\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{\sqrt{n}-1};$$

weiter ist $\frac{\gamma_n'}{\alpha_n'}$ nicht reell. In jedem Kreise mit dem Radius $3\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{\sqrt{n}-1}$ liegt also mindestens ein Punkt $k\alpha_n' + l\gamma_n'$ (k, l ganz).

---

[7]) t_m^n, s_m^n sollen reelle Zahlen bedeuten; die oben angehängten Zahlen sollen in der ganzen Abhandlung Indizes, keine Exponenten bedeuten. Nur e^x soll die Exponentialfunktion bedeuten, und zwar mit rein imaginärem Exponenten; wenn ich also e^{iq} schreibe, so ist q reell, auch wenn ich es nicht ausdrücklich bemerke.

Wegen der Willkürlichkeit von n ist (7) überall dicht und (8) ist die Menge aller komplexen Zahlen.

§ 4. Der Begriff des Divergenzhalbstrahls.

Die Hilfssätze dieses § sind bereits bekannt[8]). Ich sage, eine Zahl a liege im Winkel (α, β), wenn $\alpha < \beta$ und $a = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$. Unter dem „Halbstrahl $[\varphi]$" verstehe ich die Menge aller Zahlen $re^{i\varphi}$ $(r \geqq 0)$. Ich führe noch folgende Definition ein:

Ein Halbstrahl $[\varphi]$ soll Divergenzhalbstrahl[9]) einer Reihe $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$ heißen, wenn für jedes $\delta > 0$ diejenigen Glieder der Reihe $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$, die im Winkel $(\varphi - \delta, \varphi + \delta)$ liegen, eine unendliche Reihe bilden, die nicht absolut konvergiert. Wenn also $b_1^\delta, b_2^\delta, \ldots\ldots$ diejenigen Gleder der Reihe $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$ sind, die im Winkel $(\varphi - \delta, \varphi + \delta)$ liegen, so soll die Reihe $|b_1^\delta| + |b_2^\delta| +$ divergieren.

Wir wollen noch folgende Bezeichnungen einführen: wenn eine Reihe $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$ absolut konvergiert, so schreiben wir dafür

$$(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Analog soll

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

bedeuten: die Reihe $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$ divergiert, bzw. $a_n > 0$ für alle ganzen $n \geqq 1$. Wir werden auch mehrere solche Symbole miteinander verknüpfen: so soll z. B.

$$(\mathfrak{DP}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

bedeuten: es ist $a_n > 0$ und $a_1 + a_2 + \ldots$ divergiert. Endlich: wenn $c = a + bi$ (a, b reell), so schreibe ich $a = \mathfrak{R}(c)$, $b = \mathfrak{J}(c)$.

Hilfssatz 1. *Es mögen alle Glieder a_n der Reihe*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{10}$$

von der Form sein $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$ $(\alpha \leqq \varphi_n \leqq \beta,\ r_n \geqq 0)$; und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

[8]) Z. B. G. Pólya — G. Szegö, Aufgaben u. Lehrsätze aus d. Analysis I, S. 93; E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme (Fortsetzung), Journal für die reine u. angew. Math., 114 (1914), S. 1—40.

[9]) Kurz Dhs.

sei divergent. Dann besitzt die Reihe $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$ *einen Divergenzhalbstrahl* $[\varphi]$ *mit* $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$.

Beweis: Mindestens ein von den beiden Winkeln $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ hat folgende Eigenschaft: diejenigen Glieder der Reihe (10), die in diesem Winkel liegen, bilden eine Reihe, die nicht absolut konvergent ist. Diesen Winkel[10]) bezeichne ich mit (α_1, β_1). Mindestens ein von den Winkeln $\left(\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1\right)$ hat wieder die Eigenschaft, daß die Reihe der in ihm liegenden Glieder von (10) nicht absolut konvergiert: diesen Winkel bezeichne ich mit (α_2, β_2). So fortfahrend, bekomme ich zwei Folgen reeller Zahlen: $\alpha \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots\ldots$; $\beta \geqq \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots\ldots$; $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta-\alpha}{2^n}$. Es sei $\varphi = \lim\limits_{n=\infty} \alpha_n$; dann ist $[\varphi]$ offenbar ein Dhs. der Reihe (10) mit $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$.

Hilfssatz 2. *Die Menge aller Divergenzhalbstrahlen einer Reihe ist abgeschlossen.*

Das soll bedeuten: wenn $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$, …… Dhs. einer Reihe sind und $\varphi_n \to \varphi$, so ist auch $[\varphi]$ Dhs. der Reihe.

Beweis. Klar nach der Definition.

Hilfssatz 3. *Es sei* $[\varphi]$ *ein Dhs. der Reihe*

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots \tag{10}$$

Dann kann man aus der Folge $a_1, a_2, \ldots\ldots$ *eine Teilfolge* $b_1, b_2, \ldots$ *herausgreifen, so daß*

$$(\mathfrak{DP}): \sum_{n=1}^{\infty} \Re(b_n e^{-i\varphi}); \quad (\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \Im(b_n e^{-i\varphi}); \quad \frac{\Im(b_n e^{-i\varphi})}{\Re(b_n e^{-i\varphi})} \to 0.$$

Beweis: Es ist $|a_n| < K$ für $n = 1, 2, \ldots\ldots$ Ich nehme von den im Winkel $\left(\varphi - \frac{\pi}{4}, \varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ liegenden Gliedern der Reihe (10) vom Anfang an so viele, bis zuerst die Summe ihrer absoluten Beträge größer als K wird: diese Glieder bezeichne ich mit b_1, $b_2, \ldots\ldots b_{k_1}$. Wegen $|a_n| < K$ ist also

$$K < \sum_{n=1}^{k_1} |b_n| \leqq 2\,K \qquad \text{(Erster Schritt).}$$

---

[10]) Eventuell einen von beiden, wenn beide Winkel diese Eigenschaft besitzen; z. B. den Winkel $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Dann nehme ich von den bisher nicht verbrauchten und im Winkel $\left(\varphi - \frac{\pi}{8}, \varphi + \frac{\pi}{8}\right)$ liegenden Gliedern von (10) vom Anfang an so viele, bis zuerst die Summe ihrer absoluten Beträge größer als K wird: diese Glieder bezeichne ich mit $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots b_{k_2}$. Es ist also

$$K < \sum_{n=k_1+1}^{k_2} |b_n| < 2K \qquad \text{(Zweiter Schritt).}$$

Der $(m+1)$—te Schritt sieht so aus: die Zahlen k_j $(j \leqq m)$ und b_n $(n \leqq k_m)$ mögen bereits definiert sein. Ich nehme von den bisher nicht verbrauchten, im Winkel $\left(\varphi - \frac{\pi}{2^{m+2}}, \varphi + \frac{\pi}{2^{m+2}}\right)$ liegenden Gliedern von (10) vom Anfang an so viele, bis zuerst die Summe ihrer absoluten Beträge größer als K wird: diese Glieder bezeichne ich mit $b_{k_m+1}, b_{k_m+2}, \ldots b_{k_{m+1}}$. Es ist also

$$K < \sum_{n=k_m+1}^{k_{m+1}} |b_n| < 2K.$$

Es ist offenbar

$$\Re(b_n e^{-i\varphi}) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} |b_n| \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$|\Im(b_n e^{-i\varphi})| \leqq tg \frac{\pi}{2^{m+2}} \Re(b_n e^{-i\varphi}) \sim \frac{\pi}{2^{m+2}} \Re(b_n e^{-i\varphi})$$

$$(k_m + 1 \leqq n \leqq k_{m+1});$$

also
$$\sum_{n=k_m+1}^{k_{m+1}} |\Im(b_n e^{-i\varphi})| < \frac{K\pi}{2^m}$$

für $m > m_0$.

Aus diesen Ungleichungen folgt aber, daß die Folge $b_1, b_2, \ldots$ alle verlangten Eigenschaften besitzt.

§ 5. Wann ist M $(a_1, a_2 \ldots)$ leer.

Wenn a reell ist, so schreibe ich pos $a = a$, neg $a = 0$ für $a \geqq 0$ und pos $a = 0$, neg $a = a$ für $a < 0$. Ich führe noch folgende Definition ein: Eine Folge $d_1, d_2, \ldots$ erfüllt die Bedingung B, wenn für jedes reelle φ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \Re(d_n e^{-i\varphi}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{neg}\, \Re(d_n e^{-i\varphi})$$

entweder beide konvergieren oder beide divergieren.

Dann gilt folgender

Satz 4. $$M\ (a_1,\ a_2, \ldots) \tag{5}$$
ist dann und nur dann nicht leer, wenn die Folge
$$a_1,\ a_2, \ldots \tag{6}$$
die Bedingung B erfüllt.

Beweis der Notwendigkeit: wäre z. B.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re (a_n e^{-i\varphi_0}) \text{ konvergent, } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \Re (a_n e^{-i\varphi_0})$$
divergent, so wäre, wenn $b_1 + b_2 + \ldots$ eine beliebige aus $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entstehende Reihe ist,
$$\sum_{n=1}^{N} \Re (a_n e^{-i\varphi_0}) \to -\infty,$$
d. h. $M\ (b_1 + b_2 + \ldots)$ wäre leer, w. z. b. w.

Zugleich mit dem — viel schwierigeren — Beweis, daß die Bedingung B hinreichend ist, werden wir einen, für den folgenden § wichtigen Zusatz beweisen.

Wir wollen also im Rest dieses § voraussetzen, daß die (beschränkte) Folge (6) die Bedingung B erfüllt. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

α) $$(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

β) $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, es gibt aber ein reelles φ_0, so daß
$$(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Re (a_n e^{-i\varphi_0}).$$

γ) Es ist $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\Re (a_n e^{-i\varphi})|$ für jedes reelle φ.

Der Zusatz lautet:

Zusatz: *Wenn (6) die Bedingung B erfüllt und darüber hinaus noch $a_n \to 0$, so behaupte ich:*

Im Falle α) enthält $M\ (a_1,\ a_2, \ldots)$ einen einzigen Punkt.

Im Falle β) gibt es eine Zahl A, so daß $M\ (a_1, a_2, \ldots)$ genau die Menge aller Zahlen $A + re^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$ ist (r durchläuft alle reellen Zahlen).

Im Falle γ) ist $M\ (a_1,\ a_2, \ldots)$ die Menge aller komplexen Zahlen.

Der Fall α) ist trivial.

Beweis der Hinlänglichkeit der Bedingung B im Fall β). Es ist

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re \left(a_n e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right), \ (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \Re \left(a_n e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right);$$

denn sonst wären diese beiden Reihen konvergent (Bedingung B!) und also $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Es seien $b_1, b_2, \ldots\ldots$ diejenigen Glieder aus

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots, \tag{10}$$

für welche $\Re \left(a_n e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) \geqq 0$; die übrigen Glieder aus (10) bezeichne ich mit $c_1, c_2, \ldots\ldots$

Es sei nun r eine beliebige reelle Zahl; ich ordne die Reihe (10) folgendermaßen um: zuerst kommen so viele Glieder $b_1, b_2, \ldots\ldots b_{k_1}$ $(k_1 \geqq 1)$, bis zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_1} \Re \left(b_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) > r;$$

dann so viele Glieder $c_1, c_2, \ldots\ldots c_{l_1}$, bis zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_1} \Re \left(b_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) + \sum_{j=1}^{l_1} \Re \left(c_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) < r;$$

dann wieder so viele Glieder $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots\ldots, b_{k_2}$, bis zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_2} \Re \left(b_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) + \sum_{j=1}^{l_1} \Re \left(c_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) > r;$$

dann so viele Glieder $c_{l_1+1}, c_{l_1+2}, \ldots\ldots, c_{l_2}$, bis zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_2} \Re \left(b_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) + \sum_{j=1}^{l_2} \Re \left(c_j e^{-i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}\right) < r$$

und so weiter. Die Summe der ersten $k_n + l_n$ Glieder der umgeordneten Reihe hat offenbar die Form

$$e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} r + e^{i\varphi_0} \sum_{j=1}^{\infty} \Re \left(a_j e^{-i\varphi_0}\right) + \Theta_n + \varepsilon_n, \tag{11}$$

wo $|\Theta_n| \leqq |c_{l_n}|$, $\varepsilon_n \to 0$. Die Folge der Zahlen (11) für $n = 1, 2, \ldots$ ist beschränkt, besitzt also mindestens einen Häufungswert, der freilich zu $M(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ gehört; also ist (5) nicht leer, w. z. b. w.

Was den Zusatz betrifft: wenn überdies $a_n \to 0$, so konvergieren die Zahlen (11) gegen

$$e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} r + e^{i\varphi_0} \sum_{j=1}^{\infty} \Re \left(a_j e^{-i\varphi_0}\right);$$

also gehört jede solche Zahl (bei beliebigem reellem r) zu (5): aber es hat offenbar auch jede Zahl von (5) die Form

$$e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} r + e^{i\varphi_0} \sum_{j=1}^{\infty} \Re\left(a_j e^{-i\varphi_0}\right)$$

(r reell), da die Summe der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Re\left(a_j e^{-i\varphi_0}\right)$$

durch Umordnungen nicht geändert wird. Damit ist auch der Zusatz im Fall β bewiesen.

Beweis der Hinlänglichkeit der Bedingung B im Falle γ.

Es ist hier offenbar

$$(\mathfrak{D}) : \sum \text{pos } \Re\left(a_j e^{-i\varphi}\right)$$

für jedes reelle φ: die Glieder der Reihe (10), die im Winkel $\left(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ liegen, bilden also eine Reihe, die nicht absolut konvergiert. Also enthält (nach Hfs. 1.) der Winkel $\left(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ mindestens einen Dhs. der Reihe (10); d. h. jeder Winkel von der Öffnung π enthält mindestens einen Dhs. von (10).

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall γ': Es gibt einen Dhs. $[\varphi_0]$ von (10), so daß auch $[\varphi_0 + \pi]$ Dhs. von (10) ist.

Fall γ'': Der Fall γ' tritt nicht ein.

Fall γ': Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi_0 = 0$ (sonst drehe ich um $-\varphi_0$). Ich wähle aus $a_1, a_2, \ldots$ zwei Teilfolgen

$$b_1, b_2, \ldots; \; c_1, c_2, \ldots \tag{12}$$

so daß

$$(\mathfrak{DP}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Re(b_n); \; (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Im(b_n); \; (\mathfrak{DP}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Re(-c_n); \; (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Im(c_n).$$

Die in (12) nicht enthaltenen Glieder a_n mit $\Im(a_n) \geqq 0$ bezeichne ich mit $d_1, d_2 \ldots$ und diejenigen mit $\Im(a_n) < 0$ mit $f_1, f_2 \ldots$. Es ist offenbar

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Im(d_n); \; (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Im(f_n).$$

Es sei A eine beliebige komplexe Zahl; ich setze

$$A = a + bi + i \sum_{n=1}^{\infty} \Im(b_n) + i \sum_{n=1}^{\infty} \Im(c_n) \; (a, b \text{ reell}).$$

Ich ordne die Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$ folgendermaßen um:

Erstens: Zuerst nehme ich $d_1, d_2, \ldots d_{k_1}$ $(k_1 \geqq 1)$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{J}(d_j) > b;$$

dann $f_1, f_2 \ldots f_{l_1}$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{J}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_1} \mathfrak{J}(f_j) < b;$$

dann $b_1, b_2, \ldots, b_{p_1}$ $(p_1 \geqq 1)$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{R}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_1} \mathfrak{R}(f_j) + \sum_{j=1}^{p_1} \mathfrak{R}(b_j) > a;$$

dann $c_1, c_2, \ldots c_{q_1}$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{R}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_1} \mathfrak{R}(f_j) + \sum_{j=1}^{p_1} \mathfrak{R}(b_j) + \sum_{j=1}^{q_1} \mathfrak{R}(c_j) < a.$$

Zweitens: ich nehme $d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \ldots, d_{k_2}$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_2} \mathfrak{J}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_1} \mathfrak{J}(f_j) > b;$$

dann $f_{l_1+1}, \ldots, f_{l_2}$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_2} \mathfrak{J}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_2} \mathfrak{J}(f_j) < b;$$

dann $b_{p_1+1}, \ldots, b_{p_2}$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_2} \mathfrak{R}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_2} \mathfrak{R}(f_j) + \sum_{j=1}^{p_2} \mathfrak{R}(b_j) + \sum_{j=1}^{q_1} \mathfrak{R}(c_j) > a;$$

und dann $c_{q_1+1}, \ldots, c_{q_2}$ so, daß zuerst

$$\sum_{j=1}^{k_2} \mathfrak{R}(d_j) + \sum_{j=1}^{l_2} \mathfrak{R}(f_j) + \sum_{j=1}^{p_2} \mathfrak{R}(b_j) + \sum_{j=1}^{q_2} \mathfrak{R}(c_j) < a.$$

Und so weiter. Die Summe der ersten $k_n + l_n + p_n + q_n$ Glieder der umgeordneten Reihe hat offenbar die Gestalt

$$a + bi + i \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{J}(b_j + c_j) + \Theta_n + \varepsilon_n = A + \Theta_n + \varepsilon_n, \tag{13}$$

wo $$|\Theta_n| \leqq |f_{l_n}| + |c_{q_n}|, \quad \varepsilon_n \to 0;$$

die Zahlen (13) sind beschränkt, besitzen also mindestens einen Häufungswert, der zu (5) gehört; w. z. b. w.

Was den Zusatz betrifft: wenn $a_n \to 0$, so konvergieren die Zahlen (13) gegen die (beliebig gewählte) Zahl A; also ist auch der Zusatz im Falle γ' bewiesen.

Fall γ''. Es sei $[\varphi_0]$ ein Dhs. der Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$; dann ist $[\varphi_0 + \pi]$ kein Dhs. Es sei $[\varphi_1]$ derjenige Dhs. mit $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_0 + \pi$, für welchen φ_1 möglichst groß ist (es gibt einen solchen nach Hfs. 2); $[\varphi_2]$ sei derjenige Dhs. mit $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_0 - \pi$, für welchen φ_2 möglichst klein ist[11]). Im Winkel $(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi)$ gibt es außer $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ keinen Dhs; also ist $\varphi_2 + 2\pi - \varphi_1 < \pi$; daher ist $0 < \varphi_1 - \varphi_0 < \pi$, $0 < \varphi_2 + 2\pi - \varphi_1 < \pi$, $0 < \varphi_0 - \varphi_2 < \pi$. Ich behaupte: jede komplexe Zahl $a + bi$ (a, b reell) läßt sich in de Form

$$a + bi = \alpha_0 e^{i\varphi_0} + \alpha_1 e^{i\varphi_1} + \alpha_2 e^{i\varphi_2} \tag{14}$$

mit positiven α_0, α_1, α_2 schreiben. Denn (14) ist mit

$$\alpha_0 = \frac{a \sin\varphi_1 - b\cos\varphi_1 + \alpha_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)},$$

$$\alpha_1 = \frac{a \sin\varphi_0 - b\cos\varphi_0 + \alpha_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_0)}{-\sin(\varphi_1 - \varphi_0)}$$

gleichbedeutend. Es genügt also, α_2 positiv und hinreichend groß zu wählen, damit auch α_0. α_1 positiv ausfallen. Wir wählen aus (6) drei Teilfolgen b_1, $b_2, \ldots$; c_1, $c_2, \ldots$; d_1, $d_2, \ldots$ so daß

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(b_n e^{-i\varphi_0}); \; (\mathfrak{D}\mathfrak{P}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(c_n e^{-i\varphi_1}); \; (\mathfrak{D}\mathfrak{P}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(d_n e^{-i\varphi_2})$$

$$(\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}(b_n e^{-i\varphi_0}); \; (\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}(c_n e^{-i\varphi_1}); \; (\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}(d_n e^{-i\varphi_2}).$$

Ich wähle diese drei Teilfolgen noch so, daß jedes Glied von (6) in höchstens einer von ihnen auftritt und daß die Folge (6) noch unendlich viele Glieder enthält, die in keiner von diesen drei Teilfolgen auftreten[12]); diese letzten Glieder von (6)

---

[11]) Der Leser möge sich eine schematische Figur zeichnen.

[12]) Wenn die ursprünglich gewählten Teilfolgen $(b_n): b_1, b_2, \ldots$; $(c_n): c_1, c_2, \ldots$, $(d_n): d_1, d_2, \ldots$ der letzten Bedingung nicht genügen, kann ich folgendermaßen verfahren: Ich nehme aus (6) so viele Glieder der Folge (b_n) — ich bezeichne sie mit $B_1, B_2, \ldots B_{k_1}$ — bis zuerst $\sum_1^{k_1} \mathfrak{R}(B_n e^{-i\varphi_0}) > 1$; dann nehme ich von den bisher nicht verbrauchten Gliedern von (6) vom Anfang an so viele Glieder aus (c_n) — ich bezeichne sie mit $C_1, \ldots C_{l_1}$ — bis zuerst $\sum_1^{l_1} \mathfrak{R}(C_n e^{-i\varphi_1}) > 1$: dann von den bisher nicht verbrauchten Gliedern von (6) vom Anfang an so viele Glieder aus (d_n); $D_1, \ldots D_{m_1}$, bis zuerst $\sum_1^{m_1} \mathfrak{R}(D_n e^{-i\varphi_2}) > 1$; das erste bisher nicht verbrauchte Glied von (6) bezeichne ich mit f_1. Dann nehme ich (immer von den bisher nicht verbrauchten Gliedern von (6)) erstens so viele Glieder B_{k_1+1}.

bezeichne ich mit $f_1, f_2, \dots\dots$ Es sei A eine beliebige Zahl: ich setze

$$A' = A - e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(b_n e^{-i\varphi_0}) - e^{i\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(c_n e^{-i\varphi_1}) -$$
$$- e^{i\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(d_n e^{-i\varphi_2}).$$

Ich ordne die Reihe (10) folgendermaßen um.

Erstens: Ich bestimme die positiven Zahlen $\varkappa_0, \lambda_0, \mu_0$ so, daß

$$A' - f_1 = \varkappa_0 e^{i\varphi_0} + \lambda_0 e^{i\varphi_1} + \mu_0 e^{i\varphi_2}$$

und nehme zuerst f_1, dann $b_1, b_2, \dots\dots, b_{k_1}$; $c_1, c_2, \dots\dots c_{l_1}$; $d_1, d_2, \dots\dots, d_{p_1}$, wo k_1, l_1, p_1 so gewählt sind, daß zuerst

$$\beta_1 = \sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{R}(b_j e^{-i\varphi_0}) > \varkappa_0,\ \gamma_1 = \sum_{j=1}^{l_1} \mathfrak{R}(c_j e^{-i\varphi_1}) > \lambda_0,\ \delta_1 = \sum_{j=1}^{p_1} \mathfrak{R}(d_j e^{-i\varphi_2}) > \mu_0.$$

Zweitens: Ich bestimme die positiven Zahlen $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ so, daß

$$A' - f_1 - f_2 - e^{i\varphi_0}\beta_1 - e^{i\varphi_1}\gamma_1 - e^{i\varphi_2}\delta_1 = \varkappa_1 e^{i\varphi_0} + \lambda_1 e^{i\varphi_1} + \mu_1 e^{i\varphi_2}$$

und nehme zuerst f_2, dann $b_{k_1+1}, \dots\dots b_{k_2}$; $c_{l_1+1}, \dots\dots c_{l_2}$; $d_{p_1+1}, \dots\dots, d_{p_2}$, wo k_2, l_2, p_2 so gewählt sind, daß zuerst

$$\beta_2 = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \mathfrak{R}(b_j e^{-i\varphi_0}) > \varkappa_1, \gamma_2 = \sum_{j=l_1+1}^{l_2} \mathfrak{R}(c_j e^{-i\varphi_1}) > \lambda_1, \delta_2 = \sum_{j=p_1+1}^{p_2} \mathfrak{R}(d_j e^{-i\varphi_2}) > \mu_1.$$

$(n+1)$ — ter Schritt: nachdem die Zahlen k_i, l_i, p_i $(i \leqq n)$ bereits gewählt sind, wähle ich die positiven Zahlen $\varkappa_n, \lambda_n, \mu_n$ so, daß

$$A' - f_1 - f_2 - \dots\dots - f_{n+1} - e^{i\varphi_0} \sum_{j=1}^{k_n} \mathfrak{R}(b_j e^{-i\varphi_0}) - e^{i\varphi_1} \sum_{j=1}^{l_n} \mathfrak{R}(c_j e^{-i\varphi_1}) -$$
$$- e^{i\varphi_2} \sum_{j=1}^{p_n} \mathfrak{R}(d_j e^{-i\varphi_2}) = \varkappa_n e^{i\varphi_0} + \lambda_n e^{i\varphi_1} + \mu_n e^{i\varphi_2}$$

und nehme zuerst f_{n+1}, dann $b_{k_n+1}, \dots\dots, b_{k_{n+1}}$; $c_{l_n+1}, \dots\dots, c_{l_{n+1}}$;

$\dots\dots, B_{k_2}$ aus (b_n), bis zuerst $\sum\limits_{k_1+1}^{k_2} \mathfrak{R}(B_n e^{-i\varphi_0}) > 1$; dann so viele Glieder C_{l_1+1}, $\dots\dots C_{l_2}$ aus (c_n), bis zuerst $\sum\limits_{l_1+1}^{l_2} \mathfrak{R}(C_n e^{-i\varphi_1}) > 1$; dann so viele Glieder $D_{m_1+1}, \dots\dots$, D_{m_2} aus (d_n), bis zuerst $\sum\limits_{m_1+1}^{m_2} \mathfrak{R}(D_n e^{-i\varphi_2}) > 1$; das erste bisher nicht verbrauchte Glied von (6) bezeichne ich mit f_2; usw. Die Folgen $B_1, B_2, \dots\dots$; $C_1, C_2, \dots\dots$; $D_1, D_2, \dots\dots$ haben offenbar die verlangten Eigenschaften.

$d_{p_n+1}, \ldots\ldots, d_{p_{n+1}}$, wo k_{n+1}, l_{n+1}, p_{n+1} so gewählt sind, daß zuerst

$$\sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \Re(b_j e^{-i\varphi_0}) > \varkappa_n, \quad \sum_{j=l_n+1}^{l_{n+1}} \Re(c_j e^{-i\varphi_1}) > \lambda_n, \quad \sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} \Re(d_j e^{-i\varphi_2}) > \mu_n.$$

Die Summe der $(n+1) + k_{n+1} + l_{n+1} + p_{n+1}$ ersten Glieder der umgeordneten Reihe ist also

$$\left.\begin{aligned} & A' - (\varkappa_n e^{i\varphi_0} + \lambda_n e^{i\varphi_1} + \mu_n e^{i\varphi_2}) + e^{i\varphi_0} \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \Re(b_j e^{-i\varphi_0}) + \\ & + e^{i\varphi_1} \sum_{j=l_n+1}^{l_{n+1}} \Re(c_j e^{-i\varphi_1}) + e^{i\varphi_2} \sum_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} \Re(d_j e^{-i\varphi_2}) + \\ & + i\,[e^{i\varphi_0} \sum_{j=1}^{k_{n+1}} \Re(b_j e^{-i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}) + e^{i\varphi_1} \sum_{j=1}^{l_{n+1}} \Re(c_j e^{-i(\varphi_1+\frac{\pi}{2})}) \\ & + e^{i\varphi_2} \sum_{j=1}^{p_{n+1}} \Re(d_j e^{-i(\varphi_2+\frac{\pi}{2})})] = \\ & = A + \Theta_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, \text{ wo } |\Theta_n| \leqq |b_{k_n}| + |c_{l_n}| + |d_{p_n}|,\ \varepsilon_n \to 0. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die Zahlen (15) sind beschränkt, besitzen also mindestens einen Häufungswert, der zu $M\ (a_1, a_2, \ldots\ldots)$ gehört; w. z. b. w.

Was den **Zusatz** betrifft: wenn dazu noch $a_n \to 0$, so konvergieren die Zahlen (15) gegen die beliebig gewählte Zahl A, die also zu (5) gehört; w. z. b. w.

Damit sind also Satz 4. und sein Zusatz vollständig bewiesen. Wir werden jetzt wieder die im § 3 aufgezählten Fälle I, IIa, IIb, IIIa, IIIb, IIIc trennen und in jedem von diesen sechs Fällen nach der Menge (5) fragen. Dies soll in §§ 6, 8 bis 12 geschehen. In diesen §§ werde ich, ohne es ausdrücklich hervorzuheben, voraussetzen, daß $a_1, a_2, \ldots\ldots$ die Bedingung B erfüllt (und freilich auch, daß diese Folge beschränkt ist).

§ 6. Fall I.

Hier ist $a_n \to 0$. Die Frage nach der Beschaffenheit von $M\ (a_1, a_2, \ldots\ldots)$ wurde bereits durch den Zusatz zu Satz 4, § 5, vollständig erledigt.

§ 7. Zwei Hilfssätze.

Ehe ich zu den weiteren Fällen übergehe, beweise ich zwei Hilfssätze, die uns eine oftmalige Wiederholung derselben Schlußweise ersparen. Der Leser kann diese Hilfssätze zunächst überschlagen und erst an der Stelle, wo sie zitiert werden, auf sie zurückschlagen.

Hilfssatz 4. *Es sei* $a_1, a_2, \ldots$ *eine Zahlenfolge;* $b_1, b_2, \ldots$ *sei eine Teilfolge von* $a_1, a_2, \ldots$; *diejenigen Glieder von* $a_1, a_2, \ldots$, *die in* $b_1, b_2, \ldots$ *nicht enthalten sind, mögen eine Folge* $c_1, c_2, \ldots$ *bilden. Es gebe weiter eine Zahl* a, *eine Folge* $l_1, l_2, \ldots$ *und eine Folge natürlicher Zahlen* $p_1, p_2, \ldots$ *mit* $p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots, p_n \to +\infty$, *so daß*

1. $$\sum_{i=1}^{p_n} b_i = l_n + a + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \to 0)$$

2. Alle Zahlen $-l_n$ *sind in* $M(c_1, c_2, \ldots)$ *enthalten.*

Behauptung: *a ist in $M(a_1, a_2, \ldots)$ enthalten.*

Beweis: Wir wollen zunächst $p_1 < p_2 < \ldots$ voraussetzen. Ich wähle eine Folge von Teilsummen der Folge $c_1, c_2, \ldots$ folgendermaßen:

das n-te Glied dieser Folge soll eine Teilsumme sein, die erstens alle Glieder der vorangehenden Teilsumme, zweitens $c_1, c_2, \ldots, c_n$ als Glieder enthält; weiter soll dieses n-te Glied dieser Folge von Teilsummen wenigstens ein Glied von $c_1, c_2, \ldots$ enthalten, welches in der vorangehenden Teilsumme nicht enthalten ist; und endlich soll sich diese Teilsumme von $-l_n$ um weniger als $\frac{1}{n}$ unterscheiden (vgl. eine ähnliche Schlußweise beim Beweis des Satzes 1, § 2). Ich darf also die Glieder dieser n-ten Teilsumme mit $d_1, d_2, \ldots d_{k_n}$ $(1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots)$ bezeichnen. Bei der, aus $a_1 + a_2 + \ldots$ durch Umordnung entstehenden Reihe

$$\begin{gathered} b_1 + b_2 + \ldots + b_{p_1} + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k_1} + b_{p_1+1} + \ldots \\ \ldots + b_{p_2} + c_{k_1+1} + \ldots + c_{k_2} + \ldots \end{gathered}$$

ist die Summe der ersten $p_n + k_n$ Glieder gleich

$$l_n + a + \varepsilon_n - l_n + \frac{\Theta_n}{n} \to a \quad (|\Theta_n| < 1),$$

w. z. b. w.

Wenn nicht $p_1 < p_2 < \ldots$, so wende man das eben bewiesene auf eine wachsende Teilfolge von $p_1, p_2, \ldots$ an.

Hilfssatz 5. *Es sei*

$$a_1, a_2, \ldots \tag{6}$$

eine beschränkte Folge, die der Bedingung B genügt, $a_1 + a_2 + \ldots$ *sei divergent. Es seien weiter zwei Reihen* $(\mathfrak{D}\mathfrak{P})$: $b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots$ $(k_n$

ganz, $0 < k_n < k_{n+1}$) (DP): $c_{l_1} + c_{l_2} + \ldots\ldots$ (l_n *ganz,* $0 < l_n < l_{n+1}$) *gegeben.*

Behauptung: *Es gibt eine Teilfolge* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\ldots$ *von* $k_1\ k_2, \ldots\ldots$ *und eine Teilfolge* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ *von* $l_1, l_2, \ldots\ldots$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. es ist $\varkappa_i \neq \lambda_j$ *für* $i, j = 1, 2, \ldots\ldots$

2. Die Reihen $b_{\varkappa_1} + b_{\varkappa_2} + \ldots\ldots$, $c_{\lambda_1} + c_{\lambda_2} + \ldots\ldots$ *divergieren.*

3. Es seien $d_1, d_2, \ldots\ldots$ *diejenigen Glieder von* $a_1, a_2, \ldots\ldots$, *die weder in der Teilfolge* $a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots\ldots$ *noch in der Teilfolge* $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots\ldots$ *enthalten sind. Dann ist* $m\,(d_1, d_2, \ldots\ldots) = m\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$

4. Die Folge $d_1, d_2, \ldots\ldots$ *erfüllt die Bedingung B.*

Beweis. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß kein k_i keinen l_j gleich ist (vgl. die analoge Schlußweise in der Fußnote 12). Dies wollen wir voraussetzen. Wir markieren in der komplexen Zahlenebene die Zahlen $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\ldots$; alle diese Punkte liegen in einem gewissen Quadrat Q. Ich zerteile dieses Quadrat durch Medianen in vier kongruente Quadrate. Mindestens ein von diesen Teilquadraten besitzt folgende Eigenschaft: Wenn wir die Reihe derjenigen b_{k_i} bilden, deren entsprechende a_{k_i} in diesem Teilquadrate liegen, so ist diese Reihe divergent. Wir bezeichnen dieses Teilquadrat mit Q_1 (oder ein von ihnen, wenn es mehrere gibt). Dieses Quadrat zerteilen wir wieder in vier Teilquadrate und wenden wieder den vorangehenden Schluß an; so fortfahrend, bekommen wir eine Folge von ineinandergeschachtelten Quadraten $Q_1, Q_2, \ldots\ldots$, die alle einen einzigen Punkt β gemeinsam haben. Es gilt dann: für jedes ganze $n > 0$ bilden diejenigen Glieder b_{k_i}, deren zugehörige a_{k_i} in Q_n liegen, eine divergente Reihe. Man kann nun leicht aus der Folge $k_1, k_2, \ldots\ldots$ eine Teilfolge $k_1', k_2', \ldots\ldots$ herausgreifen, so daß $a_{k'_n} \to \beta$ und die Reihe $b_{k'_1} + b_{k'_2} + \ldots\ldots$ divergiert. Analog kann man mit der Folge $l_1, l_2, \ldots\ldots$ verfahren. In dem weiteren Verlauf des Beweises dürfen und wollen wir voraussetzen, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} a_{k_n} = \beta, \ \lim_{n=\infty} a_{l_n} = \gamma$$

existieren.

Wenn also $d_1', d_2', \ldots\ldots$ diejenigen Glieder von (6) sind, die weder in der Teilfolge

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\ldots \qquad (16)$$

noch in der Teilfolge

$$a_{l_1},\ a_{l_2}, \ldots\ldots \tag{17}$$

enthalten sind, so muß $m\ (d_1', d_2', \ldots\ldots)$ alle Punkte von $m\ (a_1, a_2, \ldots\ldots)$ enthalten, höchstens bis auf die Punkte β und γ. Wir greifen noch aus jeder der beiden Folgen $k_1, k_2, \ldots\ldots;\ l_1, l_2, \ldots\ldots$ je eine Teilfolge $m_1, m_2, \ldots\ldots;\ n_1, n_2, \ldots\ldots$ heraus und zwar so, daß es unendlich viele unter den Zahlen k_i (bzw. l_i) gibt, die in der Folge $m_1, m_2, \ldots\ldots$ (bzw. $n_1, n_2, \ldots\ldots$) nicht enthalten sind und daß

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{j=1}^{\infty} b_{m_j};\quad (\mathfrak{D}) : \sum_{j=1}^{\infty} c_{n_j}.$$

(Vgl. die analoge Schlußweise in der Fußnote 12). Wenn wir mit $d_1'', d_2'', \ldots\ldots$ diejenigen Glieder von (6) bezeichnen, die weder unter den a_{m_j} noch unter den a_{n_j} auftreten, so enthält $m\ (d_1'', d_2'', \ldots\ldots)$ offenbar die Punkte β und γ und dazu noch alle Punkte von $m\ (d_1', d_2', \ldots\ldots)$; also ist $m\ (d_1'', d_2'', \ldots\ldots) = m\ (a_1, a_2, \ldots\ldots)$.

Wir dürfen und wollen also in dem weiteren Verlauf des Beweises folgendes voraussetzen: wenn wir mit $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots$ diejenigen Glieder von (6) bezeichnen, die weder in (16) noch in (17) auftreten, so ist

$$m\ (\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots) = m\ (a_1, a_2 \ldots\ldots).$$

Es handelt sich noch um die Bedingung B. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall a. Es gibt ein φ_0 mit $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(a_n e^{-i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}\right)$ Weil $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und weil (6) die Bedingung B erfüllt, so sind die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\ \Re\left(a_n e^{-i\varphi_0}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{neg}\ \Re\left(a_n e^{-i\varphi_0}\right)$$

divergent; jeder der beiden Winkel

$$\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}, \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2},\ \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

enthält also nach Hfs. 1. mindestens einen Dhs. der Reihe

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots \tag{10}$$

Wenn $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, so ist die Reihe derjenigen Glieder von (10), die in einem der beiden Winkel $(\varphi_0 + \varepsilon,\ \varphi_0 + \pi - \varepsilon)$, $(\varphi_0 - \pi + \varepsilon,\ \varphi_0 - \varepsilon)$ liegen, absolut konvergent; denn für diese Glieder ist

$$|\mathfrak{R}(a_n e^{-i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})})| \geqq \sin \varepsilon \cdot |a_n|.$$

Es gibt also keinen von $[\varphi_0]$ und $[\varphi_0 + \pi]$ verschiedenen Dhs; also sind $[\varphi_0]$ und $[\varphi_0 + \pi]$ notwendig Dhs. der Reihe (10).

Fall b. Es ist $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{R}(a_n e^{-i\varphi})|$ für jedes reelle φ. Dann sind, wie wir beim Beweise des Satzes 4, Fall γ, gesehen haben, nur folgende zwei Fälle möglich:

$b\alpha$) Entweder gibt es einen Dhs. $[\varphi_0]$ von (10), so daß auch $[\varphi_0 + \pi]$ ein Dhs. ist.

$b\beta$) oder es ist dies nicht der Fall, und dann gibt es drei Dhs. $[\varphi_0]$, $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ von (10) mit

$$0 < \varphi_2 + 2\pi - \varphi_1 < \pi, \quad 0 < \varphi_1 - \varphi_0 < \pi, \quad 0 < \varphi_0 - \varphi_2 < \pi.$$

Die weitere Beweisführung ist zunächst allen Fällen a), $b\alpha$), $b\beta$) gemeinsam. Es sei $[\varphi]$ einer der in der Rede stehenden Dhs. von (10) (d. h. $[\varphi_0]$ oder $[\varphi_0 + \pi]$ im Falle a) und $b\alpha$), $[\varphi_0]$ oder $[\varphi_1]$ oder $[\varphi_2]$ im Falle $b\beta$). Dann ist $[\varphi]$ auch Dhs. mindestens einer der drei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{l_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$. Wir können nun aus den Folgen $k_1, k_2, \ldots\ldots$; $l_1, l_2, \ldots\ldots$ je eine Teilfolge $p_1, p_2, \ldots\ldots$; $q_1, q_2, \ldots\ldots$ herausgreifen, so daß

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{j=1}^{\infty} b_{p_j}; \quad (\mathfrak{D}) : \sum_{j=1}^{\infty} c_{q_j}$$

und daß $[\varphi]$ Dhs. der Reihe $d_1' + d_2' + \ldots\ldots$ ist, wenn $d_1', d_2', \ldots\ldots$ diejenigen Glieder von (6) bedeutet, die weder in $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots\ldots$ noch in $a_{q_1}, a_{q_2}, \ldots\ldots$ auftreten. Das kann man folgendermaßen erreichen:

Wenn $[\varphi]$ schon Dhs. von $\delta_1 + \delta_2 + \ldots\ldots$ ist, so setze ich $p_i = k_i$, $q_i = l_i$, also $d_i' = \delta_i$. Wenn aber $[\varphi]$ kein Dhs. von $\delta_1 + \delta_2 + \ldots\ldots$ ist, so sei er z. B. Dhs. von $a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots\ldots$; ich wähle eine Teilfolge $r_1, r_2, \ldots\ldots$ von $k_1, k_2, \ldots\ldots$ so, daß

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(a_{r_n} e^{-i\varphi}); \quad (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(a_{r_n} e^{-i\varphi}); \quad \frac{\mathfrak{J}(a_{r_n} e^{-i\varphi})}{\mathfrak{R}(a_{r_n} e^{-i\varphi})} \to 0.$$

Es ist

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} b_{k_n}.$$

Ich wähle nun eine Teilfolge $s_1, s_2, \ldots\ldots$ von $r_1, r_2, \ldots\ldots$ so, daß erstens

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(a_{s_n} e^{-i\varphi})$$

und zweitens

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} b_{p_n},$$

wo $p_1, p_2, \ldots\ldots$ die in $s_1, s_2, \ldots\ldots$ nicht auftretenden Glieder von $k_1, k_2, \ldots\ldots$ sind. Die Möglichkeit einer solchen Wahl sieht man durch eine der Fußnote 12. ganz analoge Schlußweise ein. Damit ist $p_1, p_2, \ldots\ldots$ gewählt. Wenn ich noch $q_n = l_n$ setze, so ist dadurch alles gewünschte erreicht. Offenbar ist

$$m(\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots) \leqq m(d_1', d_2', \ldots\ldots) \leqq m(a_1, a_2, \ldots\ldots); \text{ also ist } m(d_1', d_2', \ldots\ldots) = m(a_1, a_2, \ldots\ldots).$$

Wenn wir nun dieselbe Schlußweise auf alle in der Rede stehenden Dhs. anwenden, gelangen wir zum folgenden Ergebnis: Es gibt zwei Teilfolgen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\ldots$; bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ von $k_1, k_2, \ldots\ldots$; bzw. $l_1, l_2, \ldots\ldots$, so daß folgendes gilt:

1. $$\varkappa_i \neq \lambda_j \; (i, j = 1, 2, \ldots\ldots)$$

2. $$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} b_{\varkappa_n}; \quad (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} c_{\lambda_n}$$

3. wenn wir mit $d_1, d_2, \ldots\ldots$ diejenigen a_n bezeichnen, für welche n weder in der Folge $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\ldots$ noch in der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ enthalten ist, so ist

$$m(d_1, d_2, \ldots\ldots) = m(a_1, a_2, \ldots\ldots)$$

4. Im Falle a) und $b\alpha$) sind $[\varphi_0]$ und $[\varphi_0 + \pi]$, im Falle $b\beta$) $[\varphi_0]$, $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ Dhs. von $d_1 + d_2 + \ldots\ldots$. Endlich können wir (durch eine der letzten ganz analoge Schlußweise) noch die $\varkappa_i$, λ_i so einrichten, daß im Falle $b\alpha$)

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \mathfrak{J}(d_n e^{-i\varphi_0}); \quad (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \mathfrak{J}(d_n e^{-i\varphi_0}).$$

Wir sollen noch zeigen, daß $d_1, d_2, \ldots\ldots$ die Bedingung B erfüllt. Im Falle a) und $b\alpha$) genügt es zu zeigen: wenn die reele Zahl φ weder mit $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ noch mit $\varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ modulo 2π kongruent ist, so ist $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \mathfrak{R}(d_n e^{-i\varphi})$. Es sei φ eine solche Zahl; dann ist entweder $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2}$ oder $|\varphi - (\varphi_0 + \pi)| < \frac{\pi}{2}$ [13]. Es sei

---

[13]) Die beiden Ungleichungen sind eigentlich modulo 2π zu verstehen; und analog weiter.

z. B. $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2}$. Wenn es sich um den Fall $a)$ handelt, so ist

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\, (d_n e^{-i\varphi_0}); \quad (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1} \mathfrak{J}\, (d_n e^{-i\varphi_0}).$$

Also, wegen

$$\mathfrak{R}\, (d_n e^{-i\varphi}) = \mathfrak{R}\, (d_n e^{-i\varphi_0}) \cos(\varphi - \varphi_0) + \mathfrak{J}\, (d_n e^{-i\varphi_0}) \sin(\varphi - \varphi_0)$$

und wegen $\cos(\varphi - \varphi_0) > 0$ ist offenbar auch

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\, (d_n e^{-i\varphi})$$

w. z. b. w.

Im Falle $b\alpha)$ wählen wir eine Teilfolge $f_1, f_2, \ldots\ldots$ von $d_1, d_2, \ldots\ldots$, so daß

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}\, (f_n e^{-i\varphi_0}); \quad (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\, (f_n e^{-i\varphi_0}).$$

Dann sieht man — wie im Falle $a)$ — daß

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\, (f_n e^{-i\varphi})$$

und um so mehr

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\, (d_n e^{-i\varphi}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Auf dieselbe Weise behandelt man den Fall $|\varphi - (\varphi_0 + \pi)| < \frac{\pi}{2}$.

Im Falle $b\beta)$ genügt es zu zeigen: Für jedes reele φ ist

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\, (d_n e^{-i\varphi}).$$

Für jedes reele φ ist mindestens eine der Ungleichungen

$$|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2}, \quad |\varphi - \varphi_1| < \frac{\pi}{2}, \quad |\varphi - \varphi_2| < \frac{\pi}{2}\text{[14]}$$

erfüllt; es sei z. B. $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2}$; es sei $f_1, f_2, \ldots\ldots$ eine Teilfolge von $d_1, d_2, \ldots\ldots$, so daß

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}\, (f_n e^{-i\varphi_0}); \quad (\mathfrak{A}) \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\, (f_n e^{-i\varphi_0}).$$

Dann ist — wie im Falle $a)$ — auch

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\, (f_n e^{-i\varphi}),$$

also umsomehr

---

[14]) Vgl. die Fußnote 13.

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \Re\, (d_n e^{-i\varphi}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Damit ist Hilfssatz 5. vollständig bewiesen.

Zusatz. Ein analoger Hilfssatz besteht natürlich auch, wenn es sich nicht gerade um zwei Reihen $b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots\ldots$, $c_{l_1} + c_{l_2} + \ldots\ldots$ handelt, sondern um eine beliebige endliche Anzahl m derartigen Reihen. Ich habe $m = 2$ gewählt, nur um umständliche Indizesschreibereien zu vermeiden. Wenn ich im Folgenden den Hilfssatz 5. zitiere, so meine ich damit die allgemeinere Form des Hilfssatzes für ein beliebiges m.

§ 8. Der Fall IIb.

Ich will zunächst den einfachen Fall IIb behandeln, um dann die Betrachtung der komplizierteren Fälle kürzer fassen zu können.

Im Falle IIb gibt es eine Zahl $\sigma \neq 0$, so daß $\mathfrak{M}\, (a_1, a_2, \ldots\ldots)$ genau die Menge aller Zahlen $r\sigma$ (r reell und sonst beliebig) ist. Nach Satz 3, § 2 wissen wir also: wenn eine Zahl A zu

$$M\, (a_1, a_2, \ldots\ldots) \tag{5}$$

gehört, so gehören auch alle Zahlen $A + r\sigma$ zu (5).

Wir schreiben $a_n = r_n\sigma + i\alpha_n\sigma$ (α_n, r_n reell); offenbar ist $\alpha_n \to 0$.

Behauptung:

α) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ *konvergiert, so ist (5) die Menge aller Zahlen $A + r\sigma$, wo A eine bestimmte Zahl ist und r alle reellen Zahlen durchläuft.*

β) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ *divergiert, so ist (5) die Menge aller komplexen Zahlen.*

Beweis: α) ist trivial, da $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine von ihrer Anordnung unabhängige Summe besitzt.

Es liege also der Fall β) vor. Weil (6) die Bedingung B erfüllt, so ist offenbar

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \alpha_n, \quad (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{neg}\, \alpha_n.$$

Es seien $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\ldots$ diejenigen Glieder a_n von (6), für welche $\alpha_n > 0$; $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots\ldots$ diejenigen a_n, für welche $\alpha_n < 0$ (die a_n mit

$\alpha_n = 0$ werden dabei also nicht verbraucht). Es ist also

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k_n}; \quad (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_{l_n}).$$

Nach Hilfssatz 5. können wir also aus k_1, k_2,...... bzw. l_1, l_2,...... je eine Teilfolge $\varkappa_1$, $\varkappa_2$,...... bzw. λ_1, λ_2,...... herausgreifen, so daß

1. $$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa_n}; \quad (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_{\lambda_n})$$
2. $$m\,(d_1, d_2, \ldots\ldots) = m\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$$
3. $d_1, d_2 \ldots\ldots$ erfüllt die Bedingung B.

Dabei bedeutet d_1, d_2,...... die Folge derjenigen a_n, für welche n keinem $\varkappa_j$ und keinem λ_j gleich ist. $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$ ist also nicht leer; es sei A' eine, für das weitere fest gewählte Zahl aus $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$. Es ist offenbar $\mathfrak{M}\,(d_1, d_2, \ldots\ldots) = \mathfrak{M}\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$; also enthält $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$ nach Satz 3, § 2 sicher alle Zahlen $A' + r\sigma$ (r reell und sonst beliebig).

Es sei nun a eine beliebige Zahl. Ich setze $a + A' = A_1\sigma + {} + iA_2\sigma$ (A_1, A_2 reell).

Ich wähle die ganze Zahl $p_1 \geqq 1$ so, daß zuerst

$$\sum_{n=1}^{p_1} \alpha_{\varkappa_n} > A_2;$$

dann wähle ich q_1 (ganz und positiv) so, daß zuerst

$$\sum_{n=1}^{p_1} \alpha_{\varkappa_n} + \sum_{n=1}^{q_1} \alpha_{\lambda_n} < A_2;$$

dann die ganze Zahl $p_2 > p_1$ so, daß zuerst

$$\sum_{n=1}^{p_2} \alpha_{\varkappa_n} + \sum_{n=1}^{q_1} \alpha_{\lambda_n} > A_2;$$

dann die ganze Zahl $q_2 > q_1$ so, daß zuerst

$$\sum_{n=1}^{p_2} \alpha_{\varkappa_n} + \sum_{n=1}^{q_2} \alpha_{\lambda_n} < A_2 \quad \text{usw.}$$

Die Reihe[15])

$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{p_1} + c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_{q_1} + b_{p_1+1} + \ldots\ldots + b_{p_2} + c_{q_1+1} + \ldots\ldots$$

besitzt als ihre $(p_n + q_n)$ — te Partialsumme eine Zahl

$$r'_n\sigma + iA_2\sigma + \varepsilon_n = -A' + r_n''\sigma + (A_1 + iA_2)\,\sigma + A' + \varepsilon_n =$$
$$= -A' + r_n''\sigma + a + \varepsilon_n$$
$$(r_n',\ r_n''\ \text{reell},\ |\varepsilon_n| \leqq -\alpha_{\lambda_{q_n}} \to 0).$$

---

15) Wegen Vereinfachung der Indizes schreibe ich b_n, bzw. c_n statt $a_{\varkappa_n}$ bzw. a_{λ_n}.

Die Zahlen $A' - r_n''\sigma$ sind aber alle in $M(d_1, d_2, \ldots)$ enthalten; also ist nach Hfs. 4. auch die (beliebig gewählte) Zahl a in $M(a_1, a_2, \ldots)$ enthalten w. z. b. w.

In der Folge werden wir uns oft einer analogen Schlußweise bedienen; ich darf mich dabei wohl in den folgenden Fällen schon kürzer halten.

§ 9. Der Fall IIa.

In diesem Falle gibt es eine Zahl $\varrho \neq 0$, so daß $\mathfrak{M}(a_1, a_2, \ldots)$ genau die Menge aller Zahlen $k\varrho$ (k ganz und sonst beliebig) ist. Wir setzen $a_n = K_n\varrho + \alpha_n$, wo die ganze Zahl K_n so gewählt ist, daß $|a_n - K_n\varrho|$ möglichst klein ausfällt[16]); dann ist offenbar $\alpha_n \to 0$. Es sei endlich $\varrho = |\varrho| e^{i\varphi_1}$.

Behauptung. *α) wenn* $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, *so ist*

$$M(a_1, a_2, \ldots) \tag{5}$$

die Menge aller Zahlen $A + k\varrho$ (A eine bestimmte Zahl, k durchläuft alle ganzen Zahlen).

β) Wenn $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$, *aber* $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_1})$, *so ist (5) die Menge aller Zahlen $A + r\varrho$ (A eine bestimmte Zahl, r durchläuft alle reellen Zahlen).*

γ) Wenn $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_1})|$, *aber* $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_0})$ *für ein gewisses reelles φ_0, so ist (5) die Menge aller Zahlen $A + k\varrho + re^{i\varphi_0}$ (A eine bestimmte Zahl, k durchläuft alle ganzen, r alle reellen Zahlen).*

δ) Wenn $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{R}(\alpha_n e^{-i\varphi})|$ *für jedes reelle φ, so ist (5) die Menge aller komplexen Zahlen.*

Beweis. α) ist trivial.

Im Falle β) und γ) ist es klar, daß alle Zahlen von (5) von der angegebenen Form sein müssen; es ist zu zeigen, daß umgekehrt jede solche Zahl in (5) enthalten ist.

Fall β. Es ist mindestens eine von den beiden Reihen

---

[16]) Wenn es zu einem n zwei solche ganze Zahlen gibt, wähle ich beliebig eine von ihnen. Diese Zweideutigkeit kann nur für endlich viele Werte von n eintreten und hat auf die folgenden Betrachtungen keinen Einfluß.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \mathfrak{R}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_1}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \mathfrak{R}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_1})$$

divergent; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei es die erste (sonst nehme ich $-\varrho$ statt ϱ). Es sei $b_1, b_2, \ldots\ldots$ eine Teilfolge von

$$a_1,\ a_2, \ldots\ldots \tag{6}$$

die so gewählt ist, daß

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}\,(\beta_n e^{-i\varphi_1})$$

(Wenn $b_n = a_{\varkappa_n}$, so wollen wir $\beta_n = \alpha_{\varkappa_n}$ schreiben). Wir können nach Hfs. 5. die Folge $b_1, b_2, \ldots\ldots$ so wählen, daß die in $b_1, b_2, \ldots\ldots$ nicht auftretenden — und mit $d_1, d_2, \ldots\ldots$ bezeichneten — Glieder von (6) folgende Eigenschaften besitzen:

1. $m\,(d_1, d_2, \ldots\ldots) = m\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$
2. $d_1, d_2, \ldots\ldots$ erfüllt die Bedingung B.

Dann enthält $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$ mindestens eine Zahl A' und daher alle Zahlen $A' + k\varrho$ (k ganz und sonst beliebig). Es sei nun r eine beliebige reelle Zahl; wir wählen die Zahlen $k_1, k_2, \ldots\ldots$ so, daß k_n die kleinste ganze positive Zahl ist, für welche

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathfrak{R}\,(\beta_j e^{-i\varphi_1}) > n\,|\varrho| + r;$$

es ist also $k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots\ldots$, $k_n \to \infty$ und wegen $\beta_n \to 0$ ist

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathfrak{R}\,(\beta_j e^{-i\varphi_1}) - n\,|\varrho| - r \to 0$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{k_n} b_j = e^{i\varphi_1}\,(n\,|\varrho| + r + \varepsilon_n) + i e^{i\varphi_1}\,[\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(\beta_n e^{-i\varphi_1}) + \eta_n],$$

wo $\varepsilon_n \to 0$, $\eta_n \to 0$. Die Zahlen $-n\,|\varrho|\,e^{i\varphi_1} + A'$ sind aber alle in $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$ enthalten, also ist auch die Zahl

$$A' + i e^{i\varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(\beta_n e^{-i\varphi_1}) + r e^{i\varphi_1} = A + r'\varrho$$

$$\left(A = A' + i e^{i\varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(\beta_n e^{-i\varphi_1}),\ r' = \frac{r}{|\varrho|}\right)$$

in $M\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ enthalten (nach Hfs. 4). Es ist aber A eine bestimmte Zahl, r' eine beliebige reelle Zahl, w. z. b. w.

Fall γ. Es ist

$$\mathfrak{J}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_1}) = \mathfrak{J}\,(a_n e^{-i\varphi_1});$$

weil (6) die Bedingung B erfüllt, so ist

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{J}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_1});\quad (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{neg}\, \mathfrak{J}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_1})$$

Es ist aber

$$\mathfrak{J}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_1}) = \mathfrak{R}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_0}) \sin(\varphi_0 - \varphi_1) + \mathfrak{J}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_0}) \cos(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Wegen

$$\sin(\varphi_0 - \varphi_1) \neq 0,\quad (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_0})$$

ist also

$$(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{pos}\, \mathfrak{R}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_0});\quad (\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \text{neg}\, \mathfrak{R}\,(\alpha_n e^{-i\varphi_0}).$$

Ich wähle nun aus (6) zwei Teilfolgen $b_1, b_2, \ldots\ldots;\ c_1, c_2, \ldots\ldots$ so, daß

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}\,(\beta_n e^{-i\varphi_0}),\quad (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} [-\mathfrak{R}\,(\gamma_n e^{-i\varphi_0})]$$

(ich schreibe $\beta_n = \alpha_{\varkappa_n}$ bzw. $\gamma_n = \alpha_{\lambda_n}$, wenn $b_n = a_{\varkappa_n}$ bzw. $c_n = a_{\lambda_n}$). Nach dem Hfs. 5. kann ich b_1, $b_2, \ldots\ldots$; c_1, $c_2, \ldots\ldots$ sogar so wählen, daß kein a_n in mehr als einer dieser Teilfolgen auftritt und daß $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$ alle Zahlen $A' + k\varrho$ enthält, wo A' eine bestimmte Zahl ist und k alle ganzen Zahlen durchläuft (d_1, $d_2, \ldots\ldots$ bedeutet die Folge derjenigen Glieder von (6), die weder in b_1, $b_2 \ldots\ldots$, noch in c_1, $c_2, \ldots\ldots$ auftreten). Es sei k_0 eine beliebige ganze, r eine beliebige reelle Zahl; ich wähle nun die positiven Zahlen $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots\ldots$ folgendermaßen: p_1 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{p_1} \mathfrak{R}\,(\beta_n e^{-i\varphi_0}) > r;$$

q_1 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{p_1} \mathfrak{R}\,(\beta_n e^{-i\varphi_0}) + \sum_{n=1}^{q_1} \mathfrak{R}\,(\gamma_n e^{-i\varphi_0}) < r;$$

p_2 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{p_2} \mathfrak{R}\,(\beta_n e^{-i\varphi_0}) + \sum_{n=1}^{q_1} \mathfrak{R}\,(\gamma_n e^{-i\varphi_0}) > r;$$

q_2 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{p_2} \mathfrak{R}\,(\beta_n e^{-i\varphi_0}) + \sum_{n=1}^{q_2} \mathfrak{R}\,(\gamma_n e^{-i\varphi_0}) < r;\quad \text{usw.}$$

Es ist $p_n < p_{n+1}$, $q_n < q_{n+1}$ und wenn k_1. $k_2, \ldots\ldots$ gewisse ganze Zahlen sind, so ist offenbar

$$\sum_{j=1}^{p_n} b_j + \sum_{j=1}^{q_n} c_j = k_n \varrho + r e^{i\varphi_0} + \varepsilon_n + i e^{i\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,[(\beta_n + \gamma_n)\, e^{-i\varphi_0}],\ \varepsilon_n \to 0.$$

Die Zahlen $A' - (k_n - k_0)\,\varrho$ gehören aber alle zu $M\,(d_1, d_2, \ldots\ldots)$; also gehört die Zahl

$$A + k_0\varrho + re^{i\varphi_0}$$
$$\Big(A = A' + ie^{i\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,[(\beta_n + \gamma_n)\,e^{-i\varphi_0}]\Big)$$

nach Hilfssatz 4. zu (5); w. z. b. w.

Der Fall δ ist ziemlich kompliziert. Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle:

δ') Einer der beiden Halbstrahlen $[\varphi_1]$, $[\varphi_1 + \pi]$ ist Dhs. von $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$

δ'') Es ist dies nicht der Fall.

In beiden Fällen dürfen und wollen wir $\varphi_1 = 0$ (also $\varrho < 0$) voraussetzen. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{J}\,(\alpha_n)|$ ist divergent, also sind, wegen $\mathfrak{J}\alpha_n = \Im\alpha_n$, die beiden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Im\alpha_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \Im\alpha_n$ divergent. Also muß es nach Hfs. 1. einen Dhs. $[\varphi_1]$ von $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$ mit $0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi$ und einen Dhs. $[\varphi_2]$ mit $-\pi \leqq \varphi_2 \leqq 0$ geben. Im Falle δ'' gibt es also einen Dhs. $[\varphi_1]$ mit $0 < \varphi_1 < \pi$ und einen $[\varphi_2]$ mit $-\pi < \varphi_2 < 0$.

Fall δ'. Es sei [0] ein Dhs. von $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$ (sonst betrachte ich $-a_1 - a_2 - \ldots\ldots$ statt $a_1 + a_2 + \ldots\ldots$). Nach dem eben gesagten kann man aus (6) drei Teilfolgen $b_1, b_2, \ldots\ldots$; $c_1, c_2, \ldots\ldots$; $d_1, d_2, \ldots\ldots$ so wählen, daß[17])

$$b_n = \mathfrak{K}\varrho + \beta_n;\ \beta_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Re\,(\beta_n);\ (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(\beta_n);$$
$$c_n = \mathfrak{K}\varrho + \gamma_n;\ \gamma_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(\gamma_n);$$
$$d_n = \mathfrak{K}\varrho + \delta_n;\ \delta_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}\,(-\delta_n).$$

Nach Hfs. 5. kann ich die Wahl noch so einrichten, daß jedes a_n in höchstens einer von diesen 3 Teilfolgen auftritt, und daß[18]) $M\,(f_1, f_2, \ldots\ldots)$ alle Zahlen $A' + \mathfrak{K}\varrho$ (A' eine bestimmte Zahl, $\mathfrak{K}$ durchläuft alle ganzen Zahlen) enthält. Es sei $a = A_1 + A_2 i$ (A_1, A_2 reell) eine beliebige Zahl. Ich wähle nun die Zahlen

---

[17]) Ich bezeichne von nun an mit $\mathfrak{K}$ ganze, mit $\mathfrak{P}$ reelle Zahlen, ohne ihre verschiedene Werte durch Indizes zu unterscheiden.

[18]) $f_1, f_2 \ldots\ldots$ seien diejenigen Glieder von (6), die in keiner von den Teilfolgen $b_1, b_2, \ldots\ldots$; $c_1, c_2, \ldots\ldots$; $d_1, d_2, \ldots\ldots$ auftreten.

$k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots$ folgendermaßen: k_1 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{k_1} \mathfrak{I}\, \gamma_n > A_2;$$

l_1 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{k_1} \mathfrak{I}\, \gamma_n + \sum_{n=1}^{l_1} \mathfrak{I}\, \delta_n < A_2;$$

$k_2 > k_1$ sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{k_2} \mathfrak{I}\, \gamma_n + \sum_{n=1}^{l_1} \mathfrak{I}\, \delta_n > A_2 \quad \text{usw.}$$

Es sei nun p_1 die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als

$$\frac{1}{\varrho}\Big(\sum_{n=1}^{k_1} \mathfrak{R}\, \gamma_n + \sum_{n=1}^{l_1} \mathfrak{R}\, \delta_n - A_1\Big);$$

q_1 sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{n=1}^{q_1} \mathfrak{R}\, \beta_n > p_1\varrho - \sum_{n=1}^{k_1} \mathfrak{R}\gamma_n - \sum_{n=1}^{l_1} \mathfrak{R}\, \delta_n + A_1.$$

Im allgemeinen, wenn p_j, q_j für $j \leqq m-1$ gewählt sind, so sei p_m die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als

$$\frac{1}{\varrho}\Big(\sum_{n=1}^{k_m} \mathfrak{R}\, \gamma_n + \sum_{n=1}^{l_m} \mathfrak{R}\, \delta_n + \sum_{n=1}^{q_{m-1}} \mathfrak{R}\, \beta_n - A_1\Big);$$

q_m sei dann die kleinste natürliche Zahl $> q_{m-1}$, für welche

$$\sum_{n=q_{m-1}+1}^{q_m} \mathfrak{R}\, \beta_n > p_m\varrho - \sum_{n=1}^{k_m} \mathfrak{R}\, \gamma_n - \sum_{n=1}^{l_m} \mathfrak{R}\, \delta_n - \sum_{n=1}^{q_{m-1}} \mathfrak{R}\, \beta_n - A_1;$$

weil die rechte Seite dieser Ungleichung positiv ist, so ist offenbar (wegen $\beta_n \to 0$)

$$\sum_{n=1}^{q_m} \mathfrak{R}\, \beta_n + \sum_{n=1}^{k_m} \mathfrak{R}\, \gamma_n + \sum_{n=1}^{l_m} \mathfrak{R}\, \delta_n - p_m\varrho \to A_1;$$

also ist

$$\sum_{n=1}^{q_m} b_n + \sum_{n=1}^{k_m} c_n + \sum_{n=1}^{l_m} d_n = \mathfrak{K}_\varrho + A_1 + iA_2 + i\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}\, \beta_n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Weil aber $M(f_1, f_2, \ldots)$ alle Zahlen $A' + \mathfrak{K}_\varrho$ enthält, so enthält (5) nach Hfs. 4 die Zahl $a + A' + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}\, \beta_n$, d. h. jede komplexe Zahl (weil a beliebig war); w. z. b. w.

Fall δ''. Hier müssen wir noch zwei Unterfälle unterscheiden:

1. Es gibt einen Dhs. $[\varphi_0]$ von $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$, so daß auch $[\varphi_0 + \pi]$ Dhs. von $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$ ist.[19])

2. Es ist dies nicht der Fall.

Unterfall 1. Es ist $(\mathfrak{D}) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_0})|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $(\mathfrak{D}) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_0})$; sonst vertausche ich einfach $[\varphi_0]$ mit $[\varphi_0 + \pi]$. Ich wähle aus (6) drei Teilfolgen b_1, $b_2, \ldots\ldots$; c_1, $c_2, \ldots\ldots$; d_1, $d_2, \ldots\ldots$ ohne gemeinsame Glieder, so daß

$$b_n = \mathfrak{K}_\varrho + \beta_n;\ \beta_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(\beta_n e^{-i\varphi_0});\ (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\beta_n e^{-i\varphi_0}).$$

$$c_n = \mathfrak{K}_\varrho + \gamma_n;\ \gamma_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(-\gamma_n e^{-i\varphi_0});\ (\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\gamma_n e^{-i\varphi_0}).$$

$$d_n = \mathfrak{K}_\varrho + \delta_n;\ \delta_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\delta_n e^{-i\varphi_0}).$$

Nach Hfs. 5 kann ich diese Teilfolgen noch so wählen, daß die in ihnen nicht auftretenden a_n eine Folge f_1, $f_2, \ldots\ldots$ bilden mit folgender Eigenschaft: es gibt eine Zahl A', so daß $M(f_1, f_2, \ldots\ldots)$ alle Zahlen $A' + \mathfrak{K}_\varrho$ ($\mathfrak{K}$ ganz und sonst beliebig) enthält.

Es sei $\varrho = r_1 e^{i\varphi_0} + r_2 e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}$ (r_1, r_2 reell); weil φ_0 nicht mit 0 modulo π kongruent ist, so ist $r_2 \neq 0$. Es sei

$$a = A_1 e^{i\varphi_0} + A_2 e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}$$

eine beliebige Zahl (A_1, A_2 reell).

Es sei k_n die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathfrak{J}(\delta_j e^{-i\varphi_0}) > n\,|r_2| + A_2 \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots);$$

es ist $1 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots\ldots$, $k_n \to \infty$.

Nun wähle ich die Zahlen p_1, q_1, p_2, $q_2, \ldots\ldots$ so, daß p_1 die kleinste natürliche Zahl ist, für welche

$$\sum_{j=1}^{p_1} \mathfrak{R}(\beta_j e^{-i\varphi_0}) > 1 \cdot r_1 \cdot \operatorname{sgn} r_2 - \sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{R}(\delta_j e^{-i\varphi_0}) + A_1;$$

q_1 sei dann die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{q_1} \mathfrak{R}(\gamma_j e^{-i\varphi_0}) + \sum_{j=1}^{p_1} \mathfrak{R}(\beta_j e^{-i\varphi_0}) < 1 \cdot r_1 \cdot \operatorname{sgn} r_2 - \sum_{j=1}^{k_1} \mathfrak{R}(\delta_j e^{-i\varphi_0}) + A_1.$$

---

[19]) In dem Rest dieses § wird sich ausschließlich um Dhs. von $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$ handeln.

Im allgemeinen, p_n sei die kleinste natürliche Zahl, die größer als p_{n-1} ist und für welche

$$\sum_{j=1}^{p_n} \Re(\beta_j e^{-i\varphi_0}) + \sum_{j=1}^{q_{n-1}} \Re(\gamma_j e^{-i\varphi_0}) > n \,.\, r_1 \,.\, \operatorname{sgn} r_2 - \sum_{j=1}^{k_n} \Re(\delta_j e^{-i\varphi_0}) + A_1$$

und q_n sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{p_n} \Re(\beta_j e^{-i\varphi_0}) + \sum_{j=1}^{q_n} \Re(\gamma_j e^{-i\varphi_0}) < n \,.\, r_1 \,.\, \operatorname{sgn.} r_2 - \sum_{j=1}^{k_n} \Re(\delta_j e^{-i\varphi_0}) + A_1;$$

es ist offenbar $q_n > q_{n-1}$. Es ist weiter offenbar

$$\sum_{j=1}^{p_n} b_j + \sum_{j=1}^{q_n} c_j + \sum_{j=1}^{k_n} d_j = \mathfrak{K}\varrho + e^{i\varphi_0}(nr_1 \operatorname{sgn} r_2 + A_1) +$$

$$+ e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}(nr_2 \operatorname{sgn} r_2 + A_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \Im[(\beta_j + \gamma_j)\, e^{-i\varphi_0}]) + \varepsilon_n =$$

$$= (\mathfrak{K} + n \,.\, \operatorname{sgn} r_2)\, \varrho + a + A + \varepsilon_n,$$

wo

$$A = e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} \sum_{j=1}^{\infty} \Im[(\beta_j + \gamma_j)\, e^{-i\varphi_0}],\ \varepsilon_n \to 0.$$

Aber $M(f_1, f_2, \ldots\ldots)$ enthält alle Zahlen $A' + \mathfrak{K}\varrho$; daher gehört die Zahl $a + A + A'$, d. h. jede beliebige Zahl, nach Hfs 4 zu (5), w. z. b. w.

Unterfall 2. Hier gibt es zwei Dhs. $[\varphi']$, $[\varphi'']$ mit

$$-\pi < \varphi'' < 0 < \varphi' < \pi,\ \varphi' - \varphi'' \neq \pi.$$

Man kann also schreiben $\varrho = r_1 e^{i\varphi'} + r_2 e^{i\varphi''}$ (r_1, r_2 reell, $r_1 r_2 \neq 0$). Es ist $\varrho > 0$, also, wie leicht zu sehen, $r_1\ r_2 > 0$. Man wähle aus (6) zwei Teilfolgen $b_1, b_2, \ldots\ldots$; $c_1, c_2 \ldots\ldots$ ohne gemeinsame Glieder, so daß

$$b_n = \mathfrak{K}\varrho + \beta_n;\ \beta_n \to 0;\ (\mathfrak{DP}) : \sum_{j=1}^{\infty} \Re(\beta_j e^{-i\varphi'});\ (\mathfrak{A}) : \sum_{j=1}^{\infty} \Im(\beta_j e^{-i\varphi'}).$$

$$c_n = \mathfrak{K}\varrho + \gamma_n;\ \gamma_n \to 0;\ (\mathfrak{DP}) : \sum_{j=1}^{\infty} \Re(\gamma_j e^{-i\varphi''});\ (\mathfrak{A}) : \sum_{j=1}^{\infty} \Im(\gamma_j e^{-i\varphi''}).$$

Nach Hfs. 5 kann man die Wahl noch so einrichten, daß die in keiner dieser beiden Teilfolgen enthaltenen — mit $f_1, f_2, \ldots$ bezeichneten — Glieder von (6) folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine Zahl A', so daß $M(f_1, f_2, \ldots\ldots)$ alle Zahlen $A' + \mathfrak{K}\varrho$ ($\mathfrak{K}$ ganz und sonst beliebig) enthält. Es sei $a = A_1 e^{i\varphi'} + A_2 e^{i\varphi''}$ eine beliebige Zahl (A_1, A_2 reell). Ich wähle $k_1, k_2, \ldots\ldots$; $l_1, l_2, \ldots\ldots$ folgendermaßen: k_n sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{k_n} \Re (\beta_j e^{-i\varphi'}) > n\,|r_1| + A_1;$$

l_n sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{l_n} \Re (\gamma_j e^{-i\varphi''}) > n\,|r_2| + A_2.$$

Es ist offenbar $k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots\ldots;\ k_n \to \infty;\ l_1 \leqq l_2 \leqq \ldots\ldots;\ l_n \to \infty$ und

$$\sum_{j=1}^{k_n} \Re\, b_j + \sum_{j=1}^{l_n} \Re\, c_j = \mathfrak{K}_\varrho + n \,.\, \operatorname{sgn} r_1\, (r_1 e^{i\varphi'} + r_2 e^{i\varphi''}) +$$

$$+ A_1 e^{i\varphi'} + A_2 e^{i\varphi''} + e^{\,(\varphi' + \frac{\pi}{2})} \sum_{j=1}^{\infty} \Im (\beta_j e^{-i\varphi'}) +$$

$$+ e^{i\,(\varphi'' + \frac{\pi}{2})} \sum_{j=1}^{\infty} \Im (\gamma_j e^{-i\varphi''}) + \varepsilon_n =$$

$$= \mathfrak{K}_\varrho + a + A + \varepsilon_n$$

$$(\varepsilon_n \to 0, \quad A =$$

$$= e^{i(\varphi' + \frac{\pi}{2})} \sum_{j=1}^{\infty} \Im (\beta\, e^{-i\varphi'}) + e^{i(\varphi'' + \frac{\pi}{2})} \sum_{j=1}^{\infty} \Im (\gamma_j e^{-i\varphi''}).$$

Daraus folgt aber nach Hilfssatz 4: weil $M(f_1, f_2, \ldots\ldots)$ alle Zahlen $A' + \mathfrak{K}_\varrho$ enthält, so enthält (5) die Zahl $a + A + A'$, d. h. jede komplexe Zahl, w. z. b. w.

§ 10. **Der Fall IIIa.**

Zunächst drei Bemerkungen.

a) Es seien ϱ_1, ϱ_2 zwei komplexe Zahlen, $\varrho_1 \varrho_2 \neq 0$, $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ nicht reell. A sei éine Zahl, φ sei eine reelle Zahl. Es sei μ die Menge aller Zahlen

$$A + K_1 \varrho_1 + K_2 \varrho_2 + r e^{i\varphi},$$

wo K_1, K_2 alle ganzen Zahlen, r alle reellen Zahlen durchläuft. Wenn die „Gerade“ $r e^{i\varphi}$ durch einen von Nullpunkt verschiedenen Punkt $\mathfrak{K}_{\varrho_1} + \mathfrak{K}_{\varrho_2}$ hindurchgeht, d. h. wenn die Gleichung $s e^{i\varphi} = r' \varrho_1 + r'' \varrho_2$ durch ein reelles s und ganzzahlige r', r'' mit $|r'| + |r''| > 0$ lösbar ist, so ist μ offenbar ein System von äquidistanten parallelen Geraden. Wenn dies aber nicht der Fall ist, d. h. wenn in der Darstellung $e^{i\varphi} = r_1 \varrho_1 + r_2 \varrho_2$ (r_1, r_2 reell) $r_1 r_2 \neq 0$ und $\frac{r_1}{r_2}$ irrational ist, so ist μ überall dicht. Denn in diesem Fall liegen nach einem Satze von Kronecker[20]) die Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$K_1 + nr_1,\ K_2 + nr_2\ (K_1, K_2, n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots)$$

überall dicht, also auch die Punkte

$$A + (K_1 + nr_1)\,\varrho_1 + (K_2 + nr_2)\,\varrho_2 = A + K_1\varrho_1 + K_2\varrho_2 + ne^{i\varphi},$$

also ist umsomehr μ überall dicht.

b) Es seien r_1, r_2, s_1, s_2 reelle Zahlen, $r_1 s_2 - r_2 s_1 \neq 0$. Man kann bekanntlich eine Folge von Paaren ganzer Zahlen

$$p_n', q_n'\ (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

so finden, daß

$$r_2 p_n' + s_2 q_n' \to 0,$$
$$\max(|p_n'|, |q_n'|) \to \infty.$$

Es ist dann offenbar $|r_1 p_n' + s_1 q_n'| \to \infty$; wenn wir noch die Vorzeichen von p_n', q_n' geeignet wählen und eventuell nur eine Teilfolge aus (p_1', q_1'), (p_2', q_2'), …… herausgreifen, können wir erreichen, daß die Zahlen $r_1 p_n' + s_1 q_n'$ mit wachsendem n monoton in $+\infty$ wachsen.

c) Es seien r_1, r_2, s_1, s_2 wieder reelle Zahlen mit $r_1 s_2 - r_2 s_1 \neq 0$. Ich behaupte: man kann drei positive Zahlen E, F, G und eine Folge von Paaren ganzer Zahlen p_n, q_n $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ so finden, daß

$$\max(|p_n|, |q_n|) \to \infty,\ E < r_2 p_n + s_2 q_n < F,$$
$$r_1 p_n + s_1 q_n > G \max(|p_n|, |q_n|).$$

Beweis. Es sei p_n', q_n' eine Folge von Paaren ganzer Zahlen mit $\max(|p_n'|, |q_n'|) \to \infty$, $|r_2 p_n' + s_2 q_n'| < 1$, $r_1 p_n' + s_1 q_n' \to +\infty$. Es sei z. B. $|r_2| \geqq |s_2|$ (sonst vertausche ich r_1, r_2 mit s_1, s_2); dann ist $r_2 \neq 0$ und wir setzen[21])

$$p_n = p_n' + \left(\left[\frac{2}{|r_2|}\right] + 1\right) \operatorname{sgn} r_2;\ q_n = q_n';$$

dann ist

$$r_2 p_n + s_2 q_n = r_2 p_n' + s_2 q_n' + |r_2| \left(\left[\frac{2}{|r_2|}\right] + 1\right);$$

also

---

[20]) Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen (Werke, Bd. III, Halbband 1, S. 47—109).

$$1 < r_2 p_n + s_2 q_n < 3 + |r_2|,$$

woraus folgt

$$|p_n| < \left|\frac{s_2 q_n}{r_2}\right| + 1 + \frac{3}{|r_2|} < 2|q_n|$$

für $n > n_0$. Es ist

$$|r_1 p_n + s_1 q_n| =$$

$$= \left|\frac{r_1(r_2 p_n + s_2 q_n)}{r_2} + \frac{r_2 s_1 - r_1 s_2}{r_2} q_n\right| > \frac{1}{4}\left|\frac{r_2 s_1 - r_1 s_2}{r_2}\right| \max(|p_n|, |q_n|)$$

für $n > n_1$. Es ist weiter offenbar

$$r_1 p_n + s_1 q_n > 0$$

für $n > n_2$. Wenn wir also die p_n, q_n erst von dem Index

$$n_3 = \max(n_0, n_1, n_2) + 1$$

nehmen und entsprechend umnumerieren, bekommen wir alles verlangte.

Nun zum Fall IIIa! In diesem Fall gibt es zwei Zahlen ϱ_1, ϱ_2, so daß (8) genau die Menge aller Zahlen $k'\varrho_1 + k''\varrho_2$ (k', k'' ganz und sonst beliebig) ist. Wir schreiben

$$a_n = k_n'\varrho_1 + k_n''\varrho_2 + \alpha_n,$$

wo die ganzen Zahlen k_n', k_n'' so gewählt sind, daß

$$|a_n - k_n'\varrho_1 - k_n\varrho_2''|$$

möglichst klein ausfällt.[22]) Es ist $\alpha_n \to 0$.

Behauptung. *α) Wenn* $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, *so gibt es eine Zahl A, so daß (5) genau die Menge aller Zahlen $A + k'\varrho_1 + k''\varrho_2$ ist (k', k'' ganz und sonst beliebig).*

β) Wenn $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$, *aber* $(\mathfrak{A}) : \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{i\varphi_0})$ *für ein gewisses reelles φ_0, so sind zwei Fälle möglich:*

β') Wenn die Gleichung $s e^{i\varphi_0} = r'\varrho_1 + r''\varrho_2$ durch ein reelles s und ganze r', r'' mit $|r'| + |r''| > 0$ lösbar ist, so ist (5) die Menge aller Zahlen $A + k'\varrho_1 + k''\varrho_2 + r e^{i\varphi_0}$ (A eine bestimmte Zahl, k', k'' durchlaufen alle ganzen, r alle reellen Zahlen).

---

[21]) In diesem Beweise soll, wenn x reell, $[x]$ die größte ganze Zahl bedeuten, die $\leq x$ ist.

[22]) Eine Unbestimmtheit in der Wahl dieser Zahlen kann höchstens für endlich viele n auftreten und ist für das Folgende ohne Einfluß.

β'') Wenn dies aber nicht der Fall ist, so ist (5) die Menge aller Zahlen.

γ) Wenn $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\Re(\alpha_n e^{-i\varphi})|$ für jedes reelle φ, so ist (5) die Menge aller Zahlen.

Beweis: α) ist trivial.

Im Falle β) ist es klar, daß alle Zahlen aus (5) entweder von der Form

$$A + k'\varrho_1 + k''\varrho_2 + re^{i\varphi_0} \tag{18}$$

sind oder sich als Grenzwerte einer Folge von Zahlen der Form (18) darstellen lassen; es genügt noch zu zeigen, daß jede Zahl der Form (18) in (5) enthalten ist, denn daraus folgt im Fall β'') — nach der Bemerkung *a)* — daß (5) überall dicht ist, also, weil abgeschlossen, alle Zahlen enthält.

Es ist $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\Re(\alpha_n e^{-i\varphi_0})|$; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $(\mathfrak{D}) : \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re(\alpha_n e^{-i\varphi_0})$. Ich wähle aus (6) eine Teilfolge $b_1, b_2, \ldots$ mit

$$b_n = \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \beta_n;\ \beta_n \to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}) : \sum_{n=1}^{\infty} \Re(\beta_n e^{-i\varphi_0});$$

dazu will ich die Wahl noch so einrichten, daß die Menge $M(c_1, c_2, \ldots)$ — wo $c_1, c_2, \ldots$ die in $b_1, b_2, \ldots$ nicht enthaltenen Glieder von (6) sind — alle Zahlen $A' + k'\varrho_1 + k''\varrho_2$ (A' fest, k', k'' ganz und sonst beliebig) enthält (nach Hfs. 5). Es sei (r_1, r_2, s_1, s_2, reell)

$$\varrho_1 = r_1 e^{i\varphi_0} + r_2 i e^{i\varphi_0},\ \varrho_2 = s_1 e^{i\varphi_0} + s_2 i e^{i\varphi_0};$$

also $r_1 s_2 - r_2 s_1 \neq 0$. Ich wähle eine Folge von Paaren ganzer Zahlen p_n', q_n' ($n = 1, 2, \ldots$), so daß

$$r_2 p_n' + s_2 q_n' \to 0,\ \max(|p_n'|, |q_n'|) \to \infty,$$

und noch so, daß $r_1 p_n' + s_1 q_n'$ wachsend gegen $+\infty$ strebt (Bemerkung b). Es seien K', K'' zwei ganze Zahlen und r eine reelle Zahl, es sei t_n ($n = 1, 2, \ldots$) die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{t_n} \Re(\beta_j e^{-i\varphi_0}) > r_1 p_n' + s_1 q_n' + r.$$

Es ist $t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots$, $t_n \to \infty$ und

$$\sum_{j=1}^{t_n} b_j = \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + e^{i\varphi_0}(r_1 p_n' + s_1 q_n' + r + \varepsilon_n) +$$

$$+e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathfrak{I}(\beta_j e^{-i\varphi_0})+\varepsilon_n'\right)=$$

$$=\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{K}\varrho_2+K'\varrho_1+K''\varrho_2+e^{i\varphi_0}(r_1p_n'+s_1q_n')+$$

$$+ie^{i\varphi_0}(r_2p_n'+s_2q_n')+re^{i\varphi_0}+A''+\eta_n=\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{K}\varrho_2+K'\varrho_1+K''\varrho_2+$$

$$+re^{i\varphi_0}+A''+\eta_n\left[\varepsilon_n\to 0,\ \varepsilon_n'\to 0,\ \eta_n\to 0,\ A''=ie^{i\varphi_0}\sum_{j=1}^{\infty}\mathfrak{I}(\beta_j e^{-i\varphi_0})\right].$$

Weil aber $M(c_1, c_2, \ldots\ldots)$ alle Punkte $A'+\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{K}\varrho_2$ enthält, so enthält (5) nach Hfs. 4. die Zahl $A+K'\varrho_1+K''\varrho_2+re^{i\varphi_0}$ $(A=A'+A'')$, w. z. b. w.

Fall γ. Es sei $[\varphi_1]$ ein Dhs. der Reihe $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots$; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi_1=0$ (sonst drehe ich um $-\varphi_1$). Mindestens eine der beiden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{pos}\mathfrak{I}(\alpha_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{neg}\mathfrak{I}(\alpha_n)$ ist divergent; ohne Beschränkung sei es die erste (sonst betrachte ich die Folge der mit a_1, $a_2, \ldots\ldots$ konjugiert komplexen Zahlen). Ich greife aus (6) zwei Teilfolgen b_1, $b_2, \ldots\ldots$; c_1, $c_2, \ldots\ldots$ so heraus, daß

$$b_n=\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{K}\varrho_2+\beta_n;\ \beta_n\to 0;\ (\mathfrak{DP}):\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}(\beta_n);\ (\mathfrak{A}):\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{I}(\beta_n).$$

$$c_n=\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{K}\varrho_2+\gamma_n;\ \gamma_n\to 0;\ (\mathfrak{DP}):\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{I}(\gamma_n).$$

Ich wähle diese Teilfolgen nach Hfs. 5. noch so, daß die Folge der in ihnen nicht enthaltenen Glieder von (6) — diese Folge werde mit d_1, $d_2, \ldots\ldots$ bezeichnet — folgende Eigenschaft besitzt: es gibt eine Zahl A', so daß $M(d_1, d_2, \ldots\ldots)$ alle Zahlen $A'+K'\varrho_1+$ $+K''\varrho_2$ (K', K'' ganz und sonst beliebig) enthält. Es sei (r_1, r_2, s_1, s_2 reell)

$$\varrho_1=r_1+ir_2,\ \varrho_2=s_1+is_2,$$

also $r_1 s_2 - s_1 r_2 \neq 0$. Ich wähle nach der Bemerkung *c)* drei positive Zahlen E, F, G und eine Folge von Paaren ganzer Zahlen p_n, q_n $(n=1, 2, \ldots\ldots)$ so, daß

$$\max(|p_n|, |q_n|)\to\infty,\ E<r_2p_n+s_2q_n<F,$$
$$r_1p_n+s_1q_n>G\max(|p_n|, |q_n|).$$

Es sei nun $a=A_1+A_2i$ (A_1, A_2 reell) eine beliebige Zahl.

Ich wähle vier Folgen von natürlichen Zahlen τ_m, t_m, σ_m, v_m $(m=1, 2, \ldots\ldots)$ folgendermaßen:

τ_m sei die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{\tau_m}\mathfrak{I}(\gamma_j)>mF+A_2.$$

t_m sei die kleinste natürliche Zahl, für welche erstens $t_m > m$ und zweitens

$$G \max (|p_{t_m}|, |q_{t_m}|) > 1 + \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^{\tau_m} |\Re(\gamma_j)| - A_1\right).$$

Es sei weiter σ_m die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{\sigma_m} \Im(\gamma_j) > m (r_2 p_{t_m} + s_2 q_{t_m}) + A_2.$$

Endlich sei v_m die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{v_m} \Re(\beta_j) > m (r_1 p_{t_m} + s_1 q_{t_m}) - \sum_{j=1}^{\sigma_m} \Re(\gamma_j) + A_1.$$

Es ist offenbar $\tau_m \to \infty$, $t_m \to \infty$, $\tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots\ldots$. Wegen

$$E < r_2 p_n + s_2 q_n < F \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

ist

$$\sigma_m \to \infty, \quad \sigma_m \leqq \tau_m.$$

Es ist

$$m (r_1 p_{t_m} + s_1 q_{t_m}) - \sum_{j=1}^{\sigma_m} \Re(\gamma_j) + A_1 > mG \max (|p_{t_m}|, |q_{t_m}|) - \sum_{j=1}^{\tau_m} |\Re(\gamma_j)| + \\ + A_1 > m;$$

also ist auch $v_m \to \infty$. Es ist offenbar

$$\sum_{j=1}^{\sigma_m} c_j + \sum_{j=1}^{v_m} b_j = \Re\varrho_1 + \Re\varrho_2 + m (r_1 p_{t_m} + s_1 q_{t_m} + i r_2 p_{t_m} + i s_2 q_{t_m}) + \\ + a + i \sum_{j=1}^{\infty} \Im(\beta_j) + \varepsilon_m = \Re\varrho_1 + \Re\varrho_2 + a + i \sum_{j=1}^{\infty} \Im(\beta_j) + \varepsilon_m,$$

wo $\varepsilon_m \to 0$. Wegen $\sigma_m \to \infty$, $v_m \to \infty$ kann man aus der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,...... eine Teilfolge $k_1, k_2, \ldots\ldots$ herausgreifen mit

$$\sigma_{k_1} < \sigma_{k_2} < \sigma_{k_3} < \ldots\ldots; \quad v_{k_1} < v_{k_2} < v_{k_3} < \ldots\ldots.$$

Die Reihe

$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{v_{k_1}} + c_1 + c_2 + \ldots\ldots c_{\sigma_{k_1}} + b_{v_{k_1}+1} + \ldots\ldots + b_{v_{k_2}} + c_{\sigma_{k_1}+1} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + c_{\sigma_{k_2}} + \ldots\ldots$$

hat dann als ihre $(v_{k_n} + \sigma_{k_n})$ — te Partialsumme einen Ausdruck $\Re\varrho_1 + \Re\varrho_2 + i \sum_{j=1}^{\infty} \Im(\beta_j) + a + \varepsilon_n'$, wo $\varepsilon_n' \to 0$. Alle Zahlen $A' + \Re\varrho_1 + \Re\varrho_2$ sind aber in $M(d_1, d_2 \ldots\ldots)$ enthalten, also ist nach Hfs. 4. die Zahl $A' + i \sum_{j=1}^{\infty} \Im(\beta_j) + a$ in (5) enthalten, womit wegen der Willkürlichkeit von a der Fall γ erledigt ist.

§ 11. Der Fall IIIb.

Hier gibt es zwei Zahlen ϱ_1, ϱ_2, so daß (8) genau die Menge aller Zahlen $\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{L}\varrho_2$ ist, wo $\mathfrak{K}$ alle ganzen, $\mathfrak{L}$ alle reellen Zahlen durchläuft. Wir schreiben $a_n=r_n'\varrho_1+r_n''\varrho_2$ (r_n', r_n'' reell) und wählen die ganze Zahl K_n so, daß

$$K_n-\frac{1}{2}\leqq r_n'<K_n+\frac{1}{2};$$

dann ist

$$a_n=K_n\varrho_1+r_n''\varrho_2+\alpha_n\varrho_1 \ (\alpha_n \text{ reell});$$

es ist offenbar $\alpha_n\to 0$.[23])

Behauptung:

α) *Wenn* $(\mathfrak{A}):\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_n$, *so ist (5) die Menge aller Zahlen* $A+k\varrho_1+r\varrho_2$, *wo* A *fest ist,* k *alle ganzen,* r *alle reellen Zahlen durchläuft.*

β) *Wenn* $(\mathfrak{D}):\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\alpha_n|$, *so ist (5) die Menge aller Zahlen.*

Beweis: α) ist trivial.

Im Fall β) sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(\mathfrak{D}):\sum\limits_{j=1}^{\infty}\text{pos}\ \alpha_n$ (sonst schreibe ich $-\varrho_1$ statt ϱ_1). Ich wähle aus (6) eine Teilfolge $b_1, b_2, \ldots$ so, daß

$$b_n=\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{L}\varrho_2+\beta_n\varrho_1;\ \beta_n\to 0;\ (\mathfrak{D}\mathfrak{P}):\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n.$$

Ich wähle diese Teilfolge nach Hfs. 5. noch so, daß die in ihr nicht enthaltenen, mit c_1, $c_2, \ldots$ bezeichneten Glieder von (6) folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt eine Zahl A', so daß $M(c_1, c_2, \ldots)$ alle Zahlen $A'+k\varrho_1+r\varrho_2$ (k ganz und sonst beliebig, r reell und sonst beliebig) enthält. Es sei $a=r_1\varrho_1+r_2\varrho_2$ (r_1, r_2 reell) eine beliebige Zahl; es sei p_n die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sum_{j=1}^{p_n}\beta_j>n+r_1\ (n=1, 2, \ldots)$$

---

[23]) Statt α_n könnten wir auch α_n' folgendermaßen einführen: wir setzen $a_n=K_n'\varrho_1+s_n\varrho_2+\alpha'_n$, wo die ganze Zahl K_n' und die reelle Zahl s_n so gewählt sind, daß $|a_n-K_n'\varrho_1-s_n\varrho_2|$ möglichst klein ausfällt: in der Behauptung können wir dann α_n durch α_n' ersetzen: denn, wenn $\varrho_j=|\varrho_j|e^{i\varphi_j}$ ($j=1, 2$), so ist $|\alpha_n'|=|\alpha_n\varrho_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)|$, wie man aus einer zugehörigen Figur sofort ablesen kann.

Es ist dann $p_1 < p_2 < \dots\dots$, $p_n \to \infty$ und

$$\sum_{j=1}^{p_n} b_j = \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{L}\varrho_2 + (n+r_1)\,\varrho_1 + \varepsilon_n$$
$$= \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{L}\varrho_2 + a + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \to 0).$$

Aber $M\,(c_1, c_2, \dots\dots)$ enthält alle Zahlen $\mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{L}\varrho_2 + A'$, also gehört nach Hfs. 4. die Zahl $A' + a$ zu (5), w. z. b. w.

§ 12. Der Fall IIIc.

Hier ist $\mathfrak{M}\,(a_1, a_2, \dots\dots)$ die Menge aller Zahlen; weil (5) mindestens eine Zahl A' enthält, so enthält (5) nach Satz 3, § 2 alle Zahlen; daraus ergibt sich die

Behauptung: *hier ist (5) die Menge aller Zahlen.*

§ 13. Zusammenfassung der Resultate.

Ich will endlich die Resultate, die wir in §§ 5—12 über

$$M\,(a_1\, a_2, \dots\dots) \tag{5}$$

gefunden haben, kurz zusammenfassen. Dabei will ich folgende Ausdrucksweise benutzen: der Ausdruck

„die Menge $A + \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \mathfrak{L}e^{i\varphi_0}$"

soll bedeuten: die Menge aller Zahlen $A + k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 + re^{i\varphi_0}$, wo A, ϱ_1, ϱ_2, φ_0 fest sind, k_1, k_2 alle ganzen Zahlen, r alle reellen Zahlen durchläuft. Eine ähnliche Ausdrucksweise benütze ich in analogen Fällen.

Es sei also eine beschränkte Folge

$$a_1, a_2, \dots\dots \tag{6}$$

vorgelegt; wenn es ein reelles φ gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \mathfrak{R}\,(a_n e^{-i\varphi})$ konvergiert, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \mathfrak{R}\,(a_n e^{-i\varphi})$ divergiert, so ist (5) leer; sonst ist (5) nicht leer (dies ist Satz 4. in einer leichten Umformung). Wir wollen von nun an voraussetzen, daß (5) nicht leer ist.

Wir betrachten nun die Mengen

$$m\,(a_1, a_2, \dots\dots), \tag{9}$$
$$\mathfrak{M}\,(a_1, a_2, \dots\dots). \tag{8}$$

Folgende Fälle sind möglich:

I. (9) und also auch (8) enthält die einzige Zahl Null.

IIa. Der Fall I tritt nicht ein, es gibt aber eine Zahl ϱ', so daß alle Zahlen von (9) die Form $\mathfrak{K}_{\varrho'}$ haben; dann ist (8) die Menge $\mathfrak{K}_\varrho$ (ϱ geeignet gewählt).

IIb. Weder I noch IIa tritt ein, es gibt aber eine Zahl σ, so daß alle Zahlen von (9) die Form $\mathfrak{L}_\sigma$ haben; dann ist (8) die Menge $\mathfrak{L}_\sigma$.

IIIa. Keiner der bisher betrachteten Fälle tritt ein, es gibt aber zwei Zahlen σ_1, σ_2, so daß alle Zahlen von (9) die Form $\mathfrak{K}_{\sigma_1}+\mathfrak{K}_{\sigma_2}$ haben; dann ist (8) die Menge $\mathfrak{K}_{\varrho_1}+\mathfrak{K}_{\varrho_2}$ (ϱ_1, ϱ_2 geeignet gewählt).

IIIb. Keiner der bisher betrachteten Fälle tritt ein, es gibt aber zwei Zahlen σ_1, σ_2, so daß alle Zahlen von (9) die Form $\mathfrak{K}_{\sigma_1}+\mathfrak{L}_{\sigma_2}$ haben; dann ist (8) die Menge $\mathfrak{K}_{\varrho_1}+\mathfrak{L}_{\varrho_2}$ (ϱ_1, ϱ_2 geeignet gewählt).

IIIc. Keiner der bisher betrachteten Fälle tritt ein.

Ich wähle nun in jedem von diesen 6 Fällen zu jedem a_n ein $\mathfrak{a}_n$ aus (8) so, daß $|a_n - \mathfrak{a}_n|$ möglichst klein ausfällt; und setze $a_n = \mathfrak{a}_n + \alpha_n$.[24]) Wenn nun $(\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, so gilt folgendes:

Im Falle I besteht (5) aus einem einzigen Punkt.

Im Falle IIa ist (5) die Menge $A+\mathfrak{K}_\varrho$.

Im Falle IIb ist (5) die Menge $A+\mathfrak{L}_\sigma$.

Im Falle IIIa ist (5) die Menge $A+\mathfrak{K}_{\varrho_1}+\mathfrak{K}_{\varrho_2}$.

Im Falle IIIb ist (5) die Menge $A+\mathfrak{K}_{\varrho_1}+\mathfrak{L}_{\varrho_2}$.

Im Falle IIIc ist (5) die Menge aller Zahlen.

Von nun an wollen wir also $(\mathfrak{D}): \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ voraussetzen. Es liege erstens der Fall IIa vor; es sei $\varrho = |\varrho| e^{i\varphi_1}$. Wenn

$$(\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_1}),$$

so ist (5) die Menge $A+\mathfrak{L}_\varrho$; wenn $(\mathfrak{D}): \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_1})|$, aber $(\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_0})$ für ein reelles φ_0, so ist (5) die Menge $A+\mathfrak{K}_\varrho+\mathfrak{L}_{e^{i\varphi_0}}$.

Es liege zweitens der Fall IIIa vor. Wenn

$$(\mathfrak{A}): \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(\alpha_n e^{-i\varphi_0})$$

---

24) Im Fall I ist also $\alpha_n = a_n$; im Fall IIb wurde im § 8 geschrieben $i\alpha_n$ statt α_n; wegen Fall IIIb vgl. die Fußnote 23; im Fall IIIc ist $\alpha_n = 0$.

für ein reelles φ_0, für welches die Gleichung $se^{i\varphi_0}=r'\varrho_1+r''\varrho_2$ durch ein reelles s und ganze r', r'' mit $|r'|+|r''|>0$ befriedigt werden kann, so ist (5) die Menge $A+\mathfrak{K}\varrho_1+\mathfrak{K}\varrho_2+\mathfrak{L}e^{i\varphi_0}$.

In allen übrigen denkbaren Fällen ist (5) die Menge aller komplexen Zahlen.

Résumé.

Sur le changement de l'ordre des termes dans les séries infinies.

Par VOJTĚCH JARNÍK.

Soit

$$a_1+a_2+\ldots\ldots \tag{1}$$

une série infinie; nous appelons „ensemble limite de la série (1)" l'ensemble de toutes les valeurs limites de la suite

$$s_1, s_2 \ldots\ldots \; (s_n=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n).$$

Nous désignons par $M\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ la somme des ensembles limites de toutes les séries, provenantes de (1) par un changement quelconque de l'ordre des termes. C'est un fait aisément à demontrer qu'il existe une série $b_1+b_2+\ldots\ldots$, provenante de (1) par un changement de l'ordre de ses termes et dont l'ensemble limite est précisement égal à $M\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$; ce qui donne à $M\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ une interprétation bien intuitive. L'ensemble $M\,(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ jouit de quelques propriétés bien simples, dont la discussion complète (dans le cas où la suite $a_1, a_2, \ldots\ldots$ est bornée) fait l'objet principal du mémoire présent.
