Vojtěch Jarník

O funkcích první třídy Baireovy

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 35 (1926), No. 2, 13 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500439

O funkcích první třídy Baireovy.

Napsal

Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 8. ledna 1926.

§ 1. Úvod.

Budiž P dokonalé ohraničené množství bodové k rozměrného prostoru euklidovského ($k \geqq 1$). Říkáme, že funkce[1]) k proměnných $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, definovaná na P, jest na P funkcí třídy 1, lze-li nalézti posloupnost funkcí $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ($n = 1, 2, \ldots$ definovaných na P, spojitých na P a takových že

$$\lim_{n=\infty} f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

ať je bod $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ kterýkoliv bod z P.[2]) Při definici funkce, limity a spojitosti připouštím též hodnoty $+\infty$ a $-\infty$, jak je zvykem v teorii reálných funkcí. Bod o souřadnicích $x_1, x_2, \ldots, x_k$ značím $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ nebo kratčeji $[x]$; obdobně místo $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ píši $f([x])$ a pod. Rovnice $[x] = [y]$ značí, že jest splněno k rovnic $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$); je-li však aspoň pro jednu hodnotu i ($i = 1, 2, \ldots, k$) platna nerovnost $x_i \neq y_i$, píši $[x] \neq [y]$.

Konečně značím $$|[x] - [y]| = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|.$$

Cílem tohoto pojednání jest důkaz věty:

Hlavní věta. *Budiž dána funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ na dokonalém ohraničeném množství P. Aby funkce $f(x_1, x_2 \ldots, x_k) = f([x])$ byla funkcí třídy 1 na P, jest nutno a stačí, aby existovala fukce $2k$ proměnných $F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k; x_1'', x_2'', \ldots, x_k'') = F([x']; [x''])$, jež má tyto vlastnosti:*

---

[1]) Všechny funkce, jež se zde vyskytují, jsou reálné funkce reálných proměnných.

[2]) Podle této definice patří funkce spojité na P mezi funkce třídy 1 na P; někdy nazývají se funkce konečné a spojité na P funkcemi třídy 0 na P.

1. *$F([x']; [x''])$ jest definována, když bod $[x']$ i bod $[x'']$ leží v P a je-li mimo to $[x'] \neq [x'']$.*

2. *Je-li $[x]$ kterýkoliv bod z P, platí*

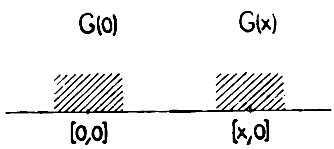
$$\lim F([x']; [x'']) = f([x]),$$

když body $[x']$, $[x'']$ konvergují na P k bodu $[x]$ tak, že jest stále $(x'_i - x_i)(x''_i - x_i) \leqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots k$ a mimo to $[x'] \neq [x'']$.

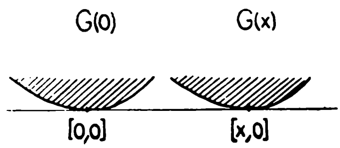
Důkaz této věty jest podán v § 2 a v § 3. V § 4 odvozuji dvě aplikace hlavní věty; první z nich (věta 3.) dokázal jsem již dříve.[3] Hlavní obsah druhé aplikace (věty 4. až 8.) lze vysloviti (ne zcela přesně) asi takto: Funkce $F(x', x'')$ budiž definována po jedné (třeba horní) straně úsečky $x'' = 0$, $a \leqq x' \leqq b$ $(b > a)$. Budiž $G(0)$ jistý obor v rovině (x', x''), $G(x)$ obor, který vznikne z $G(0)$ posunutím o délku x ve směru osy x'. Nechť pro $a \leqq x \leqq b$ existuje

$$(\alpha) \qquad \lim F(x', x'') = f(x),$$

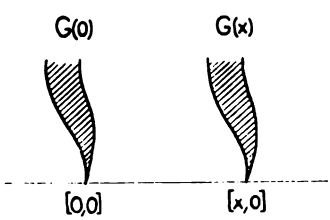
když bod $[x', x'']$ konverguje k bodu $[x, 0]$ v oboru $G(x)$. Je-li obor $G(0)$ celá půlrovina $x'' > 0$ (viz obr. 1), jest $f(x)$ funkce spojitá pro $a \leqq x \leqq b$ a naopak lze každou spojitou funkci takto vytvořiti (věta 4. a 5.) Zúžím-li obor $G(0)$ libovolně málo tak, že jej omezím dvěma spojitými křivkami (β) $x' = \varphi_1(x'')$, $x' = \varphi_2(x'')$, probíhajícími v půlrovině $x'' > 0$, končícími v bodě $[0, 0]$, jež nemají pro $x'' > 0$ bodů společných, rozšíří se obor funkcí $f(x)$, definovatelných pomocí (α), právě na obor všech funkcí třídy 1 (viz obr. 2.); zužuji-li obor $G(0)$ dále tak, že křivky (β) volím libovolně „blízko“ vedle sebe (obr. 3.), nemění se obor funkcí $f(x)$, definovatelných rovnicí (α) (věta 6. a 7.). Redukuje-li se konečně obor $G(0)$ na spojitou křivku



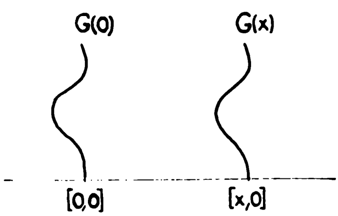
Obr: 1.



Obr: 2.



Obr: 3.



Obr: 4.

$x' = \varphi(x'')$, probíhající v půlrovině $x'' > 0$ a končící v bodě $[0, 0]$ (obr. 4), rozšíří se obor funkcí, definovatelných pomocí (α), na obor *všech* funkcí $f(x)$, definovaných pro $a \leqq x \leqq b$ (věta 8).

---

[3]) *O derivaci funkcí jedné proměnné*, Rozpravy 32, č. 5 (1923); methoda § 3. předložené práce jest zobecněním metody onoho pojednání.

§ 2. Důkaz, že podmínka vyřčená jest nutná.

Dokažme především, že podmínka, vyslovená v hlavní větě, jest podmínka nutná; t. j. dokažme tuto větu:

Věta 1. *Budiž dána na množství dokonalém a ohraničeném P funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, jež je funkcí třídy 1 na P. Potom existuje funkce $F([x'];[x''])$, definovaná, když $[x']$ a $[x'']$ leží na P a když mimo to $[x'] \neq [x'']$ a taková, že*

$$\lim F([x'];\ [x'']) = f([x]),$$

kdež $[x]$ je libovolný bod z P, konvergují-li $[x']$, $[x'']$ ku $[x]$ po množství P tak, že je stále $(x'_i - x_i)(x''_i - x_i) \leqq 0$ a mimo to $[x'] \neq [x'']$.

Důkaz. Transformace

$$(1)\ \begin{cases} z^* = \dfrac{z}{1+|z|}, \text{ je-li } z \text{ konečné;} \\ z^* = +1, \text{ je-li } z = +\infty;\ z^* = -1, \text{ je-li } z = -\infty \end{cases}$$

přiřazuje, jak snadno lze nahlédnouti[4]), množství $-\infty \leqq z \leqq +\infty$ vzájemně jednoznačně a spojitě množství $-1 \leqq z^* \leqq +1$.

Podle předpokladu existuje posloupnost funkcí $f_n([x])$, spojitých na P, taková, že na P platí

$$\lim_{n=\infty} f_n([x]) = f([x]).$$

Proveďme na funkce $f([x])$, $f_n([x])$ transformaci (1); tím dostanu funkce $f^*([x])$, $f_n^*([x])$, jejichž prostá hodnota na P je nejvýše rovna 1. Mimo to jsou (následkem spojitosti transformace (1)) funkce $f^*_n([x])$ spojité na P — a tedy stejnoměrně spojité na P — a platí

$$(2)\ \lim_{n=\infty} f^*_n([x]) = f^*([x]).$$

Budiž nyní $n \geqq 1$, n celistvé; označme znakem η_n každé číslo, hovící těmto požadavkům:

1. $0 < \eta_n < \dfrac{1}{n}$

2. $|f^*_n([x']) - f^*_n([x''])| < \dfrac{1}{n}$ pro všechny body $[x']$, $[x'']$ z P,

pro něž $|[x'] - [x'']| < \eta_n$. Ke každému n existuje aspoň jedno η_n, ježto f^*_n jsou funkce stejnoměrně spojité na P. Položme

$$H_n = \frac{\text{horní hranice čísel } \eta_n}{2};$$

patrně patří H_n také mezi čísla η_n. H_n je zcela určitá funkce čísla n a platí

$$\lim_{n=\infty} H_n = 0 \ \left(\text{neboť } 0 < H_n \leqq \frac{1}{2n}\right).$$

Definujme nyní funkci $F^*([x'];\ [x''])$ takto:

---

[4]) Viz na př. R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues* (Paris, Gauthier-Villars, 1905), str. 121—122.

1*

Buďtež $[x']$, $[x'']$ dva bodv z P, $[x'] \neq [x'']$;

1. Je-li $|[x'] - [x'']| \geqq H_1$, položme $F^* ([x']; [x'']) = 0$;

2. Je-li $|[x'] - [x'']| < H_1$, potom existuje pouze konečný počet čísel n takových, že

$$(3) \quad |[x'] - [x'']| < H_n;$$

budiž $n(|[x'] - [x'']|)$ největší číslo n, pro něž platí (3); položme pak

$$(4) \quad F^* ([x']; [x'']) = f^*_{n(|[x'] - [x'']|)} ([x']).$$

Číslo $n(|[x'] - [x'']|)$ jest jistá funkce proměnné $|[x'] - [x'']|$, jež patrně roste do nekonečna, když $|[x'] - [x'']|$ konverguje k 0.

Budiž nyní $[x]$ jistý bod z P, a nechť jsou $[x']$, $[x'']$ dva bodv z P, pro něž platí

$$(5) \quad [x'] \neq [x''], \ (x'_i - x_i)(x''_i - x_i) \leqq 0, \ i = 1, 2, \ldots, k;$$

buďte dále body $[x']$, $[x'']$ již tak blízko $[x]$, že $|[x'] - [x'']| < H_1$; potom platí (4), a tedy

$$(6) \quad \begin{aligned} &|F^* ([x']; [x'']) - f^* ([x])| \leqq \\ &|f^*_{n(|[x'] - [x'']|)} ([x']) - f^*_{n(|[x'] - [x'']|)} ([x])| \\ &+ |f^*_{n(|[x'] - [x'']|)} ([x]) - f^* ([x])|. \end{aligned}$$

Ježto podle (5) je $|[x'] - [x]| \leqq |[x'] - [x'']| < H_{n(|[x'] - [x'']|)}$, je první sčítanec na pravé straně nerovnosti (6) menší než $\dfrac{1}{n(|[x'] - [x'']|)}$.

Když nyní body $[x']$, $[x'']$ konvergují k $[x]$ tak, že stále platí (5), konverguje $|[x'] - [x'']|$ k 0, tedy $n(|[x'] - [x'']|)$ roste do nekonečna; tedy konverguje první sčítanec na pravé straně nerovnosti (6) k 0 a podle (2) i druhý sčítanec; t. j. $F^* ([x']; [x''])$ konverguje k $f^* ([x])$.

Z konstrukce funkce F^* je patrno, že prostá hodnota funkce F^* jest nejvýše rovna 1; mohu tedy pomocí transformace (1) přejíti od funkce F^* k jisté funkci $F([x']; [x''])$. Ze spojitosti transformace (1) jest pak patrno, že platí

$$\lim F ([x']; [x'']) = f ([x]),$$

jestliže body $[x']$, $[x'']$ z množství P konvergují k bodu $[x]$ z množství P tak, že stále platí (5). Tím je však 1. věta dokázána.

§ 3. **Důkaz, že podmínka vyřčená je postačující.**

Abychom dokázali hlavní větu, stačí, dokážeme-li ještě, že podmínka v ní uvedená je postačující, t. j. dokážeme-li tuto větu:

Věta 2. Předpoklad: *Budiž dána funkce $f([x]) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ na dokonalém ohraničeném množství P. Budiž dále $F(x'_1, \ldots, x'_k; x''_1, \ldots, x''_k) = F([x']; [x''])$ funkce, definovaná, je-li $[x']$ v P, $[x'']$ v P a $[x'] \neq [x'']$. Nechť platí dále*

$$(7) \qquad \lim F ([x']; [x'']) = f ([x]),$$

kde $[x]$ *je libovolný bod z* P, *konvergují-li body* $[x']$, $[x'']$ *po množství* P *k bodu* $[x]$ *tak, že jest stále* $[x'] \neq [x'']$, $(x'_i - x_i)\ (x''_i - x_i) \leq 0\ (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Tvrzení: *Potom jest* $f([x])$ *funkcí třídy* 1 *na* P.

Ukáži nejprve, že stačí, dokážeme-li větu 2. za předpokladu, že funkce f, F jsou ohraničené. Buďtež tedy f, F dvě funkce, hovící předpokladům věty 2. Pomocí transformace (1) sestrojím z nich nové funkce ohraničené f^*, F^*, jež v důsledku spojitosti transformace (1) hoví opět předpokladům věty 2, píšeme-li v ní resp. f^*, F^* místo f, F. Předpokládáme-li tedy, že věta 2. byla již dokázána pro funkce ohraničené, vidíme, že f^* jest funkcí třídy 1 na P. Existuje tedy posloupnost funkcí $f^*_n([x])$, spojitých na P, taková, že $\lim\limits_{n=\infty} f^*_n([x]) = f^*([x])$.

Položme $g^*_n = f^*_n$ pro ty body $[x]$, pro něž $-1 < f^*_n < 1$; $g^*_n = 1$ pro ty body $[x]$, pro něž $f^*_n \geqq 1$ a $g^*_n = -1$ pro ty body $[x]$, pro něž $f^*_n \leqq -1$. Funkce g^*_n jsou patrně opět spojité, $|g^*_n| \leq 1$ a — ježto $|f^*| \leq 1$ — platí patrně

$$\lim_{n=\infty} g^*_n([x]) = f^*([x]).$$

Pomocí transformace (1) dostávám z g^*_n funkce g_n, jež jsou opět spojité a pro něž platí

$$\lim_{n=\infty} g_n([x]) = f([x]);$$

jest tedy vskutku $f([x])$ třídy 1 na P, jak bylo dokázati.

Připomínám ještě tuto větu Baireovu:[5]) Aby $f([x])$ byla funkcí třídy 1 na P, jest nutno a stačí, aby byla bodově nespojitá na každém množství dokonalém P^*, obsaženém v P.

Abychom dokázali větu 2, stačí tedy dokázati větu:

Věta 2$^{\text{bis}}$. Předpoklad: $f([x])$, $F([x']; [x''])$ *buďtež dvě funkce ohraničené, hovící předpokladům věty* 2.

Tvrzení: $f([x])$ *je bodově nespojitá na každém množství dokonalém* P^*, *obsaženém v* P.

Než přistoupím k důkazu věty 2$^{\text{bis}}$, podám několik definic. Budiž $[x]$ libovolný bod k- rozměrného euklidovského prostoru; ϱ číslo kladné. Potom nazvu množství všech bodů $[x']$, pro něž $0 \leq |[x'] - [x]| < \varrho$ *okolím* bodu $[x]$ o poloměru ϱ a označím je $O([x], \varrho)$. Budiž dále $[x]$ bod jistého dokonalého množství P^*; bod $[x]$ je ovšem bodem zhuštění množství P^*. Mohou pak nastati tyto dva případy: buď existují v každém okolí bodu $[x]$ body $[x']$ z množství P^*, pro něž jsou splněny všechny nerovnosti $x'_i \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; potom nazvu bod $[x]$ bodem typu (α) na P^*. V opačném případě nazvu bod $[x]$ bodem typu (β) na P^*. Budiž nyní dán bod $[x]$ z P^* a jisté jeho okolí $O([x], \varrho)$; jsou-li všechny body z $O([x], \varrho)$,

[5]) Viz Baire, l. c.[4]); množství P^* může ovšem býti identické s P.

které patří ku P^*, typu (α) na P^*, nazvu $O\ ([x], \varrho)$ okolím typu (α) na P^*, jinak okolím typu (β) na P^*.

Hlavní pomůckou při důkazu věty 2^{bis} je tato pomocná věta:

1. pomocná věta. *Funkce $f\ ([x])$, $F\ ([x']; [x''])$ nechť hoví předpokladům věty 2^{bis}. Budiž ε libovolné číslo kladné, P^* libovolné množství dokonalé obsažené v P, $O\ ([x], \varrho)$ libovolné okolí typu (α) na P^*, při čemž $[x]$ jest bod z P^*. Potom existuje v $O\ ([x], \varrho)$ jistý bod z P^*, v němž je oscilace funkce $f\ ([x])$ na P^* nejvýše rovna ε.*

Důkaz. Kdyby tato věta byla nesprávná, bylo by možno sestrojiti dvě funkce f, F, hovící předpokladům věty 2^{bis}, pro něž byl by správný tento výrok:

Výrok A. *Existuje jisté číslo $\varepsilon_0 > 0$, jisté množství dokonalé P_0^* obsažené v P, jistý bod $[x^0]$ na P_0^* a jisté okolí $O\ ([x^0], \varrho_0)$ typu (α) na P_0^* takové, že v každém bodě z množství P_0^*, který leží v $O\ ([x^0], \varrho_0)$, je oscilace funkce $f\ ([x])$ na P_0^* větší než ε_0.*

Připusťme, že výrok A je správný; z toho vyvodíme spor.

Sestrojím především posloupnost bodů

$$[x^1],\ [y^1],\ [x^2],\ [y^2], \ldots \tag{8}$$

která má tyto vlastnosti:

1. $[x^1] = [x^0]$;

2. všechny body $[x^n]$, $[y^n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ leží v P_0^* a současně v $O\ ([x^0], \varrho_0)$;

3. pro $n = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, k$ platí

$$|y_i^{n+1} - x_i^{n+1}| < \frac{1}{2}|x_i^{n+1} - x_i^n| < \frac{1}{4}|y_i^n - x_i^n|;$$

4. pro $n = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, k$ platí

$$sgn\ (x_i^{n+1} - x_i^n) = sgn\ (y_i^n - x_i^n) = \pm 1^{6)}$$

5. pro $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$|f\ ([x^n]) - f\ ([x^{n+1}])| > \frac{\varepsilon_0}{4},\ |F\ ([x^n]; [y^n]) - f\ ([x^n])| < \frac{\varepsilon_0}{16}.$$

Abychom dokázali existenci takové posloupnosti, předpokládjeme, že jsme již pro jisté $m \geqq 1$ sestrojili body $[x^1], [y^1], \ldots [x^{m-1}], [y^{m-1}], [x^m]$ tak, že platí:

1′) $[x^1] = [x^0]$;

2′.) všechny tyto body leží v P_0^* a v $O\ ([x^0], \varrho_0)$;

3′.) podmínky 3., 4., 5. jsou splněny pro všechna $n < m$.

Ukáži pak, že lze sestrojiti body $[y^m]$, $[x^{m+1}]$ tak, že body $[x^1], [y^1], \ldots, [x^m], [y^m], [x^{m+1}]$ opět splňují podmínky 1′, 2′, 3′, píšeme-li v nich $m + 1$

---

[6]) Píši $sgn\ a = \begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$, je-li resp. $a \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0$.

místo m. Ježto pak pro $m = 1$ jest volbou $[x^1] = [x^0]$ vyhověno všem požadavkům $1'$, $2'$, $3'$, bude tím existence posloupnosti (8), mající vlastnosti 1. až 5. dokázána pomocí úplné indukce.

Body $[y^m]$, $[x^{m+1}]$ sestrojím takto:

Ježto bod $[x^m]$ leží v $P_0{}^*$ a v O $([x^0], \varrho_0)$, je $[x^m]$ bodem typu (α) na $P_0{}^*$; existuje tedy jistá posloupnost bodů navzájem ruzných

(9) $$[\xi^1], [\xi^2], \ldots$$

ležících na $P_0{}^*$ a v O $([x^0], \varrho_0)$, konvergujících k $[x^m]$ taková, že pro všechna $h = 1, 2 \ldots$ a pro $i = 1\ 2, \ldots, k$ platí $\xi_i{}^h \neq x_i{}^m$. Ježto systém k čísel $sgn\ (\xi_i{}^h - x_i{}^m)$ (h pevné, $i = 1, 2, \ldots, k$) je identický s některým z 2^k systémů $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, kde $\tau_i = \pm 1$, je patrno, že existuje v posloupnosti (9) jistá částečná posloupnost

(10) $$[\eta^1], [\eta^2], \ldots$$

taková, že platí (11) $sgn\ (\eta_i{}^h - x_i{}^m) = sgn\ (\eta_i{}^1 - x_i{}^m) = \pm 1$ pro všechna $h = 1, 2, \ldots$ a pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Následkem předpokládané platnosti rovnice (7) jest $\lim\limits_{h=\infty} F\ ([x^m]; [\eta^h]) = f\ ([x^m])$; lze tedy zvoliti v posloupnosti (10) jistý bod — označme jej $[y^m]$ — tak, že

(12) $$|\, F\ ([x^m];\ [y^m]) - f\ ([x^m])\ | < \frac{\varepsilon_0}{16}$$

(13) $$|\, y_i{}^m - x_i{}^m\ | < \frac{1}{2}\ |\, x_i{}^m - x_i{}^{m-1}\, | \text{ pro } i = 1, 2, \ldots k, \text{ je-li } m > 1.$$

Dále zvolím v posloupnosti (10) jistý bod — označme jej $[\eta]$ — tak, že

(14) $$|\, \eta_i - x_i{}^m\, | < \frac{1}{2}\ |\, y_i{}^m - x_i{}^m\ |\ (i = 1, 2, \ldots k).$$

Podle (11) ovšem platí

(15) $$sgn\ (\eta_i - x_i{}^m) = sgn\ (y_i{}^m - x_i{}^m) = \pm 1.$$

Ježto bod $[\eta]$ leží v $P_0{}^*$ a v O $([x^0], \varrho_0)$, je oscilace funkce $f\ ([x])$ v bodě $[\eta]$ na $P_0{}^*$ větší než ε_0 a lze tedy nalézti jistý bod $[\xi]$ z $P_0{}^*$ tak blízko bodu $[\eta]$, že bod $[\xi]$ leží též v O $([x^0], \varrho_0)$, že platí

(16) $$|\, \xi_i - x_i{}^m\ | < \frac{1}{2}\ |\, y_i{}^m - x_i{}^m\, |,$$

(17) $$sgn\ (\xi_i - x_i{}^m) = sgn\ (y_i{}^m - x_i{}^m) = \pm 1$$

a mimo to tak, že jest

(18) $$|\, f\ ([\xi]) - f\ ([\eta])\ | > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Označme znakem $[x^{m+1}]$ onen z dvou bodů $[\xi]$, $[\eta]$, pro nějž platí

(19) $$|\, f\ ([x^m]) - f\ ([x^{m+1}])\ | > \frac{\varepsilon_0}{4};$$

to platí podle (18) skutečně aspoň pro jeden z těchto dvou bodů. Body $[y^m]$, $[x^{m+1}]$ leží v P_0^* a v O $([x^0], \varrho_0)$ a vztahy (12), (13), (14), (15), (16), (17), (19) ukazují, že tyto body mají vlastnosti požadované. Tím je tedy existence posloupnosti (8), mající vlastnosti 1. až 5. dokázána.

Nyní dojdeme snadno ke sporu takto: Z vlastnosti 3. plyne pro $i = 1, 2, \ldots, k$ existence limit $\lim\limits_{n=\infty} x_i^n = \lim\limits_{n=\infty} y_i^n = z_i$.

Z vlastnosti 3. a 4. plyne pak toto: Ze vztahů $sgn\,(x_i^{n+1} - x_i^n) = sgn\,(y_i^n - x_i^n) = \pm 1$, $|x_i^{n+1} - x_i^n| < \frac{1}{2}\,|y_i^n - x_i^n|$ plyne

$$sgn\,(y_i^n - x_i^{n+1}) = sgn\,(x_i^{n+1} - x_i^n) = +1. \tag{20}$$

Ze vztahu $|y_i^{n+1} - x_i^{n+1}| < \frac{1}{2}\,|x_i^{n+1} - x_i^n|$ plyne

$$sgn\,(y_i^{n+1} - x_i^n) = sgn\,(x_i^{n+1} - x_i^n) = \pm 1; \tag{21}$$

ze vztahu $|x_i^{n+1} - x_i^n| < \frac{1}{2}\,|y_i^n - x_i^n|$ konečně plyne $|y_i^{n+1} - x_i^{n+1}|$

$$< \frac{1}{4}\,|y_i^n - x_i^n| < \frac{1}{2}\,|y_i^n - x_i^{n+1}|, \text{ a tedy}$$

$$sgn\,(y_i^n - y_i^{n+1}) = sgn\,(y_i^n - x_i^{n+1}) = sgn\,(x_i^{n+1} - x_i^n) = \pm 1 \tag{22}$$

(podle (20)). Z (21) a (22) však plyne

$$sgn\,(y_i^n - y_i^{n+1}) = sgn\,(y_i^{n+1} - x_i^n) = \pm 1. \tag{23}$$

Vyznačíme-li tedy na ose číselné body x_i^n, y_i^n $(n = 1, 2, \ldots)$, leží body x_i^{n+1}, y_i^{n+1} podle (20) a (23) uvnitř intervalu, jehož koncové body jsou x_i^n, y_i^n. Bod z_i jest tedy vnitřním bodem všech těch intervalů, a platí tedy

$$(x_i^n - z_i)\,(y_i^n - z_i) < 0. \tag{24}$$

Body $[x^n]$, $[y^n]$ jsou však body množství P, jež konvergují k bodu $[z]$; jest tedy i bod $[z]$ bodem množství P. Podle předpokladu (7) a vzhledem k (24) musí tedy býti

$$\lim_{n=\infty} F\,([x^n];\ [y^n]) = f\,([z]). \tag{25}$$

Ježto však z vlastnosti 5. plyne okamžitě

$$|\,F\,([x^n];\ [y^n]) - F\,([x^{n+1}];\ [y^{n+1}])\,| > \frac{\varepsilon_0}{8}\ (n = 1, 2, \ldots),$$

nemůže limita v (25) existovati, což poskytuje hledaný spor. Tím je tedy 1. pomocná věta dokázána.

2. pomocná věta. *Funkce f a F nechť hoví předpokladům věty 2^{bis}. Budtež dány: libovolné kladné číslo ε, libovolné dokonalé množství P^* obsažené v P, libovolný bod $[x]$ z P^* a libovolné okolí O $([x], \varrho)$ bodu $[x]$. Potom existuje v O $([x], \varrho)$ jistý bod z P^*, v němž je oscilace tunkce f $([x])$ na P^* nejvýše rovna ε.*

Důkaz. 2 pom. věta liší se od 1. pom. větv jen tím, že neobsahuje předpoklad, že O $([x], \varrho)$ je typu (α) na P^*. Je li $k = 1$, je ovšem každý bod z P^* typu (α) na P^*, a tedy je 2. pomocná věta pro $k = 1$ již dokázána. Abychom ji dokázali obecně, užijeme úplné indukce: budeme předpokládati, že je již dokázána pro $k < k_0$ a dokážeme ji pro $k = k_0$. Budiž tedy $k = k_0$, a budiž dáno ε, P^*, $[x]$, $O([x], \varrho)$. Buď je $O([x], \varrho)$ typu (α) na P^* a potom existuje podle 1. pom. věty v $O([x], \varrho)$ bod z P^*, v němž je oscilace $f([x])$ na P^* nejvýše rovna ε. Nebo je $O([x], \varrho)$ typu (β) na P^*; potom existuje v $O([x], \varrho)$ bod $[x^0]$ z P^*, jenž je typu (β) na P^*. Existuje tedy jisté okolí $O([x^0], \sigma)$[7]) takové, že pro každý bod $[\xi]$, jenž leží v P^* a současně v $O([x^0], \sigma)$, je splněna aspoň jedna z rovnic $\xi_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, k_0)$; označme r_ξ počet těchto rovnic, jež jsou splněny pro bod $[\xi]$; je patrně pro uvažované body $1 \leqq r_\xi \leqq k_0$ (rovnice $r_\xi = k_0$ platí jen pro $[\xi] = [x^0]$). Označme r dolní hranici čísel r_ξ pro všechny $[\xi]$, ležící současně v P^* a v $O([x^0], \sigma)$; jest patrně $1 \leqq r < k_0$. Budiž $[y]$ jeden z bodů, ležících v P^* a v $O([x^0], \sigma)$, pro nějž $r_y = r$. Budiž na př.

$$y_1 = x^0_1,\ y_2 = x^0_2, \ldots, y_r = x^0_r,\ y_{r+1} \neq x^0_{r+1}, \ldots\ y_{k_0} \neq x^0_{k_0}.$$

Zvolme okolí $O([y], \tau)$ tak malé, že leží v $O([x^0], \sigma)$ a že pro všechny body $[\xi]$ z P^*, ležící v $O([y], \tau)$ platí $\xi_i \neq x^0_i$ $(i = r + 1, r + 2, \ldots, k_0)$. Potom jsou tedy pro všechny tyto body $[\xi]$ splněny rovnice $\xi_i = x^0_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Budiž M uzavřená obálka průseku množství bodových P^* a $O\left([y], \frac{\tau}{2}\right)$; M jest patrně dokonalé množství, obsažené v P^* a v $O([x^0], \sigma)$. Funkce $f([x])$, $F([x']; [x''])$ můžeme patrně považovati, pokud body $[x]$, $[x']$, $[x'']$ leží v M, za funkce $k_0 - r$ resp. $2(k_0 - r)$ proměnných: $\bar{f}(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{k_0})$, $\bar{F}(x'_{r+1}, \ldots, x'_{k_0};\ x''_{r+1}, \ldots, x''_{k_0})$.

Probíhá-li bod $[x]$ množství M, probíhá bod $[x_{r+1}, \ldots, x_{k_0}]$ patrně jisté množství dokonalé $\bar{M}$ prostoru $(k_0 - r)$ rozměrného. Snadno nahlédneme, že pro funkce $\bar{f}$, $\bar{F}$ jsou splněny předpoklady věty 2^{bis}, píšeme-li v nich $\bar{f}$, $\bar{F}$, $\bar{M}$, $k_0 - r$ místo f, F, P, k. Ježto předpokládáme, že 2. pom. věta je správná pro $k = k_0 - r$, tedy existuje v okolí bodu $[y_{r+1}, \ldots, y_{k_0}]$ o poloměru $\frac{\tau}{2}$ bod $[\xi_{r+1}, \ldots, \xi_{k_0}]$ množství $\bar{M}$, v němž je oscilace funkce $\bar{f}$ na $\bar{M}$ nejvýše rovna ε. Tedy je patrně oscilace funkce f na M v bodě $[x_1^0, \ldots, x_r^0, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_{k_0}]$ nejvýše rovna ε; ježto pak tento bod je vnitřním bodem okolí $O\left([y], \frac{\tau}{2}\right)$ a ježto M je uzavřená obálka průseku množství P^* a $O\left([y], \frac{\tau}{2}\right)$, je patrně i oscilace funkce f na P^* v bodě $[x_1^0, \ldots, x^0_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_{k_0}]$ nejvýše rovna ε. Ježto však bod $[x_1^0, \ldots, x^0_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_{k_0}]$ leží v $O([x], \varrho)$, je tím 2. pomocná věta dokázána.

Důkaz věty 2^{bis}. Máme dokázati toto: f, F nechť hoví předpokladům věty 2^{bis}. Budiž dáno libovolné dokonalé množství P^* obsažené v P, libovolný bod $[x]$ z P^* a libovolné okolí $O([x], \varrho)$ bodu $[x]$. Jest dokázati, že

[7]) Zvolím σ hned tak malé, aby okolí $O([x^0], \sigma)$ leželo v $O([x], \varrho)$.

v $O([x], \varrho)$ leží bod množství P^*, v němž je $f([x])$ spojitá na P^*. Abychom to dokázali, sestrojme posloupnost bodů $[x^1], [x^2], \ldots$ z P^* a jejich okolí $O([x^1], \varrho_1), O([x^2], \varrho_2), \ldots$ takto: podle 2. pom. věty existuje v $O([x], \varrho)$ bod $[x^1]$ z P^*, v němž je oscilace f na P^* menší než 1. Zvolme ϱ_1 tak malé, že uzavřená obálka okolí $O([x^1], \varrho_1)$ leží v $O([x], \varrho)$, že $\varrho_1 < 1$ a že oscilace funkce f na průseku $O([x^1], \varrho_1)$ s P^* je menší než 1. Jsou-li body $[x^1], \ldots [x^n]$ z P^* a okolí $O([x^1], \varrho_1), \ldots, O([x^n], \varrho_n)$ již voleny, volím $[x^{n+1}]$ a $O([x^{n+1}], \varrho_{n+1})$ takto: podle 2. pom. věty existuje v $O([x^n], \varrho_n)$ bod $[x^{n+1}]$ z P^*, v němž je oscilace f na P^* menší než $\frac{1}{n+1}$; zvolme ϱ_{n+1} tak malé, že uzavřená obálka okolí $O([x^{n+1}], \varrho_{n+1})$ leží v $O([x^n], \varrho_n)$, že $\varrho_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ a že oscilace funkce f na průseku $O([x^{n+1}], \varrho_{n+1})$ s P^* je menší než $\frac{1}{n+1}$. Označme znakem O_n množství $O([x^n], \varrho_n)$ a znakem $\overline{O}_n$ uzavřenou obálku množství O_n. Jest patrno, že $\overline{O}_{n+1}$ je obsaženo v O_n; ježto $\lim\limits_{n=\infty} \varrho_n = 0$, mají $\overline{O}_1, \overline{O}_2, \ldots$ a tedy i $O_1, O_2, \ldots$ jediný společný *vnitřní* bod $[z]$. Tento bod je bodem zhuštění množství P^* a tedy leží v P^*. Ježto oscilace funkce f na průseku množství O_n a P^* je menší než $\frac{1}{n}$, je patrně oscilace funkce f v bodě $[z]$ na P^* rovna nule, t. j. f je spojitá v $[z]$ na P^*. Ježto však bod $[z]$ leží v $O([x], \varrho)$, je tím věta 2^{bis} dokázána, a tedy i hlavní věta.

§ 4. Užití.

Ke konci podám ještě dvě aplikace hlavní věty. Bylo by možno, formulovati je obecněji; vyslovuji je raději v jednoduchých případech, kde jejich formulace je pregnantnější.

Věta 3. *Nechť je konečná funkce $f(x)$ jedné proměnné definována na dokonalém ohraničeném množství P; nechť pro každé x z P existuje limita (konečná nebo nekonečná) $\lim \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(x)$, když x' konverguje k x po množství P. Potom je $f'(x)$ funkcí třídy 1 na P.*

Důkaz: Z předpokladů snadno plyne, že $\lim \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f'(x)$, konvergují-li x' a x'' ku x po množství P tak, že stále platí $x' \neq x''$, $(x' - x)(x'' - x) \leq 0$. Tedy je věta 3. bezprostředním důsledkem věty 2.

Druhá aplikace týká se okrajových hodnot funkcí dvou proměnných; její obsah je dán větami 4.—8., jež následují. (Věty 4., 5., 8., jež jsou triviální, uvádím jen pro úplnost.)

Věta 4. *Budiž $b > a$, $c > 0$; funkce $F(x', x'')$ budiž definována pro*

(26) $a \leq x' \leq b$, $0 < x'' \leq c$ *a nechť existuje pro každé x $(a \leq x \leq b)$*

$$\lim F(x', x'') = f(x), \tag{27}$$

když $x' \to x$, $x'' \to 0$ *tak, že stále platí* (26); *potom je* $f(x)$ *spojitá pro* $a \leqq x \leqq b$.

Důkaz. Budiž třeba $a < x_0 < b$, $f(x_0)$ konečné; ε budiž číslo kladné. Potom pro $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $0 < x'' < \delta(\varepsilon)$ platí $|F(x', x'') - f(x_0)| < \varepsilon$. Je-li tedy $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, je podle (27) také $|f(x) - f(x_0)| \leqq \varepsilon$, t. j. $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Podobně se dokáže tvrzení pro $f(x_0)$ nekonečné nebo pro $x_0 = a$, $x_0 = b$.

Věta 5. *Budiž* $b > a$, $c > 0$; $f(x)$ *budiž spojitá pro* $a \leqq x \leqq b$. *Potom lze nalézti funkci* $F(x', x'')$, *definovanou v oboru* (26) *tak, že* $\lim F(x', x'') = f(x)$, *když* $x' \to x$, $x'' \to 0$ *tak, že stále platí* (26).

Důkaz: triviální — položme $F(x', x'') = f(x')$.

Věta 6. *Budiž* $b > a$, $c > 0$. *Buďtež* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ *dvě funkce spojité pro* $0 \leqq y \leqq c$ *a nechť jest* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(y) > \varphi_1(y)$ *pro* $0 < y \leqq c$. *Funkce* $F(x', x'')$ *budiž definována v oboru*

$$0 < x'' \leqq c, \quad \varphi_1(x'') + a \leqq x' \leqq \varphi_2(x'') + b$$

a nechť existuje pro $a \leqq x \leqq b$ *limita*

$$\lim F(x', x'') = f(x), \tag{28}$$

když $x' \to x$, $x'' \to 0$ *tak, že stále jest*

$$0 < x'' \leqq c, \quad \varphi_1(x'') + x \leqq x' \leqq \varphi_2(x'') + x.$$

Potom je $f(x)$ *funkcí třídy 1 na intervalu* $a \leqq x \leqq b$.

Důkaz. Položme $\varphi(0) = \psi(0) = 0$;

$$\varphi(y) = \varphi_1(y), \quad \psi(y) = \varphi_1(y) + \frac{y}{c} \operatorname*{Min}_{y \leqq x \leqq c} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))$$

pro $0 < y \leqq c$. Potom jsou $\varphi(y)$, $\psi(y)$ spojité pro $0 \leqq y \leqq c$, $\varphi_1(y) = \varphi(y) < \psi(y) \leqq \varphi_2(y)$ pro $0 < y \leqq c$ a $\psi(y) - \varphi(y)$ jest stále rostoucí pro $0 \leqq y \leqq c$.

$F(x', x'')$ jest ovšem definována v celém oboru

$$0 < x'' \leqq c, \quad \varphi(x'') + a \leqq x' \leqq \psi(x'') + b \tag{29}$$

a platí (28), když $x' \to x$, $x'' \to 0$ v oboru

$$0 < x'' \leqq c, \quad \varphi(x'') + x \leqq x' \leqq \psi(x'') + x. \tag{30}$$

Zaveďme nové proměnné rovnicemi

$$\xi = x' - \psi(x''), \quad \eta = x' - \varphi(x''). \tag{31}$$

Ježto $\eta - \xi = \psi(x'') - \varphi(x'')$ je stále rostoucí funkce x'', jest x'' zcela určitou spojitou funkcí proměnných ξ, η; platí tedy totéž i o x'. Transformační vzorce (31) přiřazují tedy vzájemně jednoznačně obor (29) oboru

$$\xi \leqq b, \quad \eta \geqq a, \quad 0 < \eta - \xi \leqq \psi(c) - \varphi(c)$$

a obor (30) oboru

$$\xi \leqq x, \quad \eta \geqq x, \quad 0 < \eta - \xi \leqq \psi(c) - \varphi(c).$$

Definujme nyní funkci $\Phi(\xi, \eta)$ takto:

$$\Phi(\xi, \eta) = F(x', x''), \text{ je-li } a < \xi < \eta \leq b,$$

$$0 < \eta - \xi \leq \psi(c) - \varphi(c), \text{ kdež } x', x'' \text{ souvisejí s } \xi, \eta \text{ rovnicemi (31);}$$

$$\Phi(\xi, \eta) = 0, \text{ je-li}$$

$$a \leq \xi < \eta \leq b, \ \eta - \xi > \psi(c) - \varphi(c);$$

$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\eta, \xi), \text{ je-li } a \leq \eta < \xi \leq b.$$

Je tedy $\Phi(\xi, \eta)$ definováno, je-li

(32) $$a \leq \xi \leq b, \ a \leq \eta \leq b, \ \xi \neq \eta$$

a patrně platí

$$\lim \Phi(\xi, \eta) = f(x),$$

jestliže $\xi \to x, \eta \to x$, a platí-li stále (32) a $(\xi - x)(\eta - x) \leq 0$. Tedy jest podle věty 2. $f(x)$ funkcí třídy 1 v intervalu $a \leq x \leq b$.

Věta 7. *Budiž $b > a$, $c > 0$. $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ buďtež dvě funkce spojité pro $0 \leq y \leq c$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $0 < \varphi_2(y) - \varphi_1(y)$ pro $0 < y \leq c$; $f(x)$ budiž funkce třídy 1 pro $a \leq x \leq b$. Potom existuje funkce $F(x', x'')$, definovaná pro*

(33) $$0 < x'' \leq c, \ \varphi_1(x'') + a \leq x' \leq \varphi_2(x'') + b$$

a taková, že platí

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

když $x' \to x$, $x'' \to 0$ tak, že stále platí

(34) $$0 < x'' \leq c, \ \varphi_1(x'') + x \leq x' \leq \varphi_2(x'') + x.$$

Důkaz. Podle 1. věty lze nalézti funkci $\Phi(\xi, \eta)$ takovou, že

(35) $$\lim \Phi(\xi, \eta) = f(x),$$

když $\xi \to x$, $\eta \to x$ tak, že stále

$$a \leq \xi < \eta \leq b, \ (\xi - x)(\eta - x) \leq 0.$$

Definujeme ještě

$$\Phi(\xi, \eta) = f(a) \text{ pro } -\infty < \xi < a, \ a \leq \eta \leq b$$
$$\Phi(\xi, \eta) = f(b) \text{ pro } b < \eta < +\infty, \ a \leq \xi \leq b$$
$$\Phi(\xi, \eta) = 0 \quad \text{ pro } \xi < a, \ \eta > b.$$

Potom platí (35), když $\xi \to x$, $\eta \to x$ tak, že $\xi \leq b$, $\eta \geq a$, $\eta > \xi$, $(\xi - x)(\eta - x) \leq 0$.

Položme $\varphi(0) = \psi(0) = 0$,

$$\varphi(y) = \varphi_1(y), \ \psi(y) = \varphi_1(y) + \underset{0 < x \leq y}{Max} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))(1 + y).$$

Potom jsou $\varphi(y)$, $\psi(y)$ funkce spojité pro $0 \leq y \leq c$, $\psi(y) > \varphi_2(y) > \varphi_1(y) = \varphi(y)$ pro $0 < y \leq c$, $\psi(y) - \varphi(y)$ jest stále rostoucí pro $0 \leq y \leq c$. Transformace

(36) $$\xi = x' - \psi(x''), \ \eta = x' - \varphi(x'')$$

zobrazuje podle úvahy, provedené při důkazu věty 6, obor

(37) $$0 < x'' \leq c,\ \varphi(x'') + a \leq x' \leq \psi(x'') + b$$

resp. obor

(38) $$0 < x'' \leq c,\ \varphi(x'') + x \leq x' \leq \psi(x'') + x\ (a < x \leq b)$$

vzájemně jednoznačně a spojitě na obor

(39) $$\xi \leq b,\ \eta \geq a,\ 0 < \eta - \xi \leq \psi(c) - \varphi(c)$$

resp. na obor

$$\xi \leq x,\ \eta \geq x,\ 0 < \eta - \xi \leq \psi(c) - \varphi(c).$$

Definujme nyní funkci $F(x', x'')$ rovnicí

$$F(x', x'') = \Phi(\xi, \eta),$$

když ξ, η jsou v oboru (39) a souvisejí-li x', x'' s ξ, η rovnicemi (36).

Potom jest patrně $F(x', x'')$ definováno v oboru (37) a tedy tím spíše v oboru (33), a platí

(40) $$\lim F(x', x'') = f(x),$$

když $x' \to x,\ x'' \to 0$ tak, že stále jest splněno (38); tedy tím spíše jest (40), když $x' \to x,\ x'' \to 0$ tak, že stále jest (34). Tím je věta 7. dokázána.

Věta 8. *Budiž $b > a, c > 0$; $\varphi(y)$ budiž funkce spojitá pro $0 \leq y \leq c$; $\varphi(0) = 0$. $f(x)$ budiž libovolná funkce, definovaná pro $a \leq x \leq b$. Potom lze nalézti funkci $F(x', x'')$ definovanou pro $0 < x'' \leq c,\ \varphi(x'') + a \leq x' \leq \varphi(x'') + b$ a takovou, že*

$$\lim F(x', x'') = f(x),$$

když $x' \to x,\ x'' \to 0$ tak, že stále jest

(41) $$0 < x'' \leq c,\ \varphi(x'') + x = x'.$$

Důkaz: triviální; stačí položit

$$F(x', x'') = f(x),$$

když x', x'' splňují (41).