Otakar Borůvka

O euklidovské geometrii

Věda a život II, 1935, 64-70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500293

O euklidovské geometrii.

OTAKAR BORŮVKA.

Tento článek jest prvním z několika populárních článků, v nichž budu psáti o geometrii euklidovské, analytické a neeuklidovské, sleduje ten cíl, abych jasně a přístupně a s jednoho hlediska vyložil především obsah a metodu těchto geometrií.

Mnoho se v poslední době mluvilo a psalo o geometrii *neeuklidovské*, zejména v souvislosti s proslulou teorií Einsteinovou; některá hesla a tvrzení, která s nádechem sensace proskočila do širokých vrstev, přispěla jenom k zmatení pojmů a někdy se zdála i protismyslná, jako na př. výrok, že k dané přímce lze bodem mimo ni ležícím vésti více než jednu rovnoběžku. Většina čtenářů uvítá tedy radostně výklad o této geometrii: proč však píšeme o geometrii euklidovské? Především proto, že k porozumění geometrie *ne*-euklidovské je potřeba vědět, co jest to geometrie *euklidovská*.

Namítne se mi, že o té není třeba psáti, poněvadž ji každý zná. Vždyť přece geometrie euklidovská je právě ta, jíž jsme se všichni učili již na škole měšťanské nebo na nižším stupni školy střední. Je to geometrie, jejíž poučky jsou nám běžné, tím více, že je vidíme realisovány v tom či onom tvaru v denním životě téměř na každém kroku. Na př. výrok, že horní hrana dveří tvoří s oběma hranami bočními pravé úhly, jestliže jsou tyto boční hrany stejně dlouhé a stojí kolmo na hraně spodní, jest realisací jedné a ostatně slavné poučky euklidovské geometrie. Avšak stačí zamysliti se jenom docela povrchně nad kteroukoli poučkou euklidovské geometrie, jak jsme se jí učili, abychom přiznali, že výklad i o této běžné — a snad právě proto — geometrii může býti užitečný. Zamysleme se na př. nad touto jednoduchou poučkou euklidovské geometrie: *Každé dvě různé přímky mají společný nejvýše jeden bod.* Tato poučka v každém z nás pravděpodobně vybaví představu obrazce, skládajícího se ze dvou čar, nakreslených podle pravítka, na př. na papíře a zdá se popisovati fakt, že se takové čáry protnou právě v jedné tečce anebo vůbec neprotnou, podle toho, jak jsme je nakreslili. Co však znamená na př. slovo *přímka* v této poučce? Znamená to slovo totéž co *přímá čára nakreslená podle pravítka?* Jestliže ano, pak patrně musíme po způsobu fysikálním definovati, podle jakého pravítka a čím a jak nakreslené přímé čáře říkáme přímka. Neboť jinak jsme ve zlé pochybnosti, zda sbírka pouček euklidovské geometrie popisuje vlastnosti obrazců, skládajících se na př. z čar, třeba několik centimetrů širokých, jimiž malíř pokojů zdobí naše příbytky anebo naopak obrazců, které nakreslíme na př. ostrou tužkou na hladkém papíře a které přece vypadají hodně odlišně od malířových. Jistě každý z čtenářů alespoň tuší, že slovo přímka v hořejší poučce znamená něco jiného než *přímá čára nakreslená podle pravítka* a že si takovou čarou pojem přímky jenom realisujeme. Asi v tom smyslu, jako pojem tónu komorního *a* realisujeme třeba na houslích anebo na flétně a pod. Nuže opět: Co jest přímka po př. bod a jaký jest smysl hořejší poučky a celé euklidovské geometrie? Odpověď na tuto otázku není bezprostřední; abych ji objasnil, a abych měl vhodný podklad pro výklad o geometrii neeuklidovské, budu psáti o geometrii euklidovské a v souvislosti s touto o geometrii analytické.

Aby můj výklad byl co nejsrozumitelnější a snad i zábavnější, postavím se na stanovisko pozorovatele a budu popisovati počínání a myšlenkový postup a vývoj člověka, který původně o geometrii neví nic, je však při tom dostatečně bystrý a vytrvalý, aby si sám vybudoval geometrie o níž jde. Tento hrdina se bude jmenovati pan Um.

Nuže, pan Um vezme list papíru, tužku, pravítko a kružidlo a počne kresliti rozmanité obrazce. Kreslí především obrazce, jež se mu zdají hodně jednoduché, skládající se z jediné tečky. Nakreslí tečku a všimne si, že může na papíře položiti pravítko tak, aby přímá čára podle něho nakreslená tu tečku obsahovala. Nakreslí si jinou tečku a opět se mu podaří nakresliti podle pravítka přímou čáru, která tu tečku obsahuje. Pak opět a opět, takže po dostatečně velkém počtu takových pokusů nabude pan Um přesvědčení, že se mu to podaří vždy. Vezme si tudíž arch papíru a jako výsledek svých pokusů si zapíše na př. tuto větu: *Každou tečkou prochází alespoň jedna přímá čára.* Zdůrazňuji slovo *každou;* právě tímto slovem vyjadřuje pan Um *přesvědčení,* že fakt, který zjistil o několika tečkách, jež si nakreslil, bude platiti i o tečkách, které nakreslí kdykoli jindy. Po tomto výsledku nakreslí si pan Um dvě různé tečky a zjistí, že může položiti pravítko, a to — při dostatečně přesné práci — jen jedním způsobem tak, aby přímá čára podle něho nakreslená procházela oběma tečkami. Nakreslí si jiné dvě tečky a opět najde týž výsledek, a po dostatečném počtu takových pokusů nabude zase přesvědčení, že se mu to podaří u každých dvou teček. Zapíše si tedy na arch další větu: *Každými dvěma různými tečkami prochází jedna a ne více než jedna přímá čára.*

Pan Um počíná chápati, že si podobným způsobem může opatřiti ještě mnoho a mnoho dalších vět. Znenáhla postupuje k obrazcům a větám složitějším a složitějším. Názorem získá představu o přímé poločáře, t. j. části přímé čáry, která leží od určité tečky, vyznačené na přímé čáře po jedné straně, získá představu o úsečkách, o úhlech, o kružnicích, o velikostech úseček a úhlů, kteréžto velikosti může pomocí kružítka srovnávati, sečítati a odčítati. Slova, jako na př. *„úsečka“*, *„úhel“*, *„úhel ostrý“*, *„úhel přímý“*, *„trojúhelník“*, *„kružnice“* a pod. a slova vyjadřující vztahy: *„prochází“*, *„mezi“*, *„shodný“*, *„kongruentní“*, vcházejí tak ponenáhlu do jeho vět. Některé věty, jež se octly na jeho archu, nejsou nikterak samozřejmé a pan Um teprve po dlouhé řadě pokusů dospěl k přesvědčení, že jsou správné a odhodlal se je zapsati na svůj arch. Kolik na př. různých trojúhelníků v nejrozmanitějších velikostech a tvarech nakreslil a součet jejich úhlů proměřil, než se odhodlal zapsati větu: *Součet úhlů v každém trojúhelníku jest úhel přímý!* Opět zdůrazňuji slovo *každém:* tedy i v trojúhelnících, které pan Um nenakreslil a neproměřil.

Pan Um takto pokračuje a arch se mu plní větami, a jest pochopitelné, že čím více vět mu na archu přibývá, tím rychleji o nich ztrácí přehled. Konečně pro něj tento způsob práce — nazveme jej *empirický* — ztrácí půvab a pan Um zatouží, aby se nad svými výsledky zamyslil a věty na archu napsané nějak přehledně uspořádal a prohlédl, co je v nich vlastně skryto. — Nyní opouští pan Um ve svém vývoji nejnižší formu poznávací, stupeň, na němž čerpal a budoval své vědění geometrické jenom ze zkušenosti, a postupuje na stupeň vyšší, kde bude tvořiti pojmy.

Dovoluji si upozorniti čtenáře, že nyní přijde myšlenkový přechod, který jest pro další výklad velmi důležitý. — Nuže, pan Um počne pátrati, zda mezi větami na archu napsanými není nějaké vnitřní souvislosti. A tu pozná po čase — a to je veliký pokrok v jeho vývoji — že některé z vět na archu napsaných může z jiných vět tam napsaných odvoditi *logicky*, t. j. podle pravidel myšlení, jimž učí logika. Tak na př. má na archu napsánu tuto větu, kterou jsem ostatně již uvedl:

a$_1$) *Každými dvěma různými tečkami prochází jedna a ne více než jedna přímá čára.*

Dále tam má napsánu také tuto větu:

b$_1$) *Ke každým dvěma různým přímým čarám existuje nejvýše jedna tečka, kterou obě procházejí*, anebo jinými slovy: *Každé dvě různé přímé čáry se protnou nejvýše v jedné tečce.*

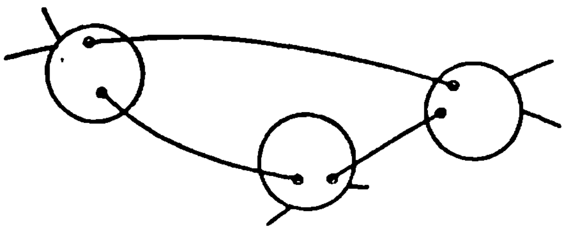
Nuže, panu Umovi se podaří větu **b**$_1$ odvoditi logicky z věty **a**$_1$, a to takto: Mysleme si, že věta **b**$_1$ neplatí. Pak podle logického pravidla, že z jakýchkoli dvou výroků, z nichž jeden jest záporem druhého, jeden a jenom jeden jest správný, platí zápor věty **b**$_1$. Jaký jest zápor věty **b**$_1$? Zřejmě tento: *Ne ke každým dvěma různým přímým čarám existuje nejvýše jedna tečka, kterou obě procházejí*, anebo jinými slovy: *Jsou dvojice přímých čar, k nimž* (neexistuje nejvýše jedna a tedy) *existují alespoň dvě různé tečky takové, že jimi procházejí obě přímé čáry dvojice.* Tento výrok obsahuje, že k jakýmsi dvěma různým přímým čarám p, q — a případně může býti takových dvojic více — existují dvě různé tečky — a může jich případně býti i více — takové, že jimi obě přímé čáry procházejí. Avšak věta **a**$_1$ praví, že žádnými dvěma různými tečkami a tedy ani těmito neprochází více než jedna přímá čára. Nemohou tedy obě přímé čáry p, q býti různé, to je však v rozporu s tím, že jsme řekli, že různé jsou. Výsledek těchto úsudků jest tedy tento: Zápor věty **b**$_1$ popírá logicky platnost věty **a**$_1$, takže platí-li věta **a**$_1$, neplatí zápor věty **b**$_1$ a tedy platí věta **b**$_1$ sama. Jinými slovy, věta **b**$_1$ je logickým důsledkem věty **a**$_1$.

Když toto pan Um zjistil, zaškrtne si na archu větu **b**$_1$, aby si připomněl, že tato věta jest logickým důsledkem jiné věty nezaškrtnuté (totiž věty **a**$_1$). A nyní přijde důležitá poznámka! Pan Um se zamyslí hlouběji nad svými úsudky a uvažuje takto: Mám dvě skupiny věcí. Věci první skupiny jsou tečky, věci druhé skupiny jsou přímé čáry. Vyberu-li jednu věc první skupiny, t. j. nakreslím-li nějakou tečku, jest ve druhé skupině řada věcí, které jsou s ní ve vztahu, jejž vyjadřuji slovem *„prochází“*; t. j. ta řada přímých čar, které vzniknou nakreslením podle pravítka těsně přiloženého k té vybrané věci první skupiny. Vyberu-li v první skupině dvě různé věci, jest každé z nich tímto vztahem přiřaděna ve skupině druhé řada věcí a tyto dvě řady mají společnou jednu a ne více než jednu věc. To jest právě obsahem věty **a**$_1$. Jakýmisi logickými úsudky jsem pak odvodil toto: Vyberu-li naopak dvě různé věci ve skupině druhé, t. j. nakreslím-li dvě různé přímé čáry, jest ve skupině první nejvýše jedna věc, t. j. tečka, taková, že v řadě věcí druhé skupiny, které jsou jí tím vztahem přiřaděny, jsou obě vybrané věci. To je právě obsahem věty **b**$_1$.

Tato analysa vede pana Uma k tomu, aby si úplně odmyslil tečky a přímé čáry, a utvořil takovýto úplně abstraktní úsudek: Mysleme si dvě skupiny *jakýchkoli* objektů — říkejme stručně *„objekty první skupiny“*

a *„objekty druhé skupiny“*. Objekty obou skupin nechť jsou v nějakém vzájemném vztahu takovém, že každému objektu první skupiny jest tím vztahem přiřaděna řada objektů druhé skupiny. Když vyberu jeden objekt a první skupiny a jeden objekt A druhé skupiny, pak v řadě objektů druhé skupiny, které jsou tím vztahem přiřaděny objektu a, buď objekt A jest anebo není. Je-li objekt A v té řadě, vyjádřím to pro stručnost rčením, že objekt A *prochází* objektem a. Nuže, nechť ten vztah mezi oběma skupinami objektů má tuto vlastnost:

a) *Každými dvěma objekty první skupiny prochází jeden a ne více než jeden objekt druhé skupiny*, anebo podrobněji řečeno: *Vyberu-li v první skupině dva různé objekty, pak obě řady objektů druhé skupiny, přiřaděné tím vztahem těmto dvěma, mají společný jeden a ne více než jeden objekt.* — Že dvě skupiny objektů v takovém vztahu můžeme skutečně realisovati, viděli jsme na příkladě teček a přímých čar. Avšak takových realisací jest nekonečně mnoho. Nechť na př. objekty první skupiny jsou tři koule, objekty druhé skupiny tři dráty (třeba ohnuté) takto spojené:



Vztah mezi koulemi a dráty nechť jest definován tak, že každé kouli přiřaděny jsou ty dva dráty, které jsou tou koulí prostrčeny. Pak skutečně každému objektu první skupiny jest přiřaděna řada objektu (zde dva objekty) skupiny druhé tak, že platí věta **a**. Anebo jiný příklad: Objekty první skupiny nechť jsou tóny, objekty druhé skupiny nechť jsou dvojzvuky (hrané na př. na klavíře). Vztah mezi nimi nechť jest definován tak, že každému tónu jsou přiřaděny ty dvojzvuky, které ten tón obsahují. Tak na př.

dvojzvuk  prochází tónem .

O těchto dvou skupinách objektů v tomto vztahu zřejmě opět platí věta **a**.

Vraťme se opět k dvěma skupinám jakýchkoli objektů a k větě **a**. — Pan Um v podstatě docela stejnými logickými úsudky, jako byly ty, jimiž z věty $\mathbf{a}_1$ odvodil větu $\mathbf{b}_1$, odvodí z věty **a** větu:

b) *Ke každým dvěma různým objektům druhé skupiny existuje nejvýše jeden objekt první skupiny, kterým oba procházejí*, anebo podrobněji řečeno: *Vyberu-li v druhé skupině dva různé objekty, pak jest v první skupině nejvýše jeden objekt takový, že v řadě objektu druhé skupiny, které jsou mu uvažovaným vztahem přiřaděny, jsou oba vybrané objekty.* — Důkaz: Mysleme si, že věta **b** neplatí. Pak podle logického pravidla, že z jakýchkoli dvou výroků, z nichž jeden jest záporem druhého, jeden a jenom jeden jest správný, platí zápor věty **b**. Jaký jest zápor věty **b**? Zřejmě tento: *Ne* ke každým dvěma různým objektum druhé skupiny existuje nejvýše jeden objekt první skupiny, kterým oba procházejí, anebo jinými slovy: Jsou dvojice objektů druhé skupiny, k nimž (neexistuje nejvýše jeden a tedy) existují alespoň dva různé objekty první skupiny takové, že jimi procházejí oba objekty dvojice.

Tento výrok obsahuje, že k jakýmsi dvěma různým objektům druhé skupiny *p*, *q* — a případně může býti takových dvojic i více — existují dva různé objekty první skupiny — a může jich případně býti i více — takové, že jimi oba objekty druhé skupiny procházejí. Avšak věta **a** praví, že žádnými dvěma různými objekty první skupiny a tedy ani těmito neprochází více než jeden objekt druhé skupiny. Tedy nemohou oba objekty druhé skupiny *p*, *q* býti různé, ale to je v rozporu s tím, co jsme řekli, že různé jsou. Tedy věta **b** je logickým důsledkem věty **a**. — Vidíme, že logické úsudky, které vedou od věty **a** k větě **b** jsou ve svém složení i sledu docela stejné jako byly ty, jež vedly od věty $\mathbf{a}_1$ k větě $\mathbf{b}_1$. Jenomže nyní jsou *abstraktní*, t. j. bez konkretního obsahu slov *„objekt první skupiny"*, *„objekt druhé skupiny"* a *„prochází"*. Dáme-li však těmto slovům jakýkoli obsah takový, aby platila věta **a**, anebo jinak řečeno, realisujeme-li tato slova ve shodě s větou **a**, pak také věta **b** nabude obsahu a hořejší úsudky se naplní v konkretní úsudky vedoucí od konkretní věty **a** ke konkretní větě **b**. Tak na př. realisujeme-li objekty obou skupin tečkami a přímými čarami a slovo *„prochází"* realisujeme v obvyklém smyslu, nabude věta **a** obsahu věty $\mathbf{a}_1$, věta **b** obsahu věty $\mathbf{b}_1$ a abstraktní úsudky v hořejším důkazu se naplní v konkretní úsudky vedoucí od věty $\mathbf{a}_1$ k větě $\mathbf{b}_1$. Anebo ve výše zmíněném případě tří koulí a tří drátů má věta **a** tento obsah: Každými dvěma různými koulemi je prostrčen jeden a ne více než jeden drát, a věta **b** má obsah: Ke každým dvěma různým drátům existuje nejvýše jedna koule, kterou jsou oba dráty prostrčeny, a tato konkretní věta je logickým důsledkem konkretní věty **a**. Logické úsudky vedoucí od této k oné se obdrží, když se slovům *„objekty první skupiny"*, *„objekty druhé skupiny"*, *„prochází"* dá obsah koulí, drátů a příslušného vztahu mezi nimi. — Můžeme tudíž říci, že hořejší abstraktní důkaz věty **b** z věty **a** jest abstraktní šablonou pro úsudky o pojmech, které se dají realisovati ve shodě s větou **a**. Že taková realisace se dá provésti dokonce nekonečně mnoha způsoby, jsem se již zmínil. — Když toto pan Um zjistil, pokračuje ve své práci stejným směrem, t. j. přemýšlí o svých větách na archu napsaných o tečkách a přímých čarách a hledá logické úsudky, jež vedou od jedněch vět k druhým. Každou větu, o níž seznal, že jest logickým důsledkem jiných vět, si zaškrtne, při čemž se snaží, aby věty, od nichž vychází, byly pokud možno jednoduché. A tu po dlouhé době pilné práce dospěje k překvapujícímu výsledku, že mu na archu zbude jenom docela malý počet. totiž 15 nezaškrtnutých vět, kterýžto počet se mu již nepodařilo zaškrtnutím zredukovati. Dokonce se mu při této práci poštěstilo odvoditi logicky z těch 15 vět některé další věty, které původně ani neměl na archu napsány a jejich správnost si na obrazcích dodatečně ověří.

Všimněme si nyní blíže těchto 15 vět. V těchto větách se mluví podstatně jenom o tečkách a přímých čarách. Pravím podstatně; to znamená, že jsou tam i jiná slova, na př. *„úsečka"*, *„úhel"*, avšak tato jsou zavedena jenom pro snazší vyjadřování a jejich obsah se dá popsati obsahem slov *tečka* a *přímá čára* a určitými vztahy mezi tečkami a přímými čarami. Tyto vztahy jsou čtvero druhu a pan Um je vyjadřuje slovy *„prochází"*, *„mezi"*, *„shodný"*, *„kongruentní"*. Tak na př. mezi těmi 15 větami jest hořejší věta $\mathbf{a}_1$. A jsou tam dále na př. tyto věty:

b_1) *Pro každé tři tečky, jimiž prochází táž přímá čára, platí, že jedna a ne více než jedna z nich jest mezi druhými dvěma.*

c_1) *Jestliže úsečka AB jest shodná s úsečkou A'B' i s úsečkou A"B", pak úsečka A'B' jest shodná s úsečkou A"B".*

d_1) *Jestliže o tečkách A, B, C platí, že jimi neprochází jedna a táž přímá čára, jestliže totéž platí o tečkách A', B', C', jestliže úsečka AB jest shodná s úsečkou A'B' a úsečka AC jest shodná s úsečkou A'C', a jestliže úhel BAC jest kongruentní s úhlem B'A'C', pak také úhel ABC jest kongruentní s úhlem A'B'C' a úhel BCA jest kongruentní s úhlem B'C'A'.*

Při tom slovo na př. „*úsečka*" jest zavedeno jenom pro snazší vyjadřování a znamená množství těch teček, které jsou mezi tečkami A a B. (U slova „*úhel*" jest popsání obsahu složitější.) — Nuže, pan Um analysuje svou dosavadní práci takto: Mezi dvěma skupinami věcí, totiž teček a přímých čar, uvažuji jakési vztahy, které chápu svými smysly a které jsou čtvero druhu; vyjadřuji je slovy „*prochází*", „*mezi*", „*shodný*", „*kongruentní*". Především, vztah určité přímé čáry k určité tečce takový, že ta přímá čára vznikla nakreslením podle pravítka těsně přiloženého k té tečce, vyjadřuji — jak již ostatně bylo řečeno — slovem „*prochází*". Za druhé, vztah určité tečky C, vyznačené na určité přímé čáře, k jiným dvěma tečkám A, B, vyznačeným na téže přímé čáře, takový, že tečka C leží v opačných směrech od teček A, B, vyjadřuji slovem „*mezi*". Za třetí, vztah dvou úseček takový, že ty úsečky mají stejnou délku, vyjadřuji slovem „*shodný*". A konečně za čtvrté, vztah dvou úhlů takový, že ty úhly jsou stejně velké, vyjadřuji slovem „*kongruentní*". Obsah hořejších 15 vět jest ten, že se v nich popisují vlastnosti těchto vztahů. Z těchto vlastností jsem pak logickými úsudky odvodil jiné, které jsou popsány ve větách zaškrtnutých.

Touto analysou dospěl pan Um opět k tomu, aby abstrahoval od teček a přímých čar takto: Mysleme si zase dvě skupiny jakýchkoli objektů — *objekty první skupiny* a *objekty druhé skupiny*. Mezi objekty obou skupin nechť jsou vztahy čtvero druhu, které budeme vyjadřovati slovy „*prochází*", „*mezi*", „*shodný*", „*kongruentní*". Především, nechť každému objektu první skupiny jest nějakým vztahem V_1 přiřaděna řada objektů druhé skupiny. Když vyberu jeden objekt *a* první skupiny a jeden objekt *A* druhé skupiny, pak v řadě objektů druhé skupiny, které jsou vztahem V_1 objektu *a* přiřaděny, buď objekt *A* jest anebo není. Je-li objekt *A* v té řadě, vyjádřím to pro stručnost rčením, že objekt *A prochází* objektem *a*. Za druhé, nechť každým dvěma různým objektům první skupiny jest nějakým vztahem V_2 přiřaděna řada objektů první skupiny. Když vyberu dva různé objekty první skupiny A, B a další objekt první skupiny C, pak v řadě objektů první skupiny, které jsou vztahem V_2 dvojici A, B přiřaděny, buď objekt C jest anebo není. Je-li objekt C v té řadě, vyjádřím to pro stručnost rčením, že objekt C jest *mezi* objekty A, B. Za třetí, nechť každým dvěma různým objektům první skupiny jest nějakým vztahem V_3 přiřaděna řada dvojic objektů první skupiny. Když vyberu dva různé objekty první skupiny A, B a další dva různé objekty první skupiny A', B', pak v řadě dvojic objektů první skupiny, které jsou vztahem V_3 dvojici A, B přiřaděny, buď dvojice A', B' jest anebo není. Je-li dvojice A', B' v té řadě, vyjádřím to pro stručnost rčením, že úsečka AB jest *shodná* s úsečkou A'B'. Při tom slovo úsečka (na př.) AB jest zavedeno jenom pro snazší vyjadřování a znamená množství těch objektů první skupiny, které jsou mezi objekty A, B; t. j. tedy těch, které jsou vztahem V_2 přiřaděny dvojici A, B. A konečně za čtvrté, se popíše obsah slova úhel a pomocí dalšího vztahu V_4, podobným, ale trochu složitějším způsobem se definuje obsah slova *kongruentní*. Nuže, nechť vztahy V_1, V_2, V_3, V_4 mají takové vlastnosti, že platí věty stejného složení jako hořejších 15 vět. K vůli snazšímu vyjadřování bude pan Um říkati *body* místo *objekty první skupiny* a *přímky* místo *objekty druhé skupiny*, takže o vztazích V_1, V_2, V_3, V_4 se žádá, aby platily na př. tyto věty:

a) *Každými dvěma body prochází jedna a ne více než jedna přímka;*

b) *Pro každé tři body, jimiž prochází táž přímka, platí, že jeden a ne více než jeden z nich jest mezi druhými dvěma*;

c) *Jestliže úsečka AB jest shodná s úsečkou A'B' i s úsečkou A"B", pak úsečka A'B' jest shodná s úsečkou A"B";*

d) *Jestliže o bodech A, B, C platí, že jimi neprochází jedna a táž přímka, jestliže totéž platí o bodech A', B', C', jestliže úsečka AB jest shodná s úsečkou A'B' a úsečka AC jest shodná s úsečkou A'C' a jestliže úhel BAC jest kongruentní s úhlem B'A'C', pak také úhel ABC jest kongruentní s úhlem A'B'C' a úhel BCA jest kongruentní s úhlem B'C'A'*, a podobně ještě dalších 11 vět. Z těchto 15 abstraktních vět — říkejme jim *axiomy* — logickými úsudky docela stejného složení i sledu jako byly ty, které vedly od nezaškrtnutých vět k zaškrtnutým, odvodí pan Um nové abstraktní věty, docela stejného složení jako zaškrtnuté. Na př. odvodí větu: Ke každým dvěma různým přímkám existuje nejvýše jeden bod, kterým obě procházejí — a tato věta jest, jak víme, logickým důsledkem samotné věty a. Tyto nové abstraktní věty nabudou obsahu vět zaškrtnutých a ty abstraktní logické úsudky nabudou obsahu logických úsudků vedoucích od nezaškrtnutých vět k zaškrtnutým, když se abstraktní slova „*bod*", „*přímka*", „*prochází*", „*mezi*", „*shodný*", „*kongruentní*" realisují tečkami a přímými čarami a příslušnými vztahy v obvyklém smyslu. A pan Um ukončuje nyní druhý stupeň svého vývoje utvořením těchto pojmů:

Body po př. přímkami rozumím dvě skupiny jakýchkoli objektů, mezi nimiž jsou definovány vztahy ve shodě s hořejšími 15 axiomy. Soustava těchto axiomů a důsledků odvozených z nich logickými úsudky jest euklidovská geometrie.

Podle této definice jest tedy euklidovská geometrie abstraktní šablonou pro logické úsudky o pojmech, které se dají realisovati ve smyslu jejích 15 axiomů. Jedna taková realisace jest ovšem zřejmá, totiž tečkami a přímými čarami, ať již je kreslí malíř pokojů hrubě, anebo my ostrou tužkou na hladkém papíře jemně. Jiná realisace jest možná v oboru čísel a budeme o ní jednati v článku, jednajícím o analytické geometrii. Každá další realisace pojmy nějaké discipliny v oboru přírodních věd (na př. fysiky) znamená nesporně pokrok té discipliny, neboť odhaluje její logickou strukturu. —

Nyní jest pan Um ve svém vývoji — až na nepodstatné rozdíly — tam, kde byl kolem r. 300 před Kr. nesmrtelný Euklid, tvůrce euklidovské geometrie.