Otakar Borůvka

Sur les sous-groupes des groupes des dispersions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Proc. Roy. Soc. Edinburgh 97 A, 1984, 35-41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500172

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **97A**, 35 41, *1984*

Sur les sous-groupes planaires des groupes des dispersions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre

O. Borůvka
Institute of Mathematics, Czechoslovakian Academy of Sciences,
Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno, Czechoslovakia

(MS received 21 June 1983)

Synopsis

A group $\mathfrak{S}$ consisting of real continuous functions of one real variable on the interval $j=(-\infty,\infty)$ is called planar if through each point of the plane $j\times j$ there passes just one element $s\in\mathfrak{S}$.

Every differential oscillatory equation (Q): $y''=Q(t)y$ $(t\in j=(-\infty,\infty),\ Q\in C^{(0)})$ admits functions, called the dispersions of (Q), that transform (Q) into itself. These dispersions are integrals of Kummer's equation (QQ): $-\{X,t\}+Q(X)X'^2(t)=Q(t)$ and form a three-parameter group $\mathfrak{B}_Q$, known as the dispersion group of (Q). The increasing dispersions of (Q) form a three-parameter group $\mathfrak{B}_Q^+(\subset\mathfrak{B}_Q)$ invariant in $\mathfrak{B}_Q$. The centre of the group $\mathfrak{B}_Q^+$ is an infinite cyclic group $\mathfrak{C}_Q$, whose elements, the central dispersions of (Q), describe the position of conjugate points of (Q).

The present paper contains new results concerning the algebraic structure of the group $\mathfrak{B}_Q^+$. It provides information on the following: (1) the existence and properties of planar subgroups of a given group $\mathfrak{B}_Q^+$ and (2) the existence and properties of the groups $\mathfrak{B}_Q^+$ containing a given planar group $\mathfrak{S}$. The results obtained are: the planar subgroups of a given group $\mathfrak{B}_Q^+$ form a system depending on two constants, $\mathbf{S}Q$, such that $\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{C}_Q$ for all $\mathfrak{S}\in\mathbf{S}Q$. The equations (Q) whose groups $\mathfrak{B}_Q^+$ contain the given planar group $\mathfrak{S}$ form a system dependent on one constant, $\mathbf{Q}S$, such that $\cap\mathfrak{B}_Q^+=\mathfrak{S}=\cup\,\mathfrak{C}_Q$ for all $(Q)\in\mathbf{Q}S$.

1. Introduction

Dans un récent article [**3**] nous avons étudié une classe de groupes formés de fonctions réelles et continues dans l'intervalle $j=(-\infty,\infty)$. Ces groupes, appelés planaires, sont caractérisés par la propriété de faire passer par tout point du plan $j\times j$ précisément un élément du groupe.

L'étude en question a été initiée par nos recherches sur la structure algébrique des groupes des dispersions des équations différentielles linéaires et oscillatoires du deuxième ordre

$$y''=Q(t)y\quad(t\in j,\ Q\in C^{(0)}),\tag{Q}$$

et est conçue de manière à admettre d'immédiates applications dans ces recherches. Les groupes planaires apparaissent, dans certains cas, en intersections des groupes des dispersions croissantes de deux équations (Q_1), (Q_2) et donc ils représentent les groupes des transformations simultanées de ces équations en elles-mêmes [**4**].

Le présent travail est consacré à l'étude des sous-groupes planaires des groupes des dispersions croissantes des équations (Q). Nos considérations conduisent à la détermination des sous-groupes en question et à la découverte de leurs propriétés. Les résultats obtenus contiennent plusieurs informations sur les transformations des équations (Q) en elles-mêmes, que nous n'expliciterons pas ici, faute d'espace.

2. Généralités

Dans le but de faciliter la lecture de cet article, nous allons commencer par donner un bref aperçu des propriétés des groupes planaires et des groupes des dispersions des équations (Q).

Nous supposons que la loi de composition interne des groupes considérés est la composition des fonctions. Pour simplifier, nous désignons par le symbole fg la fonction composée des fonctions f, g.

A. Groupes planaires

Soit $\mathfrak{S}(\subset C^{(0)})$ un groupe planaire.

L'élément-unité de $\mathfrak{S}$ coïncide avec la fonction *id*. Toute fonction $s\in\mathfrak{S}$ va constamment en croissant de $-\infty$ à ∞, et le groupe $\mathfrak{S}$ est abélien.

Les éléments de $\mathfrak{S}$ dépendent d'un paramètre. Pour tout élément $s\in\mathfrak{S}$ on prend pour paramètre de s la valeur $s(e)$, prise toujours au même point $e\in R$ $(=(-\infty,\infty))$, choisi arbitrairement. Cela étant, le groupe $\mathfrak{S}$ est dit paramétrisé (par rapport à e). On désigne par s_A l'élément $s\in\mathfrak{S}$ au paramètre A. Évidemment, l'ensemble des paramètres en question est R.

On suppose généralement que le groupe $\mathfrak{S}$ est paramétrisé.

On appelle *conjugateur de* $\mathfrak{S}$ toute fonction continue dans j, G, allant constamment en croissant de $-\infty$ à ∞ et qui engendre le groupe $\mathfrak{S}$ suivant la formule

$$s_A(t)=G^{-1}(G(t)+G(A))\quad \forall\, t\in j,\quad \forall\, A\in \mathrm{R}. \tag{1}$$

L'existence des conjugateurs de $\mathfrak{S}$ est assurée [**3**]. G_1 étant un conjugateur de $\mathfrak{S}$, tous les conjugateurs de $\mathfrak{S}$ sont exactement les fonctions $G_c=c\cdot G_1$, const.$=c>0$. Ces fonctions forment ce que nous appelons le système complet des conjugateurs de $\mathfrak{S}$. On a, évidemment, $G_c(e)=0$.

Si $\mathfrak{S}\subset C^{(k)}(k=0,1,\ldots)$, tout conjugateur de $\mathfrak{S}$, G, et de même la fonction inverse, G^{-1}, appartiennent à $C^{(k)}$: $G, G^{-1}\in C^{(k)}$ [**1**].

Inversement, toute fonction dans j, G, qui va constamment en croissant de $-\infty$ à ∞, et telle que $G, G^{-1}\in C^{(k)}$, représente un conjugateur d'un groupe planaire $\mathfrak{S}\subset C^{(k)}$ paramétrisé par rapport au zéro de G [**3**].

Tout conjugateur G_c de $\mathfrak{S}\subset C^{(3)}$ est une phase de l'équation (Q_c) donnée par la formule [**2**, p. 38]:

$$Q_c(t)=-\{G_1,t\}-c^2\cdot G_1'^2(t)\quad \forall\, t\in j\quad (c>0). \tag{2}$$

Remarquons que, dans la théorie des équations fonctionnelles les groupes planaires apparaissent en relation avec les groupes itérés [**5**], [**1**].

B. Groupes des dispersions des équations (Q)

On désigne par M l'ensemble des équations (Q) considérées plus haut.

Pour (Q), $(P)\in M$, il existe de fonctions $X\colon j\to j$, qui transforment (Q) en (P). Cela veut dire que, pour toute intégrale y de (Q) la fonction $z=a\,.\,y(X)/\sqrt{|X'|}$ ($a=$const.) est une intégrale de (P). On suppose: $X\in C^{(3)}$, $X'\neq 0$, X est non-bornée inférieurement et supérieurement. Ces transformateurs X dépendent de trois paramètres et coïncident avec les intégrales de l'équation de Kummer:

$$-\{X,t\}+Q(X)X'^2(t)=P(t). \tag{QP}$$

En particulier, les transformateurs de (-1) en (P) sont exactement les phases de (P).

On appelle *dispersion de* (Q) tout transformateur de l'équation (Q) en elle-même. Les dispersions de (Q) forment un groupe à trois paramètres $\mathfrak{B}_Q(\subset C^{(3)})$ [**2**, p. 191].

Les dispersions croissantes de (Q) forment un groupe à trois paramètres, $\mathfrak{B}_Q^+$, qui est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{B}_Q$. Le groupe $\mathfrak{B}_Q^+$ jouit de la propriété remarquable que son centre, $\mathfrak{C}_Q$, est un groupe monogène infini. Plus exactement, $\mathfrak{C}_Q$ consiste en dispersions centrales de (Q), $\varphi_\nu(\nu=0,\pm1,\ldots)$, c'est-à-dire en transformateurs changeant toute intégrale y de (Q) en elle-même (si ν est paire) ou bien en $-y$ (si ν est impaire): $y(\varphi_\nu)/\sqrt{\varphi_\nu'}=(-1)^\nu y$. Le groupe $\mathfrak{C}_Q$ prend le nom de *centre de* (Q).

Pour toute dispersion $X\in\mathfrak{B}_Q$ on a la formule $X=\alpha^{\ 1}\bar{\alpha}$ formée des phases de (Q), α, $\bar{\alpha}$, dont l'une, par exemple α, peut être choisie arbitrairement et une fois pour toute. On a, évidemment, $X\in\mathfrak{B}_Q^+$ si et seulement si $\operatorname{sgn}\alpha'=\operatorname{sgn}\bar{\alpha}'$. En particulier, les dispersions centrales de (Q) sont données par la formule $\varphi_\nu=\alpha^{\ 1}(\alpha+\nu\pi\,.\operatorname{sgn}\alpha')$ [**2**, p. 126].

3. Sous-groupes planaires d'un groupe donné $\mathfrak{B}_Q^+$

Étant donnée une équation $(Q)\in M$, nous nous intéressons aux sous-groupes planaires $\mathfrak{S}(\subset C^{(3)})$ du groupe des dispersions croissantes, $\mathfrak{B}_Q^+$. Nous supposons les sous-groupes en question paramétrisés par rapport à un nombre $e(\in R)$, et donc représentables par une formule telle que (1). Nous désignons par **SQ** l'ensemble de ces sous-groupes.

A. Existence des sous-groupes planaires de $\mathfrak{B}_Q^+$

PROPOSITION 1. *Si le groupe planaire $\mathfrak{S}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{B}_Q^+$, le système complet des conjugateurs de $\mathfrak{S}$ comprend exactement une phase de* (Q).

S'il y a entre les conjugateurs du groupe planaire $\mathfrak{S}$ une phase de (Q), *on a* $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}_Q^+$.

Démonstration. (a) Soit $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}_Q^+$.

Soit G_1 un conjugateur de $\mathfrak{S}$. Pour tout élément $s\in\mathfrak{S}$ on α, d'après (1),

$$G_1s(t)=G_1(t)+G_1(A)\quad\forall\, t\in j, \tag{3}$$

$A(=s(e))$ étant le paramètre de s.

Cette formule entraîne, évidemment,

$$s'(e) = G'(e)/G'(A). \tag{4}$$

D'autre part, en comparant les dérivées schwarzienes des deux membres de (3), on trouve [**2**, p. 8 (1.17)]

$$\{G_1, s(t)\} \, . \, s'^2(t) + \{s, t\} = \{G_1, t\}.$$

Or, par hypothèse, la fonction s vérifie l'équation (QQ), et ainsi

$$(\{G_1, s(t)\} + Qs(t)) \, . \, s'^2(t) = \{G_1, t\} + Q(t).$$

En prenant $t = e$ et appliquant la formule (4) on aura

$$\frac{\{G_1, A\} + Q(A)}{G'^2(A)} = \frac{\{G_1, e\} + Q(e)}{G'^2(e)} \quad (= k = \text{const.})$$

et donc

$$-\{G_1, A\} + k \, . \, G_1'^2(A) = Q(A). \tag{5}$$

Or, le groupe $\mathfrak{S}$ étant planaire, la formule (5) subsiste pour $\forall A \in R$ et montre, que la fonction G_1 transforme l'équation (k) en (Q). Puisque (Q) est oscillatoire, on a $k < 0$, et la formule en question peut être mise sous la forme

$$-\{\sqrt{-k} \, . \, G_1, A\} - (\sqrt{-k} \, . \, G_1(A))'^2 = Q(A) \quad \forall A \in \mathrm{R}.$$

On en voit que la fonction $G_{\sqrt{-k}} = \sqrt{-k} \, . \, G_1$, étant évidemment un conjugateur de $\mathfrak{S}$, est une phase de (Q).

Finalement, nous avons à montrer, qu'il n'y a pas de conjugateur de $\mathfrak{S}$, $c \, . \, G_1$, où $c \neq \sqrt{-k}$, qui serait une phase de (Q). Or, cela résulte facilement de lá formule (2).

(b) Supposons, que le conjugateur G de $\mathfrak{S}$ soit une phase de (Q).

D'abord, sgn $G' = 1$, et l'on a, pour tout élément $s_A \in \mathfrak{S}$ une formule telle que (1). D'autre part, G étant une phase de (Q), la fonction $\bar{G} = G + G(A)$ jouit de la même propriété, et l'on a sgn $\bar{G}' = 1$. Il en résulte $s_A \in \mathfrak{B}_Q^+$ et donc $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_Q^+$. □

Pour tout groupe planaire $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_Q^+$, exactement un conjugateur de $\mathfrak{S}$, G, est une phase de (Q). Cette phase, à son tour, est bien déterminée par ses valeurs initiales $G(e) = 0$, $(a =)G'(e) > 0$, $(b =)G''(e)$ [**2**, p. 65]. Inversement, des nombres arbitraires e, $a > 0$, b déterminent exactement une phase de (Q), G, aux valeurs initiales $G(e) - 0$, $G'(e) = a$, $G''(e) = b$. Puisque l'équation (Q) est oscillatoire et $a > 0$, la phase G va constamment en croissant de $-\infty$ à ∞, et donc engendre un groupe planaire, $\mathfrak{S}$, et l'on a, d'après la proposition 1, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_Q^+$. Ainsi,

Proposition 2. *L'ensemble des sous-groupes planaires de $\mathfrak{B}_Q^+$ dépend de deux constantes arbitraires $a > 0$, b.*

Il est utile de remarquer que les sous-groupes planaires de $\mathfrak{B}_Q^+$ ne recouvrent pas le groupe $\mathfrak{B}_Q^+$. Par exemple, la dispersion $X \in \mathfrak{B}_Q^+$ aux valeurs initiales $X(0) = 0$, $X'(0) = a > 1$, $X''(0) = 0$ ne figure en élément dans aucun sous-groupe planaire de $\mathfrak{B}_Q^+$.

B. Propriétés des sous-groupes planaires de $\mathfrak{B}_Q^+$

PROPOSITION 3. *Tout sous-groupe planaire de $\mathfrak{B}_Q^+$ comprend le centre de (Q).*

Démonstration. Soit $\mathfrak{S} \in \mathbf{S}Q$. Le groupe $\mathfrak{S}$ étant engendré par une phase de (Q), G, on a, pour $s_A \in \mathfrak{S}$: $s_A = G^{-1}(G+G(A))\ \forall\, A \in R$. Il en résulte que la fonction s_A au paramètre $A_\nu = G^{-1}(\nu\pi)$, $\nu = 0, \pm 1, \ldots,$ est la dispersion centrale $\varphi_\nu \in \mathfrak{S}_Q$. □

PROPOSITION 4. *Pour $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \mathbf{S}Q$, $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}_2$, on a $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{C}_Q$.*

Démonstration. En vertu de la proposition 3, il suffit de montrer que $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{C}_Q$. Soient G_1 et G_2 les phases de (Q) qui engendrent les groupes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ $(G_1 \neq G_2)$. Pour $X \in \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ on a

$$X = G_1^{-1}(G_1 + a_1) = G_2^{-1}(G_2 + a_2); \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R}, \quad G_1^{-1}(a_1) = G_2^{-1}(a_2) = X(e). \quad (6)$$

Si $a_1 a_2 = 0$, on a $X = id \in \mathfrak{C}_Q$.

Soit donc $a_1 \neq 0 \neq a_2$. En posant $F = G_2 G^{-1}(\in C^{(3)})$, on a $F \neq id$, et, d'après (6),

$$F(t + a_1) = F(t) + a_2 \quad \forall\, t \in j,$$

donc

$$F(t) = \frac{a_2}{a_1}\, t + p(t),$$

la fonction p $(\in C^{(3)})$ admettant en période le nombre a_1. Évidemment, la fonction F va constamment en croissant et l'on a: $F(0) = 0$.

Or, les fonctions G_1, G_2 étant des phases de (Q), elles transforment l'équation (-1) en (Q) et donc la fonction F est une phase de (-1). Il en résulte $a_1 = a_2$ et l'on voit que la fonction p est périodique avec la période (primitive) π. En effet, si p était constante, on aurait $p = p(0) = F(0) = 0$ et donc $F = id$, ce qui est absurde. Ainsi, a_1 étant une période de p, on a: $a_1 = n\pi$, n entier. Il s'ensuit $X = \varphi_n (\in \mathfrak{C}_Q)$ d'où $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{C}_Q$. □

Corollaire. On a $\bigcap_{\mathfrak{S} \in \mathbf{S}Q} \mathfrak{S} = \mathfrak{C}_{Q}$,.

4. Sur-groupes $\mathfrak{B}_Q^+$ d'un groupe planaire

Étant donné un groupe planaire $\mathfrak{S}(\subset C^{(3)})$, nous nous intéressons aux équations $(Q) \in M$, dont les groupes $\mathfrak{B}_Q^+$ contiennent $\mathfrak{S}: \mathfrak{B}_Q^+ \supset \mathfrak{S}$.

Nous désignons par $\mathbf{Q}S$ l'ensemble de ces équations. Il subsiste, manifestement, entre les ensembles $\mathbf{Q}S$ et $\mathbf{S}Q$ la relation suivante: Si $(Q) \in \mathbf{Q}S$ alors $\mathfrak{S} \in \mathbf{S}Q$, et réciproquement.

A. Existence des sur-groupes $\mathfrak{B}_Q^+$ d'un groupe planaire donné

Soit $\mathfrak{S}(\subset C^{(3)})$ un groupe planaire, paramétrisé par rapport à un nombre $e(\in R)$. Soient $G_c = c \,.\, G_1$ (const. $= c > 0$) les fonctions formant le système complet des conjugateurs de $\mathfrak{S}$. Tout conjugateur G_c est une phase de l'équation $(Q_c) \in M$, donnée par (2).

D'après la proposition 1, on a $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_{Q_c}^+$ et donc $(Q_c) \in \mathbf{Q}S$. Par conséquent, toutes les équations (Q_c) sont comprises dans l'ensemble $\mathbf{Q}S$. D'autre part, la relation $(Q) \in \mathbf{Q}S$ entraîne $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_Q^+$, ce qui prouve, d'après la proposition 1, l'existence d'un conjugateur de $\mathfrak{S}$, G_a, qui est une phase de (Q), donc $(Q) = (Q_a)$. Ainsi:

PROPOSITION 5. *Les équations $(Q) \in M$, dont les groupes $\mathfrak{B}_Q^+$ contiennent le groupe $\mathfrak{S}$, sont précisement les équations (Q_c) données par* (2).

Corollaire. L'ensemble des équations en question dépend d'une constante positive arbitraire.

B. Propriétés des sur-groupes $\mathfrak{B}_Q^+$ d'un groupe planaire

Considérons deux équations quelconques (Q_a), $(Q_b) \in \mathbf{Q}S$, où $a, b > 0$, $a \neq b$.

PROPOSITION 6. *On a*: $\mathfrak{B}_{Q_a}^+ \cap \mathfrak{B}_{Q_b}^+ = \mathfrak{S}$.

Démonstration. Désignons, pour abréger, $\mathfrak{P}_{a,b}^+ = \mathfrak{B}_{Q_a}^+ \cap \mathfrak{B}_{Q_b}^+$.

D'abord, on a, d'après la proposition 5, $\mathfrak{P}_{a,b}^+ \supset \mathfrak{S}$. Donc, il suffit de montrer que $\mathfrak{P}_{a,b}^+ \subset \mathfrak{S}$.

Soit

$$R(t) = \int_e^t \sqrt{|Q_a(\tau) - Q_b(\tau)|}\, d\tau \quad \forall\, t \in j.$$

La formule (2) entraîne

$$R(t) = \sqrt{|a^2 - b^2|} \,.\, G_1(t),$$

G_1 étant un conjugateur de $\mathfrak{S}$. Ainsi, la fonction R est encore un conjugateur de $\mathfrak{S}$.

Or, toute fonction $X \in \mathfrak{P}_{a,b}^+$ satisfait aux deux équations (Q_aQ_a), (Q_bQ_b) et donc

$$(Q_a(X) - Q_b(X)) \,.\, X'^2(t) = Q_a(t) - Q_b(t) \quad \forall\, t \in j.$$

Il en résulte facilement

$$RX(t) = R(t) + RX(e)$$

d'où

$$X(t) = R^{-1}(R(t) + RX(e)) \in \mathfrak{S}.$$

Ainsi, $\mathfrak{P}_{a,b}^+ \subset \mathfrak{S}$. $\square$

Corollaire. On a: $\bigcap_{(Q) \in \mathbf{Q}S} \mathfrak{B}_Q^+ = \mathfrak{S}$.

Soit $(id \neq)\ s \in \mathfrak{S}$. G_1 étant un conjugateur de $\mathfrak{S}$, on a: $s = G_1^{-1}(G_1 + k)$, où $(0 \neq)\ k$ est une constante bien déterminée. D'autre part, soient m $(\neq 0)$ un entier assujeti à la seule condition $\operatorname{sgn} m = \operatorname{sgn} k$, et $c > 0$ une constante quelconque. Désignons par $\varphi_m^{(c)}$ la dispersion centrale d'indice m de l'équation $(Q_c) \in \mathbf{Q}S$. Donc, $\varphi_m^{(c)} \in \mathfrak{C}_{Q_c}$.

PROPOSITION 7. *Pour $c = m\pi/k$ on a $s = \varphi_m^{(c)}$.*

Démonstration. Avec les notations utilisées ci-dessus, G_1 est une phase de (Q_1) et $G_c = c \,.\, G_1$ figure en phase de (Q_c). Or, on a manifestement, $G_c^{-1}(t) = G_1^{-1}\left(\frac{1}{c}\, t\right)$

$\forall\, t \in j$, et donc, pour $c = m\pi/k$:

$$\varphi_m^{(c)} = G_c^{-1}(G_c + m\pi) = G_1^{-1}(G_1 + m\pi/c) = G_1^{-1}(G_1 + k) = s. \quad \square$$

PROPOSITION 8. *On a*: $\mathfrak{S} = \bigcup_{(Q)\in \mathbf{QS}} \mathfrak{C}_Q$.

La démonstration résulte facilement des propositions 3 et 7.

Bibliographie

1 G. Blanton and John A. Baker. Iteration groups generated by C^n functions. *Arch. Math.* (*Brno*) **18** (1982), 121–128.
2 O. Borůvka. *Linear Differential Transformations of the Second Order* (London: The English Universities Press, 1971).
3 O. Borůvka. Sur une classe des groupes continus à un paramètre formés des fonctions réelles d'une variable. *Ann. Polon. Math.* **42** (1982), 27–37.
4 O. Borůvka. Sur les transformations simultanées de deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans elles-mêmes. *Applicable Anal.* 1983 (sous presse).
5 M. Kuczma. *Functional Equations in a Single Variable* (Warszawa, 1968).

(*Issued* 1 *June* 1984)