Otakar Borůvka

Sur les solutions similtanées de deux équations différentielles de Kummer [unpublished working paper]

IVème Congrès des Mathématiciens d'Expression Latine et Commémoration d'Elie Cartan, Bucuresti-Brasov, 17-24 Sept. 1969 [Unpublished working paper, 14 pp]

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500128

Sur les solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer .

1. Il est bien connu qu'on entend sous équations différentielle de Kummer une équation ordinaire du $3^{-ième}$ ordre qui est de la forme

$$(Qq) \qquad - \{X,t\} + Q(X)X'^{2} = q(t)$$

où t désigne la variable indépendante, X la fonction inconnue et le symbole $\{X,t\}$ la dérivée schwarzienne de X au point t:

$$\{X,t\} = \frac{1}{2}\frac{X\ (t)}{X\ (t)} - \frac{3}{4}\frac{X'\ (t)}{X\ (t)} .$$

On suppose que les coefficients $Q(T)$, $q(t)$ sont des fonctions continues dans certains intervalles ouverts, $J = (A,B)$, $j = (a,b)$, bornés ou non.

A toute équation de Kummer (Qq) on fait associer deux autres équations de Kummer dites la première et la deuxième équation associée à l'équation (Qq), à savoir les équations

$$(QQ) \qquad - \{X,T\} + Q(X)X' = Q(T),$$

$$(qq) \qquad - \{X,t\} + q(X)X = q(t) .$$

2. Les équations différentielles de Kummer jouent un rôle primordial dans la théorie des transformations des équations différentielles ordinaires et linéaires du deuxième ordre.

Etant données deux équations différentielles ordinaires et linéaires du deuxième ordre

$$(q) \qquad y' = q(t)y , \qquad Y = Q(T)Y \qquad (Q)$$

le problème de transformer l'équation (Q) en l'équation (q) consiste en ceci, qu'il s'agit de trouver toutes les fonctions $w(t)$ (= 0), $X(t)$, définies dans un intervalle i j, qui jouissent de la propriété que, pour chaque intégrale $Y(T)$ de l'équation (Q), la fonction

(1) $$y(t) = w(t)Y \quad X(t)$$

représente une solution de l'autre équation (q). On suppose qu'au moins un couple d'intégrales linéairement independantes de l'équation (Q) se transforme en un couple de solutions linéairement indépendantes de l'équation (q). On démontre que toutes les fonctions X satisfaisant aux conditions de ce problème sont précisément le solutions de l'équation différentielle de Kummer (Qq) tandis que les fonctions w se trouvent déterminées par ces dernières de la manière suivante

$$w(t) = \frac{c}{X'(t)} ,$$

c (= 0) étant une constante arbitraire. Par conséquent, la formule de transformation (1) s'écrit

(2) $$y(t) = c\,\frac{Y\,X(t)}{X'(t)} ,$$

X étant une solution de l'équation (Qq) et c une constante arbitraire différente de zéro.

(3) Dans la présente conférence nous allons nous occuper de la recherche des solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer

(Qq) $$- X,t + Q(X)X' = q(t) ,$$

(-1,-1) $$- X,t - X' = -1 .$$

Ce probleme équivaut, évidemment, au problème suivant: Transformer, dans le sens de la formule (2), l'équation lenéaire (Q) en l'équation linéaire (q) par des fonctions X, qui laissent invariante l'équation linéaire (-1), c'est-a-dire l'équation $y'' = -y$. Il s'agit par conséquent de trouver toutes les fonctions X(t), définies dans un intervalle i j, qui transforment chaque intégrale Y de l'équation (Q) en une solution y de l'équation (q) et permutent, en même temps, les solutions de l'équation (-1) entre elles; j désigne, naturellement, l'intervalle de définition de la fonction q.

4. Le problème dont nous venons de parler peut être traiter avec beaucoup de succès, au moins dans le cas où les équations de Kummer en question sont de type

oscillatoire, par des moyens de préférence algébriques.

Pour préciser ce qu'on entend sous équation de Kummer de type oscillatoire et pour rappeler des faits qui semblent indispensables pour comprendre les matières envisagées, je vais indiquer, à titre d'introduction, quelques remarques peéliminaires.

Soit (q) une équation différentielle Jacobienne

$$(q) \qquad y'' = q(t)y \ ,$$

dont le coefficient, q, appelé par occasion le porteur de l'équation (q), est continu dans un intervalle $j = (a,b)$, borné ou non.

En premier lieu rapellons la notion des premières phases, ou bien plus brièvement: phases. On appelle première phase de l'équation (q) toute fonction, , qui est continue dans l'intervalle j et vérifie, dans cet intervalle, à l'exception des zéros de la fonction v, l'équation

$$\mathrm{tg} \quad (t) = \frac{u(t)}{v(t)} \ ;$$

u,v désignet des intégrales mutuellement indépendantes quelconques de l'équation (q).

Toute phase de l'équation (q), , jouit dans l'intervalle j des propriétés suivante:

(3) 1° C ; 2° = 0 pour t j .

On démontre de plus que, par toute phase de l'équation (q) se trouve bien déterminé le porteur q de l'équation (q) d'après la formule

(4) - ,t - (t) = q(t) .

Pour abrévier le langage on parle occasionnellement des phases du porteur q au lieu de celles de l'équation (q).

En second lieu rappelons, qu'on appelle l'équation (q) oscillatoire si les intégrales de cette équation admettent infinimet beaucoup de zéros vers les deux extrémités de l'intervalle j. Ainsi, par exemple, l'équation (-1): $y'' = -y$, définie dans l'intervalle j = (- ,) est oscillatoire.

On démontre qu'une équation (q) est oscillatoire alos et alors seulement, si ses phases, , sont inférieurement et supérieurement non bornées:

(3a) lim (t) = - .sgn ; lim (t) = .sgn .

Cela étant rappelé, nous sommes en mesure de préciser la notion des équations de Kummer de type oscillatoire: Nous disons qu'une équation de Kummer (Qq) est de type oscillatoire si les intervalles de définition, J,j, des deux équations Jacobiennes (Q), (q) coincident avec l'intervalle (- ,): J = j = (- ,) , et que ces équations sont oscillatoires.

5. Passons maintenant aux fondements de la théorie algébrique des équations de Kummer de type oscillatoires. Convenons de désigner par j l'intervalle (- ,) : j = (- ,).

Dans la théorie en question la notion fondamentable est celle du groupe des phases.

Considérons l'ensemble formé par toutes les fonctions-phases définies dans l'intervalle j, c'est-à-dire par les fonctions définies dans l'intervalle j qui vérifient les conditions (3) (3a(. Il est aisé de voir que, si l'on introduit dans l'ensemble l'opération binaire (multiplication) consistant en composition des fonctions, l'ensemble devient un groupe. C'est precisément ce groupe qu'on appelle le groupe des phases. L'élément neutre de se groupe est, évidément, la fonction (t) = t . L'importance de la notion du groupe des phases, , pour la théorie des équations différentielles Jacobiennes oscillatoires consiste en la relation suivante, existant entre le groupe et les équations différentielles (q): Chaque phase d'une équation (q) est un élément du groupe et, inversement, chaque élément représente une phase d'une équation Jacobienne (q) et précisément de celle, dont le porteur résulte de en sens de la formule (4).

La théorie algébrique des équations de Kummer de type oscillatoire consiste, au fond, en la recherche de l a structure algébrique du groupe , fondée sur la théorie des groupes, et en étude des conséquences des propriétés de la structure en question pour les solutions des équations de Kummer de type oscillatoire. Soulignons que, pour cette théorie, les deux suppositions ci-dessus, imposées aux équations linéaire (q), à savoir celle que leur intervalle de définition est toujours l'intervalle j = (- ,), et l'autre qu'il s'agit des équations oscillatoires, sont tout-à-fait essentielles. En effet, les équations considérées (q) étant supposées oscillatoires, les valeurs des éléments du groupe recouvrent l'intervalle j qui est précisément l'intervalle de définition de ces éléments. On peut par conséquent composer deux éléments quelconques , et le résultat de cette opération, c'est-à-dire le "produit" (t) = (t) , est encore un élément de . Le groupe se trouve par conséquent bien déterminé.

6. Le sousgroupe fondamental b consiste évidemment en toutes les solutions de l'équation de Kummer (-1,-1) définies dans l'intervalle .

Nous allons maintenant indiquer les propriétés de structure du groupe en tant qu'elles nous seron utiles dans la suite.

D'abord, on se rend compte facilement que l'ensemble formé par les phases de l'équation (-1), c'est-à-dire de l'équation y" = -y , est un sousgroupe dans , . Nous appelons le sousgroupe fondamental: . Son importance se manifeste en ceci: Toute classe latérale à droite dans le groupe , engendrée par le sousgroupe fondamental , ( ) est formé précisément par les phases d'une équation (q) bien déterminée; le porteur de cette équation q, s'obtient d'après la formule (4) en prenant pour n'importe quel élément de la classe considérée. Or, en appliquant un théorème bien connu dans la théorie des groupes, on voit que les différentes classes latérales à droite dans le groupe , engendrées par , constituent une décomposition du groupe , . Se présente, par conséquent, la situation suivante (illustrée dans la fig.1): Le groupe se décompose en classes latérales à droite, engendrées par le sousgroupe fondamental , de manière que, chaque classe en question est formée précisément par les phases d'une équation Jacobienne (q). Désignons par q l'ensemble formé par les porteurs de toutes les équations (q) définies dans l'intervalle j et oscillatoires; désignons de plus par la représentation de l'ensemble q sur la décomposition $/_d$, qui fait correspondre à chaque porteur q q la classe $_d$ consistant en phases de ce porteur; = q. La représentation est, manifestement, biunivoque.

q -1

= q

Fig. 1

Voici encore une autre propriété de structure du groupe qui interviendra dans nos raisonnements ultérieurs. Cette propriété consiste en ceci que, le normalisateur du sousgroupe fondamental dans le groupe se confond avec ; = . On peut aussi énoncer ce resultat en termes que, les éléments qui transforment le sousgroupe fondamental dans lui-même, d'après la formule = , sont précisément les éléments dans .

7. Considérons maintenant une équation de Kummer de type oscillatoire

(Qq) $\quad - X,t \quad + Q(X)X' = q(t)$.

Les solutions de cette équation définies dans l'intervalle j, sont certaines fonctions, appelées dispersions générales de l'équation (Qq), fonctions, que l'on sait construire effectivement. En faisant cette remarqe nous ne voulons point insister sur l'intégration constructive de l'équation (Qq), étant donné que nous nous intéressons actuellement de la théorie algébrique de l'équation (Qq). Le seul but de la remarque en question est de mentionner l'existence des relations entre la théorie des dispersions générales de l'équation (Qq) et la théorie algébrique considérée.

En parlant dans la suite de solutions de l'équation (Qq) nous avons toujours en vue des solutions définies dans l'intervalle j tout entier.

Le résultat fondamental de la théorie algébrique de l'équation (Qq) est le suivant: L'ensemble formé par toutes les solutions de l'équation (Qq), I(Q,q), est donné par la formule

(5) $\quad I(Q,q) = \quad ,$

resp. étant d'arbitraires phases de l'équation Jacobienne (Q) resp. (q), choisies une fois pour toutes. designe, naturellement, la fonction inverse de .

On voit par conséquent que l'ensemble I(Q,q) est un complexe, c'est-à-dire un sousensemble dans .

En appliquant la formule (5) aux équations associées à l'équation (Qq), équation (QQ) resp. (qq), on obtient les formules

I(Q,Q) = , I(q,q) = .

On en voit que les ensembles formés par toutes les solutions des équations associées à l'équation (Qq), (QQ), resp. (qq), C'est-à-dire les ensembles I(Q,Q) resp. I(q,q), sont des sousgroupes dans et, précisément, les sousgroupes conjugués avec par rapport aux phases resp. .

Dans la suite nous désignons les sousgroupes en question par , :

(I(Q,Q)=) = ; (I(q,q=) = .

Le résultat exprimé par la formule (5) entraîne plusieurs conséquences au sujet de l'ensemble I(Q,q). Nous allons en mentionner seulement la caractérisation du complexe I(Q,q) à l'aide des groupes , .

Dans ce but partons de la formule evidente

I(Q,q) = ( ) = ( ).

On voit que, le complexe I(Q,q) représente la classe latérale à gauche de l'élément ( ), engendrée par le sousgroupe , et, en même temps, la classe latérale à droite du même élément , engendrée par .

Est valable, par conséquent, la formule

I(Q,q) $/_g$ $/_d$.

Or, nous avons dit que le normalisateur du sousgroupe , dans , se confond avec : = . C'est précisément cette propriété du sousgroupe qui permet de démontrer que, les deux décompositions du groupe , $/_g$ et $/_d$, n'ont en commun qu'un seul élément qui est alors, nécéssairement, le complexe I(Q,q):

$$I(Q,q) = \quad /_g \qquad /_d \quad .$$

Nous voilà arrivés à la caractérisation suivante du complexe $I(Q,q)$: Le complexe $I(Q,q)$ est l'élément commun unique aux deux décomposition du groupe : $/_g$ et $/_d$. Une conséquence immédiate de ce résultat est donnée par la proposition suivante:

Une fonction-phase X est une solution de l'équation de Kummer (Qq) alors et alors seulement, si elle transforme les deux sousgroupes , de la manière suivante:

(6) $$X \quad X = \quad .$$

Et voici le premier résultat au sujet de notre problème initial:

Toutes les solutions simultanées de deux équations de Kummer, (Qq), (-1,-1), solutions X, sont précisément les éléments du sousgroupe fondamental , qui transforment les sousgroupes respectifs et d'après la formule (6).

8. Nous allons maintenant procéder à la recherche systématique des solutions simultanées de deux équations de Kummer (Qq), (-1,-1).

Dans la suite nous désignons d'habitude les éléments du sousgroupe par des lettres telles que , , etc., et leur fonctions inverses par , , etc. Nous considérons deux équations de Kummer de type oscillatoire: (Qq), (-1,-1).

Supposons qu'il existe de solutions simultanées des deux équations en question et soit X l'une d'entre elles.

On a, d'après la formule (5)

(7) $$(\quad =) \; X = \quad ,$$

et étant des phases des équations Jacobiennes (Q) resp. (q) choisies arbitrairement mais une fois pour toutes. La formule (7) entraîne, évidement,

(8) $$= \quad .$$

Inversement, s'il y a pour certaines phases , des équations (Q) resp. (q) une relation de la forme (8), formée à l'aide de convenables éléments , , alors la formule (7) a lieu et la fonction X = représente une solution simultanée des équations de Kummer (Qq), (-1-1).

Nous voilà arrivés à la proposition suivante:

Pour que les équations de Kummer (Qq), (-1,-1) admettent des solutions simultanées, il faut et il suffit que deux phases quelconques, , , des équations Jacobiennes (Q) resp. (q), soient liées d'après la formule (8).

9. La condition nécéssaire et suffisante dont nous venons de parler et qui se trouve exprimee par la formule (8) admet une signification algébrique simple que nous allons élucider.

Dans ce but il paraît utile de faire une brève excursion dans la théorie des groupes. Soit, pour le moment, un groupe abstrait quelconque et un arbitraire sousgroupe dans . Envisageons les deux décompositions en classes latérales à gauche et à droite du groupe , engendrées par : $/_g$ et $/_d$. Or, les algébristes savent que ces décompositions jouissent d'une propriété remarquable qu'on exprime en disant que, les décompositions en question sont associables. Cela veut dire ceci: Il existe une décomposition du groupe , , c'est-à-dire un système des sousensembles non vides, mutuellement disjoints et recouvrant le groupe , qui a la suivante particularité: Chaque élément est la réunion de certains éléments de l'une et, en même temps, de l'autre décomposition $/_g$ et $/_d$, et, de plus, deux arbitraires éléments $/_g$, $/_d$, qui sont contenus dans le même élément , se coupent dans un ensemble non vide:

.

Pour alrévier le langage nous appelons blocs (engendrés par le sousgroupe) les élements de la décomposition , et nous désignons par $/_g$ resp. $/_d$ l'ensemble formé par les éléments de la décomposition $/_g$ resp. $/_d$, qui sont contenus dans le bloc .

Cela étant rappelé, soit un élément quelconque et le bloc contenant cet élément: .

On démontre que le bloc se trouve exprimé de la manière suivante:

(9) = .

D'après cette formule, tout élément a la forme

(10) = ,

, étant de convenables éléments, et, inversement, si un élément s'exprime de cette façon, il se trouve contenu dans le bloc .

La situation se trouve illustrée dans la fig. 2.

Fig. 2.

Considérons alors dans le groupe le sousgroupe conjugué avec par rapport à l'élément :

=

et envisageons son intersection avec le sousgroupe :

= .

résulte évidemment un sousgroupe dans , et, par conséquent, il engendre les deux décompositions du sousgroupe en classes latérales: $/_g$, $/_d$. Or, on démontre il y a entre les décompositions

$/_d$ et $/_d$

la relation suivante:

Il existe une représentation biunivoque de la décomposition $/_d$ sur $/_d$ qui jouit des propriétés suivantes:

= , pour $/_d$.

La situation est illustrée dans la fig.3.

Fig.3.

10. Or, après avoir fait cette excursion dans la théorie des groupes, revenons au groupe des phases et à son sousgroupe fondamental .

Ét nt donné un porteur , ses phases, formant une classe de la décomposition $/_d$, se trouvent contenues dans un bloc , engendré par le sousgroupe . Convenons de dire que le porteur q lui-même appartient au bloc .

On démontre, en servant de la propreté 2^0 de la représentation , pour tout porteur ( ) appartenant au bloc , les propositions suivantes:

L'ensemble = , consistant en premières phases du porteur , contient toutes les fonctions = formées avec d'arbitraires éléments .

Le porteur s'exprime par la formule

(11) (t) = -1 + 1 + (t) (t),

étant le porteur déterminé par la première phase et (t) un arbitraire élément de la classe $/_d$).

Cela étant, revenons à la recherche des solutions simultanées des deux équations de Kummer ( ), (-1,-1).

Nous savons que, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions simultanées des deux équations de Kummer considérées consiste en ceci que, deux pre ières phases quelconques des équations linéaires (Q),(q) soient liées d'après la formule (8). Or, en comparant cette formule avec (10) on voit que la condition en question veut dire, que les porteurs Q,q appartiennent à un bloc engendré par le sousgroupe fondamental , qui est le même pour les deux.

Supposons alors que cette condition se trouve vérifiée. Les fonctions Q,q ont la forme, d'après (11),

$$Q\ (T) = -1 + \quad 1 + q \quad (T) \qquad (T),$$

$$q(t) = -1 + \quad 1 + q \quad (t) \qquad (t),$$

les élements , étant choisis arbitrairement.

L'équation (Qq) s'écrit alors

$$-\ X,t\ - X\ +\ 1 + q\ \ E(X)\ \ E\ \ (X).X\ = -1 +\ 1 + q\ \ (t)\ \ (t)$$

et, par conséquent, le système (Qq), (-1,-1) peut être remplacé par le suivant

$$(12) \qquad 1 + q\ \ (EX)\ \ EX\ =\ 1 + q\ \ (t)\ \ (t)$$

$$X,t\ + X\ =\ 1.$$

Nous savons que les porteurs Q,q admettent les premières phases · , formées avec les élements E Q, q intervenant dans le système (12). Si nous appliquons la formule (5) nous voyons que l'ensemble formé par toutes les solutions du système (Qq), (-1,-1), et que nous désignons par I(Q,q; -1,-1), est donné par la formule suivante:

$$(13) \qquad I(Q,q;\ -1,-1) = E \qquad .$$

Nous arrivpns de cette façon au résultat final que voici:

Le système formé par deux équations différentielles de Kummer de type oscillatoire, (Qq), (-1,-1), admet des solutions alors et alors seulement, si les coefficient Q,q appartiennent au même bloc engendré par le sousgroupe fondamental .

Si cette condition est vérifiée et que est un élément du bloc correspondant, le système en question peut être remplacé par le système (12), dans lequel q désigne le porteur admettant la phase tandis que sont des éléments dans les classes Q, q $/_d$, choisis arbitrairement mais une fois pour tous.

L'ensemble formé par toutes les solutions du système (Qq), (-1,-1), on bien du système (12) qui lui est équivalent, est donné par la formule (13).

Nous nous sommes occupés jusqu'à présent de la recherche des solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer de caractère oscillatoire dont l'une était l'équation spéciale (-1,-1). Or, le cas général, où il s'agit de deux équations différentielles de Kummer de caractère oscillatoire quelconques, (Q_1q_1), (Q_2q_2), peut être ramené aux considérations précédentes.

En effet, soient Q et q les porteurs des équations linéaires admettant les premières phases et formées à l'aide d'arbitraires premières phases ; des équations (Q_1), (Q_2), (q_1), (q_2).

On démontre que les équations différentielles de Kummer (Q_1q_1), (Q_2q_2) admettent des solutions simultanées alors et alors seulement, si les ensembles et formés par les premières phases des équations (Q) et (q) sont situés dans le même bloc engendré par le sousgroupe fondamental .

La recherche des solutions simultanées des équations (Q_1q_1), (Q_2q_2) se trouve ainsi ramenée, au moins en principe, au problème précédent posé pour les équations $(Q_{12}q_{12})$, (-1,-1).

On peut aller pus loin et démontrer la proposition suivante:

Si la condition ci-dessus concernant les équations (Q_{12}) et (q_{12}) se trouve vérifiée et que est une solution commune des équations (Q_1q_1), (Q_2q_2), l'ensemble, $I(Q_1,q_1; Q_2,q_2)$, formé par toutes les solutions simultanées des équations en question, est donné par une quelconque des expressions suivantes:

$I(Q_1,q_1; Q_2,q_2) = \quad = \quad =$

$= \quad = \quad ,$

la signification de etc. étant évidente.

12. Qu'il me soit permis de terminer ma conférence par la remarque suivante:

Nous venons de voir que des notions algébriques représentent un élément essentiel pour la réessite des recherches au sujet du problème dont nous nous sommes occupés. Or, l'importance de ces notions dans la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre nest point limitée à ce problème, mais elle se manifeste dans bien d'autres problèmes de la théorie en question. En faisant usage des notions et méthodes algébriques on trouve des théorèmes au sujet des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, théorèmes, qui sont bien profonds et que l'on ne pourrait pas espérer à découvrir, à mon avis, par des méthodes purement analytiques. La théorie considérée des transformations pourrait alors, me semble t'il, une belle illustration de l'utilité d'une synthèse de méthodes qui son empruntées de différentes branches des mathématiques modernes.

- • -

13.8.1969