

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Éléments géométriques dans la théorie transformations des équations différentielles linéaires et ordinaires du deuxièmes ordre

Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale (Bologna, 28-30, IX, 1967), 1970, 97-108

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500124>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

OTOKAR BORŮVKA

Éléments géométriques dans la théorie des
transformations des équations différentielles
linéaires et ordinaires du deuxième ordre

Estratto da

Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale (Bologna, 28-30, IX, 1967)

EDITORI: ZANICHELLI (BOLOGNA) - SWETS & ZEITLINGER (AMSTERDAM)

Éléments géométriques dans la théorie des transformations des équations différentielles linéaires et ordinaires du deuxième ordre

OTOKAR BORŮVKA

1. – La présente conférence est conçue de manière à donner un bref aperçu de l'état actuel de la théorie des transformations des équations différentielles linéaires ordinaires et homogènes du deuxième ordre et des éléments géométriques intervenant dans cette théorie. Je me permets de remarquer dès le commencement qu'il s'agit, dans ce qui suit, d'une théorie qualitative dans le domaine réel et de caractère global, et des éléments géométriques qui sont en relation avec les propriétés différentielles centro-affines des courbes planes. Pour abrévier le langage je parlerai d'habitude de la théorie des transformations sans préciser qu'il s'agissait des transformations des équations différentielles mentionnées plus haut.

2. – Le problème de base de la théorie en question remonte à l'illustre géomètre allemand E. E. Kummer (1834) et consiste en ceci:

Étant données deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre que nous prenons, sans restreindre la généralité du problème, dans la forme jacobienne,

$$(q) \quad y'' = q(t)y,$$

$$(Q) \quad \dot{Y} = Q(T)Y,$$

il s'agit de trouver des fonctions $w(t)$, $X(t)$ de manière que, pour toute solution Y de l'équation (Q), par exemple, la fonction composée

$$(1) \quad y(t) = w(t) \cdot Y[X(t)]$$

soit une solution de l'équation (q). On suppose que les fonctions q , Q , appelées parfois *porteurs* des équations en question, sont continues dans certains intervalles ouverts, $j = (a, b)$, $J = (A, B)$, bornés ou non.

En analysant ce problème on arrive dès le début à une équation différentielle non-linéaire du troisième ordre que nous appelons l'équation de Kummer et qui est la suivante:

$$(Qq) \quad -\{X, t\} + Q(X)X'^2(t) = q(t),$$

le symbole $\{X, t\}$ désignant la dérivée schwarzienne de la fonction X au point t :

$$\{X, t\} = \frac{1}{2} \frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4} \frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}.$$

On démontre que toute fonction X satisfaisant au problème de Kummer est une solution de l'équation (Qq), la fonction $w(t)$ étant const.: $\sqrt{|X'(t)|}$, et, inversement, toute solution X de l'équation (Qq) réalise une transformation de l'équation (Q) dans (q) en sens de la formule (1). On peut dire que la théorie des transformations est, au fond, l'étude de l'équation (Qq) et ses relations avec les équations linéaires (q), (Q).

3. – Les notions de base de la théorie en question sont les notions des phases et des points conjugués d'une équation (q).

Soit u, v une base d'une équation (q), c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation (q). On appelle *première phase* de la base u, v toute fonction $\alpha(t)$ qui est continue dans l'intervalle j et qui satisfait, pour $t \in j$, $v(t) \neq 0$, à la relation $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t) : v(t)$. On voit qu'il y a précisément un système dénombrable de premières phases de la base u, v et que les fonctions de ce système diffèrent l'une de l'autre par des multiples entiers de π . On appelle première phase de l'équation (q) une première phase d'une base quelconque de l'équation (q). Il importe de remarquer que les premières phases de l'équation (q) résultent inférieurement et supérieurement non-bornées si et seulement si l'équation (q) est oscillatoire. On appelle une équation (q) oscillatoire si ses intégrales s'annulent vers les deux limites a, b de l'intervalle j infiniment de fois.

A côté des premières phases on définit d'une manière analogue les *secondes phases* de la base u, v , $\beta(t)$, en se servant de la formule $\operatorname{tg} \beta(t) = u'(t) : v'(t)$, et, on étend cette notion aux secondes phases de l'équation (q).

Passons maintenant aux *nombres conjugués* de l'équation (q). On distingue quatre espèces des points conjugués. Étant donnés deux nombres différents l'un de l'autre, $t_1, t_2 \in j$, on dit que

1) les points t_1, t_2 sont mutuellement conjugués de première espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) s'annulant en t_1 et t_2 ;

2) les nombres t_1, t_2 sont mutuellement conjugués de deuxième espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) dont la dérivée, y' , s'annule en t_1 et t_2 ;

3) le nombre t_2 est conjugué avec t_1 de troisième espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) qui s'annule en t_1 et dont la dérivée, y' , s'annule en t_2 ;

4) le nombre t_2 est conjugué avec t_1 de quatrième espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) qui s'annule en t_2 et dont la dérivée, y' , s'annule en t_1 .

4. – Une idée de la structure de l'état actuel de la théorie des transformations donne le schéma suivant:

Théorie des transformations			
Théorie des dispersions		Théorie générale	
Dispersion centrales	Dispersion générales	Transformations générales	Transformations complètes

On voit que la théorie en question consiste en deux parties dont l'une est la théorie des dispersions et l'autre la théorie générale des transformations.

La théorie des dispersions s'applique aux équations linéaires (q), (Q) aux intégrales oscillatoires et son développement procède à partir de la notion des dispersions centrales aux propriétés des dispersions générales, tout en contenant une intégration constructive de l'équation de Kummer (Qq).

La théorie générale, à son tour, est applicable aux équations linéaires (q), (Q) quelconques et ne se préoccupe, par conséquent, pas du caractère oscillatoire des intégrales de ces équations. Cette théorie générale gravite autour du théorème sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (Qq), théorème qui assure l'existence et l'unicité d'une solution la plus large déterminée par des conditions initiales cauchyennes du deuxième ordre. Un segment de cette théorie s'occupe des transformations appelées complètes, c'est-à-dire transformations réalisées par des solutions complètes de l'équation (Qq). On appelle *complète* une solution X de l'équation (Qq) si son intervalle de définition coïncide avec l'intervalle j de l'équation (q) et ses valeurs recouvrent l'intervalle J de l'équation (Q). Dans la théorie des transformations complètes on étudie l'existence et la généralité des solutions complètes de l'équation (Qq), la structure de l'ensemble formé par ces solutions, etc.

Dans la suite je vais insister surtout sur la théorie des dispersions et des éléments géométriques apparaissant dans cette théorie.

5. – Tout d'abord nous allons rappeler la notion fondamentale de la théorie des dispersions, à savoir la notion des *dispersions centrales*. Cette notion est étroitement liée à celle des nombres conjugués.

Supposons que l'équation (q) soit oscillatoire. Pour quelques raisons il est utile de supposer davantage que la fonction q soit toujours négative. Soit alors $t \in j$ un nombre arbitraire et u resp. v une intégrale de l'équation (q) qui s'annule resp. dont la dérivée, v' , s'annule pour t . Soit $n = 1, 2, \dots$, et désignons par

$\varphi_n(t)$ ou $\varphi_{-n}(t)$ le n -ième zéro de l'intégrale u qui suit ou qui précède le zéro t ;

$\psi_n(t)$ ou $\psi_{-n}(t)$ le n -ième zéro de la fonction v' qui suit ou qui précède le zéro t ;

$\chi_n(t)$ ou $\chi_{-n}(t)$ le n -ième zéro de la fonction u' qui suit ou qui précède le nombre t ;

$\omega_n(t)$ ou $\omega_{-n}(t)$ le n -ième zéro de l'intégrale v qui suit ou qui précède le nombre t .

Soit $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$. Nous appelons la fonction $\varphi_\nu, \psi_\nu, \chi_\nu, \omega_\nu$ la dispersion centrale de première, deuxième, troisième, quatrième espèce d'indice ν , et, en particulier, la fonction $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \omega_1$ la dispersion fondamentale de l'espèce correspondante. Ces fonctions ne dépendent manifestement pas du choix particulier des intégrales u et v .

On voit bien que pour tout nombre $t \in j$ la valeur $\varphi_\nu(t)$ est le $|\nu|$ -ième nombre conjugué de première espèce avec t , supérieur ou inférieur à t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$, et on a une situation analogue dans le cas des dispersions cen-

trales des autres espèces:

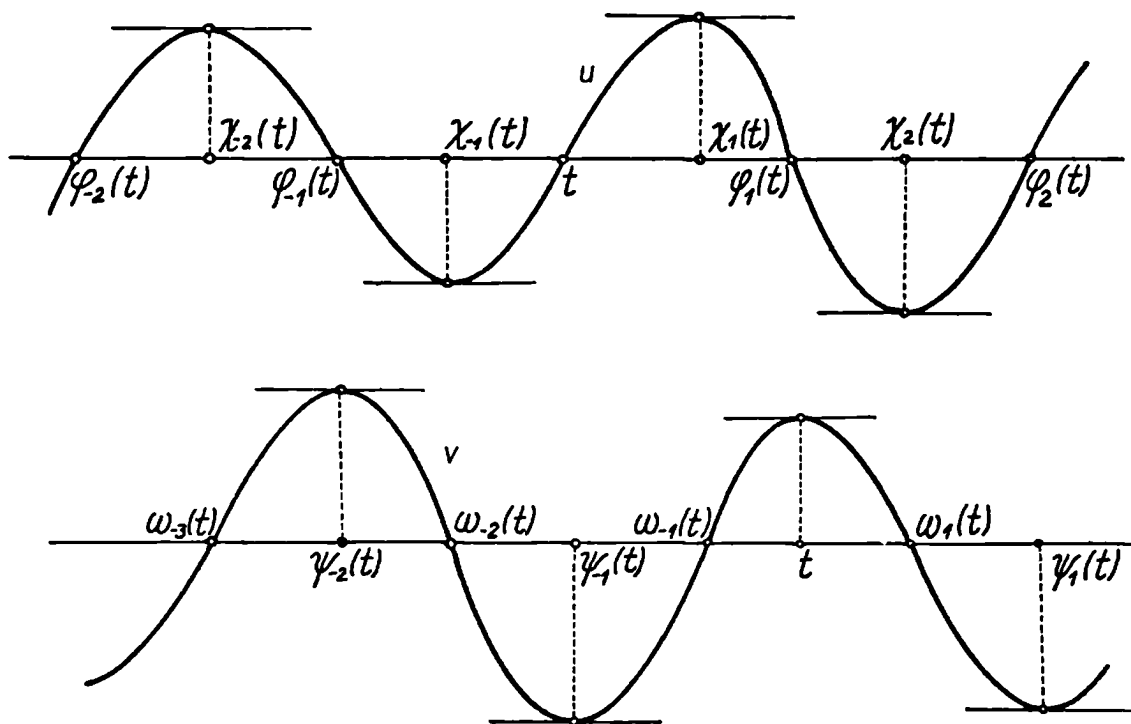


Fig. 1.

Les dispersions centrales jouissent de nombreuses propriétés qui s'expriment, en général, par des formules simples et élégantes. Leur rôle dans la théorie des transformations consiste en ceci que, ces fonctions transforment les intégrales u de l'équation (q) et leurs dérivées u' dans elles-mêmes ou bien les unes dans les autres. La dispersion centrale φ_ν , par exemple, transforme toute intégrale u de l'équation (q) en elle-même dans le sens de la formule

$$u(t) \rightarrow (-1)^\nu \frac{u[\varphi_\nu(t)]}{\sqrt{\varphi_\nu'(t)}} \quad (w(t) = (-1)^\nu \sqrt{\varphi_\nu'(t)})$$

et on a des formules analogues s'il s'agit des dispersions centrales des espèces supérieures. Dans la théorie des dispersions centrales, de différents problèmes ont été étudiés. Qu'il me soit permis d'en mentionner deux, qui se présentent — nous le verrons plus tard — en relations avec certaines questions géométriques.

Le premier problème en question consiste en étude des équations (q) dont les dispersions fondamentales φ_1 , ψ_1 sont confondues: $\varphi_1(t) = \psi_1(t)$.

Ces équations (q) jouissent de la propriété que toutes les dispersions centrales de première et deuxième espèce ayant le même indice ν sont confondues: $\varphi_\nu(t) = \psi_\nu(t)$ pour $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots; t \in j$. Une propriété caractéristique pour ces équations consiste en ceci que, la dispersion fondamentale $\varphi_1(t)$ ($= \psi_1(t)$) est linéaire et de la forme $\varphi_1(t) = ct + k$ ($c > 0$). On a trouvé des expressions explicites pour les porteurs de toutes les équations en question. Parmi les équations (q) à dispersions fondamentales φ_1 , ψ_1 confondues figurent les équations (q) dont les dispersions χ_1 , ω_1 sont elles-mêmes confondues. On les a étudié en détail et on connaît leurs propriétés.

L'autre problème de la théorie des dispersions centrales que je voudrais mentionner concerne les équations oscillatoires (q), définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et qui jouissent de la propriété que, la distance de deux zéros consécutifs de chaque intégrale est constante et toujours la même. Il s'agit par conséquent des équations (q) qui ont la même dispersion fondamentale $\varphi_1(t) = t + k$, $k(> 0)$ étant une constante.

L'étude de ces équations (q) a fait l'objet des recherches de plusieurs auteurs. On peut, évidemment, généraliser ce problème de manière à étudier les équations oscillatoires (q), définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, dont la dispersion fondamentale $\varphi_1(t)$, d'ailleurs arbitraire, est donnée d'avance. On a trouvé, en particulier, par des méthodes empruntées de la théorie des groupes le résultat suivant, qu'il y a toujours une infinité des équations (q) en question et que la puissance de l'ensemble formé par ces équations ne dépend point du choix particulier de la fonction $\varphi_1(t)$ et égale toujours à la puissance du continu, \aleph . On a trouvé des expressions explicites pour les porteurs de ces équations, dont l'une est donnée par la formule suivante

$$(2) \quad q(t) = q_0(t) + [f''\alpha(t) + f'^2\alpha(t) + 2f'\alpha(t) \cdot \cot \alpha(t)] \alpha'^2(t);$$

$q_0(t)$ désigne le porteur d'une équation (q_0) dont la dispersion fondamentale est $\varphi_1(t)$, $\alpha(t)$ est une (première) phase de l'équation (q_0), tandis que $f(t)$ est une fonction arbitraire définie dans j , deux fois continûment différentiable, périodique de période π et jouissant des propriétés suivantes:

$$(3) \quad f(0) = f'(0) = 0; \quad \int_0^\pi \frac{\exp[-2f(\sigma)] - 1}{\sin^2 \sigma} d\sigma = 0.$$

Or revenons au cas particulier $\varphi_1(t) = t + k$ ($k > 0$). Remarquons que, pour $k = \pi$ on peut choisir $q_0(t) = -1$, $\alpha(t) = t$. La formule (2) donne alors

$$(4) \quad q(t) = -1 + f''(t) + f'^2(t) + 2f'(t) \cot t,$$

la fonction f ayant les propriétés indiquées. Cette formule (4) a été trouvée pour la première fois directement par M. F. Neuman [1].

Insistons pour un moment sur les équations (q) oscillatoires et définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, dont la dispersion fondamentale est $\varphi_1(t) = t + \pi$. Les coefficients de ces équations sont par conséquent donnés par la formule (4). Désignons par Q_π l'ensemble formé par les fonctions q en question dont les valeurs sont toujours ≤ 0 . En partant de la formule (4) M. F. Neumann [2] a trouvé récemment le résultat élégant exprimé par la formule

$$(5) \quad \max_{q \in Q_\pi} \int_0^\pi |q(\sigma)|^p d\sigma = \pi,$$

et valable pour tout nombre p tel que $0 < p \leq 1$, le maximum étant atteint précisément pour la fonction $q(t) = -1$.

6. – Avant de passer à la partie géométrique de ma conférence qu'il me soit permis d'insister pour un moment sur les dispersions générales et surtout sur la théorie algébrique de ces dispersions générales.

Étant données deux équations (q) , (Q) oscillatoires dans les intervalles j resp. J , on entend sous dispersions générales des équations (q) , (Q) certaines fonctions d'une variable indépendante, fonctions qui dépendent continûment de trois paramètres, se trouvent définies constructivement et à l'aide des équations (q) , (Q) dans l'intervalle j , et dont les valeurs recouvrent l'intervalle J . On parle aussi, par occasion, des dispersions générales de l'équation (Qq) . L'importance de ces fonctions pour la théorie des transformations consiste en ceci que, les dispersions générales des équations (q) , (Q) sont toutes et seules les intégrales de l'équation de Kummer (Qq) . On peut dire que la théorie constructive des dispersions générales est, au fond, une théorie constructive d'intégration de l'équation de Kummer dans le cas oscillatoire.

Je vais maintenant parler de la théorie algébrique des dispersions générales, théorie qui s'est montrée bien efficace dans l'étude des transformations dans le cas oscillatoire. Dans la suite l'intervalle de définition des fonctions que nous allons considérer est l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Convenons d'appeler *fonction-phase* toute fonction, α , définie dans l'intervalle j , qui est inférieurement et supérieurement non-bornée et trois fois continûment différentiable, la dérivée α' étant constamment différente de zéro. On démontre que toute (première) phase de chaque équation oscillatoire (q) dans l'intervalle j est une fonction-phase, la réciproque étant encore vraie: toute fonction-phase, α , est une (première) phase de l'équation (q) , le porteur q étant donné par la formule $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$. C'est alors de cette raison qu'on parle plus simplement des phases au lieu des fonctions-phases.

Cela étant, soit \mathfrak{G} l'ensemble formé par toutes les phases. Définissons dans \mathfrak{G} une opération binaire — multiplication — moyennant de composition des fonctions, de sorte que, le produit $\alpha\beta$ d'un couple ordonné $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$ est la fonction composée $\alpha[\beta(t)]$. Avec cette multiplication l'ensemble \mathfrak{G} devient un groupe que l'on appelle *groupe des phases*. On peut dire que la théorie algébrique des dispersions générales consiste en étude des propriétés de structure du groupe \mathfrak{G} et leurs rapports aux dispersions générales des équations linéaires du deuxième ordre.

En examinant la structure du groupe \mathfrak{G} on rencontre tout d'abord un sous-groupe $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}$ qui est invariant dans \mathfrak{G} et qui consiste en toutes les phases constamment croissantes. Ce sous-groupe \mathfrak{P} est de l'indice 2 de sorte que, le groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ est formé de deux classes dont l'une est \mathfrak{P} tandis que l'autre consiste en toutes phases constamment décroissantes.

Un autre élément important de la théorie en question est le sous-groupe $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$, appelé le *sous-groupe fondamental*. Ce sous-groupe fondamental \mathfrak{E} consiste précisément en toutes les phases de l'équation $y'' = -y$, prises, naturellement, dans l'intervalle j . On démontre que le centre, \mathfrak{Z} , du groupe $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{E}$ est dénombrable et se trouve formé par les phases $t + \nu\pi$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$): $\mathfrak{Z} = \{t + \nu\pi\}$.

L'importance du sous-groupe fondamental \mathfrak{E} dans nos recherches est basée surtout au fait suivant: Si l'on fait la décomposition du groupe \mathfrak{G} en classes latérales à droite par rapport au sous-groupe \mathfrak{E} , $E = \mathfrak{G}/_a\mathfrak{E}$, alors toute classe est formée précisément des phases d'une équation (q) , la correspondance en

question entre les classes latérales $\mathfrak{E}\alpha \in \bar{E}$ ($\alpha \in \mathfrak{G}$) et les équations (q) étant biunivoque.

De plus, considérons deux équations oscillatoires (q), (Q) et désignons par $I(Q, q)$ l'ensemble formé par les dispersions générales de ces équations (q), (Q). On a alors la formule

$$(6) \quad I(Q, q) = A^{-1} \mathfrak{E} \alpha,$$

A resp. α étant une phase quelconque de l'équation (Q) resp. (q).

La formule (6) montre, en particulier ($Q = q, A = \alpha$), que l'ensemble des dispersions générales de l'équation (qq) forme un sous-groupe dans \mathfrak{G} , qui est conjugué avec le sous-groupe fondamental \mathfrak{E} par rapport à chaque phase α de l'équation (q): $I(q, q) = \alpha^{-1} \mathfrak{E} \alpha$. On démontre que le centre du groupe $I(q, q) \cap \mathfrak{P}$ est formé précisément par les dispersions centrales φ_α de l'équation (q) et qu'il représente le groupe conjugué avec le groupe \mathfrak{B} par rapport à chaque phase α de l'équation (q): $\{\varphi_\alpha\} = \alpha^{-1} \mathfrak{B} \alpha$.

Un autre élément important dans la théorie qui nous occupe est fourni par l'ensemble \mathfrak{H} formé par toutes les phases appelées *élémentaires*, c'est-à-dire les phases $\alpha \in \mathfrak{G}$ vérifiant la relation $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \cdot \text{sgn } \alpha'$. Remarquons que les phases élémentaires sont les phases précisément de ces équations (q) dont la dispersion fondamentale φ_1 est linéaire et de la forme $\varphi_1(t) = t + \pi$. On démontre que cet ensemble $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ forme un sous-groupe dans le groupe \mathfrak{G} , appelé le *groupe des phases élémentaires*. On a les relations suivantes

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{H} \supset \mathfrak{E} \supset \{1\}$$

$\{1\}$ étant, naturellement, le sous-groupe dans \mathfrak{G} formé par le seul élément-unité $1 = t \in \mathfrak{G}$.

Désignons par \bar{H} la décomposition du groupe \mathfrak{G} en classes latérales à droite par rapport au sous-groupe \mathfrak{H} , $\bar{H} = \mathfrak{G}/_a \mathfrak{H}$. La relation $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ entraîne $\bar{E} \leq \bar{H}$, ce qui veut dire que toute classe $\mathfrak{H}\alpha \in \bar{H}$ est la réunion de certaines classes-éléments de la décomposition \bar{E} . On démontre que, deux équations (q), (\bar{q}) ont la même dispersion fondamentale φ_1 alors et alors seulement, si leurs phases sont contenues dans le même élément de la décomposition \bar{H} . C'est précisément là que le noyau de la démonstration du théorème mentionné plus haut affirmant que la puissance de l'ensemble formé par toutes les équations (q) à la même dispersion fondamentale φ_1 est toujours la même et égale à la puissance du continu, \aleph .

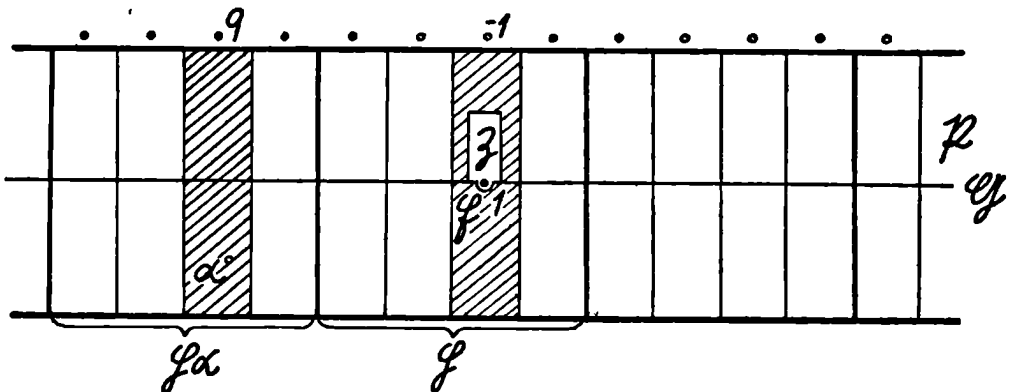


Fig. 2.

Il ne me reste, manifestement, plus de temps pour insister sur les autres propriétés de structure du groupe \mathcal{G} , propriétés qui entraînent des conséquences bien précieuses du point de vue de la théorie des transformations. Je me borne d'indiquer dans la figure 2 les différents éléments algébriques dont je viens de parler.

7. — J'arrive à présent à la partie géométrique de ma conférence, partie consacrée à l'étude des éléments géométriques apparaissant dans la théorie des transformations. Il s'agit — nous l'avons déjà dit — des matières en relation avec la géométrie différentielle centro-affine globale des courbes planes.

Considérons dans le plan centro-affin une courbe, C , définie par les coordonnées paramétriques $U(T), V(T)$; $T \in J = (A, B)$. Nous considérons ces coordonnées rapportées à un système fixe, formé par les vecteurs x_1, x_2 issus de l'origine O — le centre du plan centro-affin.

En vue des méthodes appliquées dans la suite, nous supposons, en premier lieu, que les fonctions U, V sont deux fois continûment différentiables et que le wronskien correspondant $W = UV' - U'V$ est toujours différent de zéro. Cette dernière supposition signifie, évidemment, qu'aucune tangente de la courbe C ne passe par le centre O . Dans ces hypothèses il existe une équation différentielle linéaire du deuxième ordre,

$$(P) \quad \ddot{Y} + P\dot{Y} + QY = 0,$$

à coefficients P, Q continus, admettant les fonctions U, V pour base. Il est évident que l'équation (P) est une équation de définition de la courbe C , les courbes intégrales de l'équation (P) déterminant la courbe C à des déplacements centro-affins près. Quant aux changements du paramètre, on en peut choisir de manière à réduire l'équation (P) à la forme jacobienne (q), $y'' = q(t)y$, le porteur q étant continu dans un intervalle $j = (a, b)$.

En second lieu, nous supposons que la courbe C soit régulière, c'est-à-dire localement convexe et sans points d'inflexion. Cela s'exprime par ceci que, le porteur q en question est toujours différent de zéro: $q(t) \neq 0$ pour $t \in j$.

En définitive, l'équation de définition de la courbe C , rapportée à un paramètre convenable, peut être prise dans la forme (q), le porteur q étant toujours différent de zéro.

Cela étant, les deux invariants fondamentaux de la courbe C , l'arc centro-affin orienté, $s(t|t_0)$, et la courbure centro-affine, $k(t)$, sont donnés par les formules suivantes:

$$(7) \quad s(t|t_0) = \operatorname{sgn} w \cdot \int_{t_0}^t \sqrt{|q(\sigma)|} d\sigma,$$

$$(8) \quad k(t) = \operatorname{sgn} w \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}} \right)', \quad (t, t_0 \in j)$$

w étant, naturellement, le wronskien formé par les coordonnées $u(t), v(t)$ de la courbe C . La validité de la formule (8) exige l'existence de la dérivée $q'(t)$.

Je vais maintenant parler des applications géométriques de la théorie des transformations.

8. – D'abord, en ce qui concerne la théorie générale des transformations, on y trouve des méthodes pour exprimer les coordonnées paramétriques d'une courbe C dans formes différentes et largement arbitraires.

En effet, soient $U(T), V(T)$ ($T \in J$) les coordonnées paramétriques de la courbe C et (Q) l'équation correspondante. Choisissons d'arbitraires fonctions, $u(t), v(t)$ ($t \in j$), qui sont deux fois continûment différentiables et dont le wronskien, w est constant et différent de zéro. Alors, en appliquant la théorie des transformations on démontre que l'on peut déplacer la courbe C et choisir son paramètre de manière à obtenir les coordonnées paramétriques de la courbe déplacée, \bar{C} , dans la forme

$$(9) \quad \bar{U}(t) = \varrho(t) \cdot u(t), \quad \bar{V}(t) = \varrho(t) \cdot v(t),$$

$\varrho(t)$ (> 0) étant une fonction convenable. A vrai dire, les formules (9) ne sont pas valables, en général, dans tout l'intervalle j mais seulement dans un sous-intervalle $i \subset j$, et, en même temps, elles n'expriment pas la courbe \bar{C} toute entière mais seulement une partie de cette courbe. C'est précisément la théorie des transformations complètes qui donne des renseignements au sujet des conditions dans lesquelles les formules (9) sont valables dans l'intervalle j et déterminent la courbe \bar{C} dans toute son étendue. Indiquons, à titre d'exemple, que dans le cas de l'équation (Q) oscillatoire, les coordonnées $\bar{U}(t), \bar{V}(t)$ de la courbe \bar{C} , toute entière, peuvent être prises dans la forme

$$\bar{U}(t) = \sqrt{|X'(t)|} \cdot \sin t, \quad \bar{V}(t) = \sqrt{|X'(t)|} \cdot \cos t, \quad (t \in (-\infty, \infty))$$

X étant une solution de l'équation de Kummer (Q, -1), ou bien, en d'autres termes, la fonction inverse d'une arbitraire phase A de l'équation (Q).

9. – Passons maintenant à la signification géométrique des dispersions centrales. Dans ce but, considérons la courbe C déterminée par les coordonnées $u(t), v(t)$ ($t \in j$) et soit (q) l'équation correspondante. Désignons par $P(t)$, $t \in j$, le point de la courbe C déterminé par la valeur t du paramètre et par $\tau(t)$ la tangente de la courbe C en $P(t)$.

On a alors les propositions suivantes:

1) Deux points $P(t_1), P(t_2)$ de la courbe C , déterminés par de différentes valeurs t_1, t_2 du paramètre, sont situés sur la même droite passant par le centre O alors et alors seulement, si les valeurs t_1, t_2 sont mutuellement conjuguées de 1-ère espèce;

2) deux tangentes $\tau(t_1), \tau(t_2)$ de la courbe C , déterminées par de différentes valeurs t_1, t_2 du paramètre, sont parallèles l'une à l'autre alors et alors seulement, si les valeurs t_1, t_2 sont mutuellement conjuguées de 2-ième espèce;

3) la tangente $\tau(t_2)$ et la droite $OP(t_1)$ sont parallèles l'une à l'autre alors et alors seulement, si la valeur t_2 est conjuguée avec t_1 de 3-ième espèce, ou bien, en d'autres termes, la valeur t_1 est conjuguée avec t_2 de 4-ième espèce.

En se rappelant de la définition des dispersions centrales on voit que les points $P[\varphi_\nu(t)]$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$) sont précisément les points d'intersection de la courbe C avec la droite $OP(t)$. En ce qui concerne les dispersions centrales des espèces plus élevées, on a la situation suivante:

$$\tau[\psi_\nu(t)] \parallel \tau(t), \quad \tau[\chi_\nu(t)] \parallel OP(t), \quad OP[\omega_\nu(t)] \parallel \tau(t):$$

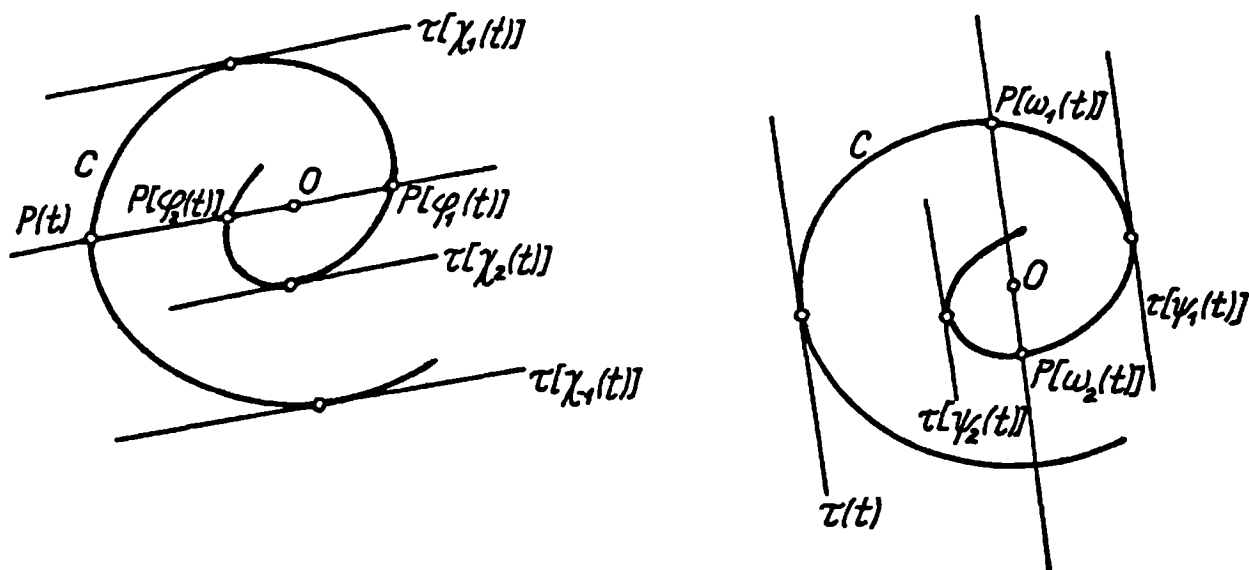


Fig. 3.

Voilà la signification géométrique des dispersions centrales.

Nos considérations conduisent, apparemment, à l'étude de certaines courbes que nous appelons *courbes (F)*. Étant donné un faisceau des droites, F , convenons d'appeler courbe (F) toute courbe qui est coupée par chaque droite du faisceau F en au moins deux points et de telle façon que les tangentes de la courbe, dans les différents points d'intersection, sont mutuellement parallèles.

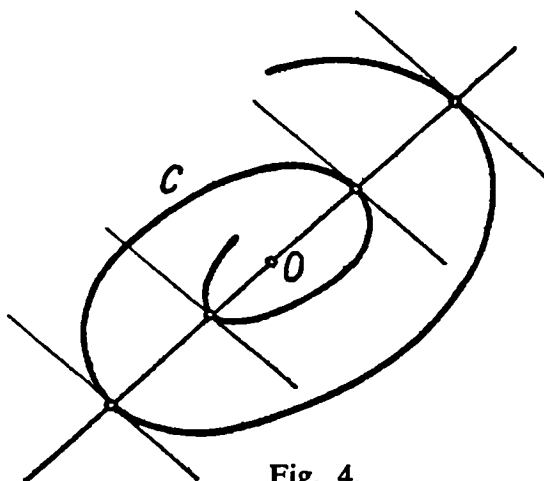


Fig. 4.

Parmi les courbes (F) figurent, par exemple, les ellipses et les spirales logarithmiques. En appliquant la théorie ci-dessus on trouve que les courbes (F) sont définies par les équations (q) dont les dispersions fondamentales φ_1, ψ_1

sont confondues: $\varphi_1(t) = \psi_1(t)$. On retombe ainsi à la théorie des équations (q) à dispersions fondamentales φ_1, ψ_1 confondues dont j'ai parlé plus haut. Cette théorie donne des renseignements sur les propriétés géométriques des courbes (F). Je me borne de remarquer que, figurent parmi les courbes (F) les courbes bien connues de J. Radon qui sont définies par les équations (q) à dispersions fondamentales χ_1, ω_1 confondues. L'équation finie des courbes (F) en coordonnées polaires est la suivante:

$$r = K^\alpha \cdot f(\alpha),$$

$K (> 0)$ étant une constante et f une fonction positive et périodique de période π , deux fois continûment différentiable et vérifiant une certaine inégalité différentielle.

10. — Les courbes de Radon que je viens de mentionner jouissent de la propriété d'être centro-symétriques, c'est-à-dire symétriques par rapport au centre O du plan correspondant. Posons-nous la question de déterminer toutes les équations oscillatoires (q) pour lesquelles les courbes intégrales correspondantes, supposées régulières, sont centro-symétriques.

Considérons une courbe régulière, C , définie par les coordonnées paramétriques $U(T), V(T)$ — intégrales d'une équation oscillatoire (Q) dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ — et supposons qu'elle soit centro-symétrique. Cette propriété s'exprime par ceci que les valeurs de l'amplitude $R(T) = \sqrt{U^2(T) + V^2(T)}$ de la base U, V pour deux valeurs arbitraires $T, \Phi_1(T)$ soient égales l'une à l'autre: $R[\Phi_1(T)] = R(T)$; Φ_1 signifie, naturellement, la dispersion fondamentale de l'équation (Q). Or, en faisant fonctionner l'appareil analytique de la théorie des transformations on trouve que la fonction Φ_1 est linéaire et de la forme $\Phi_1(T) = T + k$ ($k > 0$). Inversement, on démontre que la courbe intégrale d'une équation oscillatoire quelconque (Q), définie dans l'intervalle j et pour laquelle la dispersion fondamentale de première espèce est linéaire et de la forme en question, est centro-symétrique.

Cela étant, transformons le paramètre de la courbe C suivant la formule $T = (k/\pi)t$. Cette transformation conserve la forme jacobienne de l'équation (Q) et on démontre que la nouvelle équation (q) a la dispersion fondamentale $\varphi_1(t) = t + \pi$. Nous voyons que toutes les équations oscillatoires (q) dont les courbes intégrales, supposées régulières, sont centro-symétriques se trouvent déterminées par la formule (4) complétée par l'inégalité $q(t) < 0$ pour $t \in j$. Nous voilà en relation avec la théorie des équations (q) qui ont la même dispersion fondamentale $\varphi_1(t) = t + \pi$ et dont j'ai parlé plus haut.

Or, revenons à la courbe centro-symétrique C . La courbe C résulte, apparemment, fermée et sa longueur centro-affine, s , est donnée, d'après (7), par $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{|q(\sigma)|} d\sigma$. Si l'on applique la formule (5) pour $p = \frac{1}{2}$, on trouve $s < 2\pi$, l'égalité étant atteinte précisément pour l'ellipse $u(t) = \sin t, v(t) = \cos t$. Nous trouvons ainsi le résultat suivant: La longueur centro-affine de toute courbe régulière centro-symétrique, définie par une équation oscillatoire (q) dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, est toujours inférieure ou égale à 2π , l'égalité étant atteinte précisément par l'ellipse ($q(t) = -1$).

11. – Me voilà arrivé à la fin de ma conférence. Qu'il me soit permis de remarquer qu'une monographie écrite en allemand et dont je suis l'auteur, contenant un exposé systématique de la théorie des transformations, se trouve sous presse et va paraître prochainement en cours de ce mois d'octobre. Cette monographie paraîtra sous le titre « Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung » chez le Deutscher Verlag der Wissenschaften à Berlin.

Bibliographie

- [1] F. NEUMAN, *Sur les équations différentielles linéaires oscillatoires du deuxième ordre avec la dispersion fondamentale $\varphi(t) = t + \pi$* . Bul. Inst. Polit. din Iași, X (XIV) (1964), 37-42.
- [2] F. NEUMAN, *Extremal property of the equation $y' = -k^2y$* . Arch. Math. (Brno), 3 (1967), 161-164.