

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Rend. Mat., 26, 1967, 187-246

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500122>

Terms of use:

© Università di Roma "La Sapienza", Italy, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre^(*)

par OTAKAR BORŮVKA (Brno)

PREMIÈRE CONFÉRENCE.

1. Je me permets de commencer ces conférences par indiquer et préciser l'objet de nos considérations. Il s'agit, dans ce qui suit, d'une théorie des transformations des équations différentielles ordinaires linéaires et homogènes du deuxième ordre. Cette théorie étudie, on le sait, des effets provoqués par des procédés liés aux transformations des variables, sur les solutions des équations en question. D'une manière plus précise, il s'agit d'une théorie qualitative dans le domaine réel et de caractère global.

L'origine de la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre remonte à l'illustre géomètre allemand E. E. KUMMER. Dans son Mémoire en latin « *De generali quadam equatione differentiali tertii ordinis* », inséré en 1834 dans un programme de cours à Liegnitz et republié en 1887 dans le Journal de Crelle, KUMMER s'occupe du problème suivant :

Etant données deux équations différentielles du deuxième ordre

$$(a) \quad y'' + p(x) y' + q(x) y = 0,$$

$$(A) \quad Y'' + P(z) Y' + Q(z) Y = 0,$$

(*) Le présent article constitue le texte des quatre conférences que j'ai eues l'honneur de donner sur l'invitation de l'Institut mathématique « Guido Castelnuovo » de l'Université de Rome, dans le Séminaire de l'Analyse mathématique (Professeur G. Fichera). Les conférences en question avaient lieu le 5, 7, 12 et 14 avril 1967.

il s'agit de trouver des fonctions $w(x)$, $z(x)$ de manière que, pour toute solution Y de l'équation (A), par exemple, la fonction composée

$$y(x) = w(x) Y[z(x)]$$

soit une solution de l'équation (a). En d'autres termes, il s'agit de transformer, les unes dans les autres, de la manière indiquée ci-dessus, les solutions des équations (a), (A).

A la base de ce problème de transformation, KUMMER développe une théorie gravitant autour d'une certaine équation différentielle non-linéaire du troisième ordre, et indique d'intéressantes applications de ses résultats.

Écrivons, à titre historique l'équation de KUMMER en question dans sa forme primitive, sans insister, dans ce moment, sur les détails :

$$(Aa) \quad \frac{d^3 z}{dz dx^2} - 3 \left(\frac{d^2 z}{dz dx} \right)^2 - Z \frac{dz^2}{dx^2} + X = 0;$$

Z et X sont des fonctions de la variable z resp. de x liées d'une certaine manière aux coefficients P, Q resp. p, q des équations (A) (a).

La théorie de KUMMER a trouvé des extensions au cours du XIXe siècle dans le domaine des équations linéaires ordinaires d'ordres supérieurs. Les successeurs de KUMMER, surtout E. LAGUERRE, F. BRIOSCHI, G. H. HALPHEN, A. R. FORSYTH, S. LIE et P. APPELL se sont occupé des transformations des équations linéaires ordinaires d'ordres supérieurs en relation avec le problème d'équivalence. Ce problème consiste, rappelons-le, en étude des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations différentielles linéaires d'ordre $n (\geq 2)$ puissent être transformées, dans le sens indiqué ci-dessus, l'une à l'autre. Dans les travaux des auteurs dont nous venons de parler, on trouve par occasion des résultats particuliers sur les transformations des équations linéaires du deuxième ordre. Remarquons, que précisément ces équations occupent dans la théorie des transformations une position privilégiée, car seulement dans ce cas $n = 2$ deux équations différentielles sont toujours mutuellement équivalentes.

Les raisonnements originaux de KUMMER n'ont pas été approfondis de manière à former une théorie satisfaisante du point de vue moderne. Ces raisonnements reposent sur les seuls procédés de différentiation et sur certaines opérations algébriques, tandis que les questions plus profondes d'intégration, surtout les théorèmes

précis concernant l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation du troisième ordre mentionnée plus haut, y sont entièrement négligées. On peut naturellement concevoir, sans difficultés, la présence de lacunes et peut-être inexacitudes dans une théorie de l'époque de KUMMER, époque, dans laquelle même la distinction nette entre des matières réelles et complexes n'était pas encore développée.

2. Dans ces dernières dixsept années j'ai développé une théorie des transformations des équations ordinaires linéaires et homogènes du deuxième ordre dans le domaine réel, théorie, qui est — nous l'avons déjà dit — qualitative et de caractère global, et qui est basée dans une large mesure sur les notions nouvelles. Qu'il me soit permis d'indiquer tout d'abord la structure de la théorie en question, que voici ([15]) :

Introduction			
Théorie des phases			
Problème de transformation			
Théorie des transformations			
Théorie des dispersions		Théorie générale	
Dispersions centrales	Dispersions générales	Transformations générales	Transformations complètes

On voit bien que cette théorie des transformations consiste, au fond, en deux parties. L'une d'entre elles, théorie appelée d'après ses notions de base, à savoir les fonctions nommées dispersions, est la théorie des dispersions. Cette théorie s'applique aux équations linéaires du deuxième ordre aux intégrales *oscillatoires* et son développement procède à partir de ses fondements jusqu'une intégration constructive de l'équation de KUMMER correspondante. L'autre partie de la théorie en question consiste en la théorie générale des transformations. Cette théorie est applicable aux équations différentielles linéaires du deuxième ordre *quelconques* et elle ne se préoccupe, par conséquent, pas du caractère oscillatoire des intégrales des équations considérées. Un segment de cette théorie est consacré à l'étude des transformations appelées *complètes*, notion qui est liée au caractère global de nos considérations et dont nous parlerons en détail plus tard.

Les raisonnements que j'ai employés pour développer la théorie des transformations en question ont montré qu'il était avantageux d'élargir et d'approfondir certaines notions bien connues provenant de la théorie classique des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. Ceci concerne surtout la notion des phases d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, notion, qui s'est montrée, du point de vue méthodique, d'une importance primordiale pour toute la théorie des transformations considérées. C'est alors de cette raison que la théorie des phases constitue une ouverture de la théorie des transformations en question. Pour terminer ces généralités je me permets encore d'ajouter que, dans la théorie des dispersions nous aurons occasion d'appliquer largement des méthodes algébriques et surtout la théorie des groupes dont les théorèmes conduisent à de profonds résultats au sujet des transformations considérées.

3. Dans la théorie que nous allons développer nous prenons à l'ordinaire les équations (a), (A) dans la forme jacobienne

$$(q) \quad y'' = q(t) y, \quad (Q) \quad Y'' = Q(T) Y,$$

ce qui ne restreint pas la généralité et comporte quand même certaines simplifications. Nous supposons que les coefficients q, Q sont des fonctions continues dans des intervalles ouverts $j = (a, b)$, $J = (A, B)$, les cas $a, A = -\infty$, $b, B = \infty$ n'étant pas exclus. Pour simplifier le langage nous appelons les fonctions q, Q , par occasion, *porteurs* des équations (q), (Q) correspondantes.

L'équation de KUMMER déterminée par les équations différentielles en question, prises dans un certain ordre, par exemple (Q), (q), est la suivante ([3]):

$$(Qq) \quad -\{X, t\} + Q(X) X'^2 = q(t),$$

le symbole $\{X, t\}$ désignant la dérivée schwarzienne de la fonction X au point t :

$$\{X, t\} = X'''/(2X') - 3X''^2/(4X'^2).$$

On appelle les équations (QQ) et (qq) la *première* et la *seconde équation associée* à l'équation (Qq) ([14]).

4. Du point de vue de la théorie considérée il paraît utile de distinguer les équations différentielles linéaires (q) d'après le nombre de zéros de leurs intégrales ([5]).

L'équation (q) est dite *du type (m)*, pour un nombre naturel $m (\geq 1)$ quelconque, si elle admet des intégrales s'annulant dans l'intervalle j précisément m fois, mais si elle n'en admet pas qui s'annulent $m + 1$ fois.

Si $m = 1$, l'équation (q) n'admet pas, dans l'intervalle j , de nombres conjugués (¹).

Si $m \geq 2$, elle en admet. Dans ce cas, il y a dans l'intervalle j deux suites privilégiées formée chacune de $m - 1$ nombres mutuellement conjugués, suites, dont l'une, constamment croissante, $a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}$ s'appelle la *suite fondamentale à gauche*, l'autre, constamment décroissante $b_{-1} > b_{-2} > \dots > b_{-m+1}$ s'appelle la *suite fondamentale à droite*. La nombre a_1 est le plus grand nombre dans j pour lequel il n'y a pas de valeurs conjuguées à gauche, le nombre b_{-1} à son tour est le plus petit nombre dans j pour lequel il n'y a pas de valeurs conjuguées à droite. On a toujours les inégalités suivantes :

$$a < b_{-m+1} \leq a_1 < b_{-m+2} \leq a_2 < b_{-m+3} \leq a_3 < \dots \\ \leq a_{m-3} < b_{-2} \leq a_{m-2} < b_{-1} \leq a_{m-1} < b.$$

Dans ces formules ou bien tous les signes = sont valables, de sorte que les deux suites fondamentales de nombres conjugués coïncident, et alors l'équation (q) s'appelle *spéciale*; ou bien aucun signe = n'est valable, de sorte que les deux suites en question sont différentes l'une de l'autre, et alors l'équation (q) s'appelle *générale* ou bien *non-spéciale*.

A coté des équations de type fini, dont nous venons de parler, on distingue trois espèces d'équations *de type infini*, suivant que la seule extrémité gauche ou la seule extrémité droite ou bien les deux extrémités de l'intervalle j sont des points d'accumulation des zéros des intégrales de l'équation correspondante.

(¹) En cours de nos considérations nous aurons l'occasion de revenir à la notion de nombres conjugués. Ici nous appelons conjugués deux nombres $a', b' \in j$ ($a' \neq b'$) s'il existe des intégrales de l'équation (q) qui s'annulent simultanément en a' et b' .

5. Nous allons maintenant indiquer rapidement les notions et quelques propriétés des amplitudes et des phases de l'équation (q) ([5], [12]).

Soit u, v une base de l'équation (q), c'est à dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation (q), et désignons par $w (= uv' - u'v)$ le wronskien correspondant.

On appelle la *première* resp. la *deuxième amplitude* de la base u, v la fonction, r resp. s , définie et constamment positive dans l'intervalle j :

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad s = \sqrt{u'^2 + v'^2}.$$

On appelle *première* resp. *deuxième phase* de la base u, v , toute fonction, α resp. β , qui est continue dans l'intervalle j et vérifie, dans cet intervalle, à l'exception des zéros de la fonction v resp. v' , la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = u/v, \quad \operatorname{tg} \beta = u'/v'.$$

En considérant les deuxièmes phases de la base u, v , on suppose que les zéros de la fonction v' sont isolés. Ceci a lieu si, par exemple, la fonction q est toujours différente de zéro.

On voit qu'il y a précisément un système dénombrable de premières et de même de deuxièmes phases de la base u, v et que les fonctions de chaque système ne diffèrent l'une de l'autre que par des multiples entiers de π .

Soit α resp. β une première resp. deuxième phase de la base u, v .

Ces fonctions jouissent, dans l'intervalle j , des propriétés suivantes :

$$\alpha \in C_3, \quad \alpha' \neq 0 \quad \text{pour } t \in j; \quad \beta \in C_1,$$

et satisfont, en particulier, aux relations

$$\alpha' = -w/r^2, \quad \beta' = (-w)(-q)/s^2.$$

On se rend compte facilement que, les intégrales u, v et leurs dérivées, u', v' , s'expriment dans l'intervalle j , par les formules

$$(1) \quad u = \varepsilon |w/\alpha'|^{1/2} \sin \alpha, \quad v = \varepsilon |w/\alpha'|^{1/2} \cos \alpha,$$

$$u' = \varepsilon' (wq/\beta')^{1/2} \sin \beta, \quad v' = \varepsilon' (wq/\beta')^{1/2} \cos \beta \quad (\beta' \neq 0),$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ étant ± 1 , suivant le choix des phases α, β .

Ces formules expriment, évidemment, les intégrales u, v et leurs dérivées, u', v' , en coordonnées polaires.

La fonction

$$\vartheta(t) = \beta(t) - \alpha(t),$$

définie dans l'intervalle j , s'appelle *fonction polaire* de la base u, v .

On démontre que cette fonction ϑ satisfait à la relation

$$\vartheta(t) = \text{Arc cotg} (1/2 \alpha'(t)).$$

Finalement, ajoutons la remarque importante que, par la première phase α se trouve univoquement déterminé le porteur q de l'équation (q) d'après la formule

$$(2) \quad -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) = q(t).$$

En comparant cette formule avec l'équation de KUMMER (Qq) on voit que la fonction α satisfait à l'équation de KUMMER ($-1, q$).

Nous avons parlé jusqu'ici des amplitudes, phases et fonctions polaires d'une base u, v de l'équation (q). Il convient d'introduire à côté de ces notions, les amplitudes, phases et fonctions polaires de l'équation (q), de manière à ne pas spécialiser les bases correspondantes. On appelle alors, par exemple, première phase de l'équation (q) une première phase d'une base quelconque de l'équation (q). Avec ce langage on peut dire que, toute première phase de l'équation (q) est une solution de l'équation de KUMMER ($-1, q$).

6. Cela étant, nous sommes en mesure d'indiquer un procédé qui paraît d'ouvrir la voie la plus directe et en même temps la plus simple à la théorie des transformations en question. C'est une espèce de route royale au coeur de la théorie considérée ([6], [7]).

Soient $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ des nombres arbitraires.

Désignons par r, R les espaces linéaires formés des intégrales des équations (q), (Q).

Nous choisissons à volonté, dans chacun de ces espaces, une base $u, v \in r$, $U, V \in R$ de manière que l'intégrale u de l'équation (q) resp. U de l'équation (Q) s'annule au point t_0 resp. T_0 :

$$(3) \quad u(t_0) = 0, \quad U(T_0) = 0.$$

Nous désignons par w, W les wronskiens correspondants, $w = uv' - u'v$, $W = UV' - U'V$. Au moyen de ces bases nous définissons

une correspondance linéaire entre les espaces r, R , en associant l'une à l'autre deux intégrales quelconques $y \in r, Y \in R$, formées avec les mêmes coordonnées constantes, γ_1, γ_2 par rapport aux bases en question: $y = \gamma_1 u + \gamma_2 v, Y = \gamma_1 U + \gamma_2 V$. Par la fonction $y \rightarrow Y$ se trouve définie une application p de l'espace r sur l'espace R ; le nombre $\tau = w/W$ s'appelle la *caractéristique* de l'application p . De même, par la fonction $Y \rightarrow y$ se trouve définie une application P de l'espace R sur r à la caractéristique $\mathcal{C} = W/w$. Les applications p, P sont évidemment inverses l'une de l'autre et leurs caractéristiques possèdent la même propriété: $\tau \mathcal{C} = 1$.

Considérons à présent le système dénombrable formé par les (premières) phases de la base u, v resp. U, V . On se rend compte facilement, en vertu des formules (3), qu'il y a précisément une phase α resp. A de la base u, v resp. U, V , telle que

$$\alpha(t_0) = 0, \quad A(T_0) = 0.$$

Au moyen de ces phases α, A nous exprimons les intégrales u, v et U, V en coordonnées polaires par des formules telles que (1) et nous obtenons pour deux intégrales correspondantes quelconques y, Y les formules suivantes

$$(4) \quad y(t) = \varepsilon k_1 |w/\alpha'(t)|^{1/2} \sin[\alpha(t) + k_2],$$

$$Y(T) = E k_1 |W/\dot{A}(T)|^{1/2} \sin[A(T) + k_2] \quad (\varepsilon, E = \pm 1),$$

les k_1, k_2 étant des constantes arbitraires.

Cela étant, envisageons l'équation

$$(5) \quad \alpha(t) = A(T).$$

Cette équation est vérifiée, évidemment, par les valeurs $t_0 \in j, T_0 \in Y$. Puisque chaque phase α, A va constamment en croissant ou en décroissant, il existe précisément une fonction $T = X(t)$, définie dans un voisinage $i \subset j$ de t_0 , qui prend pour $t = t_0$ la valeur T_0 et satisfait identiquement, dans l'intervalle i à l'équation (5); nous avons en vue le plus large intervalle i jouissant de cette propriété. De même, il existe précisément une fonction $t = x(T)$, définie dans un voisinage $I \subset J$ de T_0 , qui prend pour $T = T_0$ la valeur t_0 et vérifie identiquement, dans I , l'équation (5); I désigne le plus large intervalle ayant la dite propriété. L'intervalle I représente, évidemment,

l'ensemble des valeurs de la fonction X dans l'intervalle i , $I = X(i)$, et on a de même, $i = x(I)$. On voit que les fonctions X, x sont inverses l'une de l'autre, et s'expriment par les formules

$$X(t) = A^{-1}[\alpha(t)], \quad x(T) = \alpha^{-1}[A(T)].$$

Finalement, en comparant les dérivées schwarziennes des fonctions figurant dans (5) et tenant compte des formules telles que (2), on trouve que les fonctions X, x satisfont aux équations de KUMMER

$$(Qq) \quad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \quad (qQ) \quad -\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T).$$

Ajoutons, que ces équations (Qq), (qQ) peuvent être remplacées par l'équation unique suivante

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{X'(t)} \right)'' + Q(X)X'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\dot{x}(T)} \right)'' + q(x)\dot{x}(T),$$

les valeurs t, T étant homologues, c'est à dire liées l'une à l'autre par les formules $T = X(t) \in I$, $t = x(T) \in i$.

Cela étant, revenons aux formules (4). Nous voyons que les intégrales y, Y se transforment l'une dans l'autre, moyennant des fonctions x, X d'après les formules

$$y(t) = \varepsilon E(|\tau| \cdot |\dot{A}[X(t)]/\alpha'(t)|)^{1/2} Y[X(t)],$$

$$Y(T) = E \varepsilon (|\mathcal{C}| \cdot |\alpha'[x(T)]/\dot{A}(T)|)^{1/2} y[x(T)].$$

qui, à leur tour, peuvent être mises, en vertu des relations $\dot{A}(X)X' = \alpha'$, $\alpha'(x)\dot{x}(T) = \dot{A}$, sous la forme

$$\varepsilon |\mathcal{C}|^{1/4} y(t) = E |\tau|^{1/4} Y[X(t)] |X'(t)|^{-1/2},$$

$$E |\tau|^{1/4} Y(T) = \varepsilon |\mathcal{C}|^{1/4} y[x(T)] |\dot{x}(T)|^{-1/2}.$$

Pour simplifier ces formules normons les intégrales y, Y en les multipliant par les quantités $\varepsilon \sqrt[4]{|\mathcal{C}|}$, $E \sqrt[4]{|\tau|}$, et conservons pour les intégrales normées les mêmes notations y, Y . Les formules ci-dessus sont alors

$$(6) \quad y(t) = Y[X(t)] |X'(t)|^{-1/2}, \quad Y(T) = y[x(T)] |\dot{x}(T)|^{-1/2},$$

et elles peuvent être remplacées par la relation symétrique suivante

$$(7) \quad |X'(t)|^{1/4} y(t) = |\dot{x}(T)|^{1/4} Y(T);$$

les quantités t, T intervenant dans cette relation sont, naturellement, les valeurs des fonctions x, X définies plus haut, $t = x(T) \in i$, $T = X(t) \in I$.

Pour terminer ces considérations il reste seulement à préciser la position des intervalles i, I dans les intervalles j, J ; i, I sont, rappelons-le, les intervalles de définition des fonctions X, x . Sans entrer dans les détails, nous nous contentons de remarquer que la position des intervalles i, I dans les intervalles j, J dépend des relations existant entre les quantités

$$(8) \quad c_1 = \lim_{t \rightarrow a+} \alpha(t), \quad c_2 = \lim_{t \rightarrow b-} \alpha(t); \quad C_1 = \lim_{T \rightarrow A+} A(T), \quad C_2 = \lim_{T \rightarrow B-} A(T).$$

On démontre que les courbes définies par les fonctions X, x vont toujours de frontière à frontière du rectangle correspondant $j \prec J$ ou bien $J \times j$. S'il s'agit, par exemple, des fonctions X croissantes, se présentent, en ce qui concerne l'allure des courbes X les cas suivants :

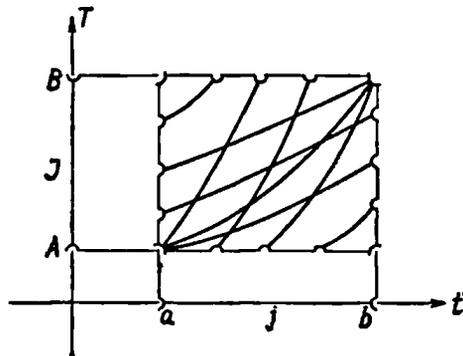


Fig. 1

Nous sommes arrivés au résultat suivant :

Étant donnés des nombres arbitraires $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ il existe des fonctions mutuellement inverses, $T = X(t)$, $t = x(T)$, définies dans certains intervalles (les plus larges) $(t_0 \in) i \subset j$, $(T_0 \in) I \subset J$ et des correspondances linéaires entre les espaces r, R qui jouissent des propriétés suivantes :

On a $X(t_0) = T_0$, $x(T_0) = t_0$ et deux intégrales correspondantes quelconques des équations (q), (Q), convenablement normées,

$y \in r$, $Y \in R$, se transforment l'une dans l'autre, dans les intervalles i, I , suivant la formule (7). Les fonctions X, x sont définies par la relation $\alpha(t) = A(T)$, α, A étant des phases convenables des équations (q), (Q), et satisfont aux équations de KUMMER (Qq), (qQ); leurs intervalles de définition i, I , s'étendent toujours, dans un certain sens du mot, aux extrémités des intervalles, j, J et peuvent se confondre, dans des cas particuliers, avec ces derniers.

7. Nous nous trouvons maintenant au coeur de la théorie des transformations considérées, en face de plusieurs problèmes sérieux qui concernent surtout le rôle des équations de KUMMER (Qq), (qQ) dans la théorie en question. On a, à ce sujet, les résultats suivants ([3]):

Pour chaque solution $X(t)$ de l'équation (Qq), la fonction inverse $x(T)$ représente une solution de l'équation (qQ); inversement, pour chaque solution $x(T)$ de l'équation (qQ), la fonction inverse $X(t)$ constitue une solution de l'équation (Qq).

Pour chaque intégrale $Y(T)$ de l'équation (Q), et chaque solution $X(t)$ de l'équation (Qq), la fonction composée

$$y(t) = Y[X(t)] | X'(t) |^{-1/2}$$

représentent une intégrale de l'équation (q); en même temps on a la formule inverse:

$$Y(T) = y[x(T)] | \dot{x}(T) |^{-1/2},$$

$x(T)$ étant la fonction inverse de $X(t)$. On a naturellement des résultats analogues pour chaque intégrale $y(t)$ de l'équation (q), et chaque solution $x(T)$ de l'équation (qQ).

Le théorème suivant sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (Qq) joue un rôle important:

Soient $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, $X'_0 (\neq 0)$, X''_0 des nombres arbitraires. Il existe précisément une intégrale $X(t)$ de l'équation (Qq), définie dans un intervalle ouvert i , qui satisfait aux conditions initiales de Cauchy

$$X(t_0) = X_0, \quad X'(t_0) = X'_0, \quad X''(t_0) = X''_0,$$

et qui est en même temps la plus large en ce sens que, toute solution de l'équation (Qq), vérifiant les mêmes conditions initiales,

en fait partie. L'intégrale $X(t)$ et sa fonction inverse $x(T)$ s'expriment par les formules

$$X(t) = A^{-1}[\alpha(t)], \quad x(T) = \alpha^{-1}[A(T)]$$

les α , A étant les phases s'annulant en t_0 , X_0 , déterminées par des bases convenables des équations (q), (Q). La courbe déterminée par la fonction X va de frontière à frontière du rectangle $j \times J$.

8. Nous allons indiquer, à titre d'exemple, une application de la formule de transformation (7) dans l'étude des mouvements rectilignes dans les espaces physiques, mouvements, gouvernés par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre ([15]).

Considérons deux espaces physiques I resp. II , c'est-à-dire des espaces dans lesquels on peut effectuer des mesures du temps et des longuers. Imaginons que, dans l'espace I resp. II le temps soit mesuré pendant un intervalle i resp. I sur un chronomètre $[I]$ resp. $[II]$. Nous supposons que les temps indiqués soient dans une correspondance biunivoque déterminée par deux fonctions mutuellement inverses, $T = X(t)$ resp. $t = x(T)$, et définies dans les intervalles i resp. I . Cela veut dire que, dans chaque instant $t \in i$ indiqué sur le chronomètre $[I]$ on lit sur $[II]$ le temps $T = X(t)$ ($\in I$) et de même, dans chaque instant $T \in I$ indiqué par $[II]$ le chronomètre $[I]$ montre le temps $t = x(T)$ ($\in i$). Nous appelons X resp. x fonction-temps pour l'espace II resp. I et nous supposons que ces fonctions X, x soient de la classe C_3 et aient leurs dérivées X', \dot{x} toujours différentes de zéro, par exemple positives. Il est alors légitime de parler de la vitesse $X'(t)$ et de l'accélération $X''(t)$ du temps dans l'espace II à l'instant $t \in i$ et de même de la vitesse $\dot{x}(T)$ et de l'accélération $\ddot{x}(T)$ du temps dans l'espace I à l'instant $T \in I$. Deux instants (homologues) $T = X(t) \in I$ et $t = x(T) \in i$ sont appelés simultanés.

Cela étant, envisageons dans l'espace I resp. II une droite orientée, D_I resp. D_{II} , et choisissons sur chaque droite un point fixe, O_I resp. O_{II} , comme l'origine d'un système de coordonnées.

Considérons alors un point mobile, P_I resp. P_{II} , qui se déplace sur la droite D_I resp. D_{II} , et dont le mouvement est gouverné par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre (q) resp. (Q). Cela veut dire ceci: La coordonnée paramétrique $y(t)$ resp. $Y(T)$ du point P_I resp. P_{II} est une intégrale de l'équation (q) resp.

(Q). Nous supposons que les points P_I, P_{II} passent à certains instants $t_0(\epsilon j), T_0(\epsilon J)$ par les points respectifs O_I, O_{II} ; cela s'exprime, évidemment, par $y(t_0) = Y(T_0) = 0$.

D'après la théorie précédente, il existe des fonctions mutuellement inverses, $X(t), x(T)$, qui sont définies dans certains intervalles $i \subset j, I \subset J$ et qui vérifient la formule

$$c_I |X'(t)|^{1/4} y(t) = c_{II} |\dot{x}(T)|^{1/4} Y(T),$$

c_I et c_{II} étant des constantes convenables que l'on peut supposer positives. Rappelons que les fonctions $X(t), x(T)$ sont des solutions des équations de KUMMER (Qq), (qQ).

Or, choisissons X resp. x pour fonction-temps pour l'espace II resp. I et prenons pour l'unité instantanée de longueur dans l'espace I resp. II la quantité $c_I |X'(t)|^{1/4}$ resp. $c_{II} |\dot{x}(T)|^{1/4}$. Alors la formule ci-dessus exprime que les mouvements considérés des points P_I, P_{II} sont les-mêmes.

On arrive ainsi à la conclusion que, deux mouvements rectilignes dans les espaces physiques, gouvernés par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, sont toujours les-mêmes quand on s'arrange à mesurer convenablement le temps et les longueurs dans les espaces en question.

9. Les raisonnements précédents constituent, en grandes lignes, cette partie de la théorie générale des transformations considérées qui est indiquée, dans le schéma ci-dessus, sous le nom « Transformations générales ». L'autre partie est formée par la théorie des transformations appelées complètes, théorie que je me propose maintenant de passer en revue rapidement ([5], [6], [7], [8], [9], [15]).

C'est précisément le théorème sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (Qq) indiqué plus haut qui fournit le point de départ pour la théorie des transformations complètes. En effet, l'intervalle de définition i , de la plus large solution $X(t)$ de l'équation (Qq) dont il est la question dans le théorème mentionné, ne coïncide en général pas avec l'intervalle j et de même, les valeurs de cette solution ne recouvrent pas l'intervalle J tout entier. Ceci entraîne que, la transformation correspondante des intégrales y, Y des équations (q), (Q) suivant les formules (6), ne concerne toujours pas les intégrales y, Y toutes entières, mais seulement leurs pièces définies dans certains voisinages des valeurs t_0, X_0 .

On appelle *complète* une solution de l'équation (Qq) , $X(t)$, qui est définie dans l'intervalle j et dont les valeurs recouvrent l'intervalle J tout entier. On appelle par le même nom les transformations des équations (q) , (Q) , réalisées suivant les formules telles que (6) par les solutions complètes des équations (Qq) , (qQ) : $X(t)$, $x(T)$. Remarquons que les solutions complètes X de l'équation (Qq) sont caractérisées par la propriété suivante: Les courbes déterminées par ces solutions vont à partir d'un sommet du rectangle $j \times J$ au sommet diagonalement opposé.

Avec cette terminologie on peut dire que, la théorie des transformations complètes consiste en étude des conditions nécessaires et suffisantes imposées aux équations, (q) , (Q) pour qu'il existe de solutions complètes de l'équation (Qq) et en étude de la généralité de ces solutions.

L'idée fondamentale qui fait l'origine de la théorie considérée consiste en ceci, qu'une solution $X(t)$ de l'équation (Qq) , générée moyennant les phases α , A par la formule $\alpha(t) = A[X(t)]$, résulte complète alors et alors seulement si les quantités limites c_1, c_2 ; C_1, C_2 définies par les formules telles que (8), vérifient les égalités $c_1 = C_1, c_2 = C_2$ ou bien $c_1 = C_2, c_2 = C_1$. Pour développer la théorie en question on a par conséquent à étudier l'existence et la généralité de phases α, A vérifiant ces égalités.

Qu'il me soit permis de donner un court aperçu des résultats de la théorie des transformations complètes. Pour ne pas compliquer la situation par des considérations de plusieurs cas pouvant se présenter, je me borne au cas où les équations (q) , (Q) sont de types finis ≥ 2 .

Voici d'abord les résultats fondamentaux concernant l'existence et la généralité des transformations complètes en question:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (q) , (Q) de types finis, admettant des points conjugués, soient complètement transformables l'une dans l'autre consistent en ceci que les équations en question soient du même type et toutes les deux non-spéciales ou toutes les deux spéciales.

Si ces conditions sont vérifiées, il existe toujours des solutions complètes constamment croissantes et en même temps d'autres constamment décroissantes, $X(t)$, de l'équation (Qq) , qui réalisent la transformation et qui prennent, pour un nombre $t_0 \in j$ choisi arbitrairement, une valeur $T_0 \in J$ donnée d'avance; cette valeur T_0 peut

être prise dans l'intervalle J , dans une certaine mesure, arbitrairement.

On obtient toutes les solutions complètes constamment croissantes et de même toutes celles qui sont constamment décroissantes, $X(t)$, en choisissant à volonté une phase de l'équation (Q), $A(T)$, s'annulant en T_0 , et en prenant les différentes phases $\alpha(t)$ de l'équation (q), s'annulant en t_0 et vérifiant les conditions d'égalité entre les quantités c_1, c_2 et C_1, C_2 mentionnées plus haut. Les solutions en question sont alors données par la formule $X(t) = A^{-1}[\alpha(t)]$.

Dans le cas des équations (q), (Q) non-spéciales il existe, en somme, une famille de ∞^1 solutions complètes de l'équation (Qq) constamment croissantes et autant de solutions complètes constamment décroissantes. Si, par contre, les équations (q), (Q) sont spéciales, il existe, en somme, une famille de ∞^2 solutions complètes de l'équation (Qq) constamment croissantes et, de même, une famille de la même puissance de solutions constamment décroissantes.

On peut même aller plus loin et analyser la structure de l'ensemble formé par toutes les solutions complètes de l'équation (Qq). A ce sujet je me contente ici de constater que toutes les courbes déterminées par des solutions complètes $X(t)$ de l'équation (Qq) passent par certains points fixes dont les coordonnées figurent entre les membres des suites fondamentales de points conjugués des équations (q), (Q). Ainsi par exemple, dans le cas des équations (q), (Q) non-spéciales toutes les courbes X croissantes passent par les $2(m-1)$ points fixes $(a_\nu, A_\nu), (b_{-\nu}, B_{-\nu})$ tandis que les courbes X décroissantes passent par les points $(a_\nu, B_{-\nu}), (b_{-\nu}, A_\nu)$; $\nu = 1, \dots, m-1$. Les $a_\nu, b_{-\nu}$ et $A_\nu, B_{-\nu}$ désignent, naturellement, les membres des suites fondamentales correspondantes de points conjugués.

10. Je voudrais terminer la présente conférence par donner une application de la théorie précédente, application, qui consiste en détermination des formes canoniques des équations (q) d'un type fini (m), $m \geq 2$, quelconque ([7]).

Soit alors $m \geq 2$ un nombre naturel quelconque.

On voit aisément que, l'équation

$$(Q) \quad Y'' = -Y,$$

prise dans l'intervalle $J = (0, \overline{m-1/2} \pi)$ ou bien $J' = (0, m\pi)$ est précisément du type (m), non spéciale dans le premier cas et spécial dans l'autre.

Or, soit (q) une équation non-spéciale du type (m). D'après la théorie ci-dessus, les équations (q), (Q) peuvent être transformées complètement l'une dans l'autre. Il existe, par conséquent, une fonction $X(t)$ constamment croissante, qui réalise une application de l'intervalle j sur l'intervalle J et satisfait, par conséquent, aux conditions

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow a+} X(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b-} X(t) = \overline{m - 1/2 \pi},$$

en représentant, en même temps, une solution de l'équation (Qq):

$$(10) \quad q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t).$$

Inversement, on démontre: Si l'on prend dans l'intervalle j une fonction arbitraire $X(t)$ telle que 1^0 sont valables les formules (9), $2^0 X'(t) > 0$, $3^0 X(t) \in C_3$, et qu'on forme la fonction $q(t)$ d'après la formule (10) et à l'aide de la fonction $X(t)$, alors l'équation (q) correspondante est précisément du type (m).

On arrive ainsi au théorème suivant:

Pour que l'équation (q) soit du type (m), $m \geq 2$, et non-spéciale, il faut et il suffit que la fonction q puisse être mise sous la forme (10) $X \in C_3$ étant une fonction qui vérifie les relations (9) et $X'(t) > 0$.

Un résultat analogue a lieu s'il s'agit de l'équation (q) spéciale: *Dans ce cas la fonction $X \in C_3$ est assujettie à vérifier les relations:*

$$\lim_{t \rightarrow a+} X(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b-} X(t) = m\pi, \quad X'(t) > 0.$$

DEUXIÈME CONFÉRENCE.

1. Nous nous sommes occupés dans la première conférence, de la théorie générale des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, théorie qui s'applique aux équations en question quelconques et qui, par conséquent, ne se préoccupe pas du caractère oscillatoire des intégrales de ces équations. La conférence d'aujourd'hui sera consacrée à la théorie des dispersions et, plus précisément, aux dispersions centrales. Rappelons que la théorie des dispersions concerne seulement les équations différentielles linéaires du deuxième ordre dont les intégrales ont caractère oscillatoire.

2. Nous allons commencer nos considérations par envisager un problème de la géométrie différentielle centro-affine des courbes planes ([12]).

Étant donné un faisceau des droites, F , appelons courbe (F) toute courbe plane qui est liée au faisceau F de la manière suivante :

Chaque droite du faisceau F coupe la courbe en au moins deux points et de telle façon que, les tangentes de la courbe, dans les différents points d'intersection, sont mutuellement parallèles.

Pour la commodité de langage, une courbe (F) est dite attachée au faisceau F . Sous pôle d'une courbe (F) nous entendons le centre du faisceau F .

En vue des méthodes appliquées dans la suite, nous ne considérons que les courbes (F) régulières, c'est-à-dire localement convexes et sans points d'inflexion. Nous supposons de plus que, toute courbe (F) peut être déterminée par des coordonnées paramétriques U, V , les fonctions U, V appartenant à la classe C_2 dans un intervalle ouvert, J .

Figurent parmi les courbes (F) : les ellipses, dont chacune est attachée au faisceau des droites passant par son centre ; les spirales logarithmiques qui possèdent la même propriété par rapport aux pôles correspondants.

Soit C une courbe (F) définie par les coordonnées paramétriques U, V dans l'intervalle J .

D'abord, il est évident, en vertu de la définition même des courbes (F), que les fonctions U, V sont linéairement indépendantes. Cela entraîne qu'il existe une équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$(A) \quad Y'' + AY' + BY = 0,$$

à coefficients A, B continus et pour laquelle les fonctions U, V forment un système d'intégrales.

De plus, on voit que les propriétés de définition des courbes (F), indiquées ci-dessus, sont invariantes du point de vue de la géométrie centro-affine, c'est-à-dire par rapport aux transformations centro-affines et aux changements du paramètre de la courbe. Il en résulte, en particulier, que l'équation différentielle (A) est une équation de définition de la courbe C , les courbes intégrales de cette équation déterminant la courbe C à des déplacements centro-

affins près. Quant aux changements du paramètre, on en peut choisir pour réduire l'équation (A) à la forme jacobienne

$$(q) \quad y'' = q(t)y,$$

le coefficient q étant continu dans un intervalle ouvert $j = (a, b)$ (borné ou non).

On voit, en définitive, que la courbe C , rapportée à un paramètre convenable, t , peut être définie, à des déplacements centro-affins près, par une équation jacobienne (q). Nous appelons, naturellement, l'équation (q) *l'équation de définition* de la courbe C .

Convenons d'appeler fonction (F) toute fonction réelle, q , définie et continue dans un intervalle ouvert, $j = (a, b)$, et qui jouit de la propriété que l'équation différentielle correspondante (q) est une équation de définition d'une courbe (F).

Cela étant, on peut énoncer le problème mentionné ci-dessus de la façon suivante :

Caractériser les fonctions (F) par des notions empruntées de la théorie des équations différentielles linéaires (ordinaires) du deuxième ordre. Déterminer toutes les fonctions (F) par des expressions explicites et indiquer les équations finies des courbes (F).

Remarquons que ce problème est de l'intérêt pour les géomètres à cause de son caractère global. Une autre remarque à ce sujet consiste en ceci que, parmi les courbes (F) subsiste une classe de courbes bien connues appelées courbes de RADON. Celles-ci sont caractérisées par la propriété supplémentaire suivante : Si des deux droites d_1, d_2 quelconques du faisceau F la droite d_2 est parallèle aux tangentes de la courbe C aux points d'intersection avec la droite d_1 , alors les tangentes prises aux points d'intersection de la courbe C avec la droite d_2 sont parallèles à d_1 .

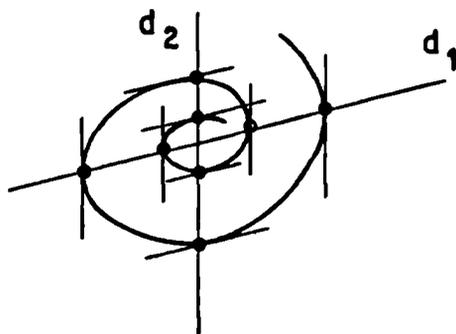


Fig. 2

Cela étant, posons nous la question suivante :

Quelles sont les notions figurant dans la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre qui permettent d'exprimer les données géométriques dans la définition des courbes (F)?

Tout d'abord, une courbe (F) étant une courbe régulière, le coefficient q de l'équation de définition correspondante, (q), est toujours différent de zéro : $q(t) \neq 0$ pour $t \in j$.

Or, en analysant plus profondément le problème en question on trouve que les notions répondant à notre question sont celles de nombres (points) conjugués de différentes espèces.

Voici la définition des nombres conjugués pour une équation (q):

Etant donnés deux nombres différents l'un de l'autre, $t_1, t_2 \in j$, on dit que

1^o les nombres t_1, t_2 sont mutuellement conjugués de première espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) s'annulant en t_1 et t_2 ;

2^o les nombres t_1, t_2 sont mutuellement conjugués de deuxième espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) dont la dérivée, y' , s'annule en t_1 et t_2 ;

3^o le nombre t_2 est conjugué avec t_1 de troisième espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) qui s'annule en t_1 et dont la dérivée, y' , s'annule en t_2 ;

4^o le nombre t_2 est conjugué avec t_1 de quatrième espèce, s'il y a une intégrale y de l'équation (q) qui s'annule en t_2 et dont la dérivée s'annule en t_1 .

Ces quatre espèces de nombres conjugués sont représentées sur la figure suivante :

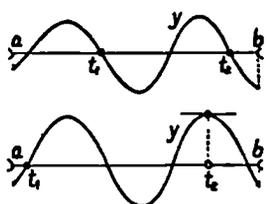


Fig. 3 a)

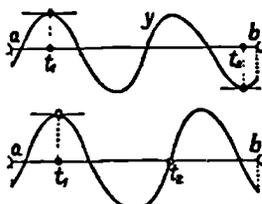


Fig. 3 b)

L'importance de la notion de nombres conjugués pour le problème qui nous occupe se manifeste par le raisonnement suivant.

Soit C une courbe intégrale de l'équation (q), courbe régulière et donnée par les coordonnées paramétriques $u(t), v(t)$, rapportées à un système de coordonnées ayant pour origine le point O . Nous

désignons par $P(t)$, $t \in j$, le point de la courbe C déterminé par la valeur t du paramètre et de même par $\tau(t)$ la tangente de la courbe C au point $P(t)$.

On démontre alors la proposition suivante :

Deux points $P(t_1)$, $P(t_2)$ de la courbe C , déterminés par de différentes valeurs t_1, t_2 du paramètre, sont situés sur la même droite passant par le point O alors et alors seulement, si les valeurs t_1, t_2 sont mutuellement conjuguées de 1-ère espèce.

Deux tangents $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ de la courbe C , déterminées par de différents valeurs t_1, t_2 du paramètre, sont parallèles l'une à l'autre alors et alors seulement, si les valeurs t_1, t_2 sont mutuellement conjuguées de 2-ième espèce.

La tangente $\tau(t_2)$ de la courbe C résulte parallèle à la droite $OP(t_1)$ alors et alors seulement, si la valeur t_2 est conjuguée avec t_1 de 3-ième espèce, ou bien, c'est ce qui revient au même, si la valeur t_1 est conjuguée avec t_2 de 4-ième espèce.

On en tire la conclusion :

Pour que les tangents $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ de la courbe C , $t_1 \neq t_2$, en deux points d'intersection $P(t_1)$, $P(t_2)$ de la courbe C avec une droite passant par O , résultent parallèles l'une à l'autre, propriété qui caractérise précisément les courbes (F) , il faut et il suffit que les valeurs t_1, t_2 soient mutuellement conjuguées de 1-ère et de 2-ième espèce en même temps.

Pour que la courbe C soit une courbe de RADON il faut et il suffit que, pour deux valeurs $t_1, t_2 \in j$ dont l'une, par exemple t_2 , est conjuguée avec l'autre, t_1 , de 3-ième resp. de 4-ième espèce, cette valeur t_1 soit elle aussi conjuguée avec t_2 de 3-ième resp. de 4-ième espèce.

Avec ces résultats, cette partie de notre problème qui concerne la caractérisation des fonctions (F) par de convenables notions de la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre est, au fond, résolu. Le reste consiste en raisonnements plus particuliers et nous y reviendrons plus tard.

3. C'est précisément la notion de points conjugués de différents espèces qui fournit le point de départ d'une théorie assez étendue et qui fait une partie importante de la théorie des transformations dont nous nous occupons. Il s'agit de la théorie des *dispersions centrales*.

Je vais maintenant donner un bref aperçu de cette théorie des dispersions centrales ([2]).

Dans ce but je considère une équation (q) dont je suppose qu'elle soit *oscillatoire*, c'est-à-dire que ses intégrales s'annulent infiniment de fois dans les deux directions vers les extrémités de l'intervalle j . Je suppose de plus, ce qui n'est pas, en général, essentiel, que l'intervalle j coïncide avec l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. L'équation $y'' = -y$ considérée dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ en fournit un exemple. Pour quelques circonstances qui se présenteront au cours de nos considérations, il est utile de supposer davantage, c'est-à-dire que la fonction q soit toujours négative.

Soit $t \in j$ un nombre arbitraire et soit u ou v une intégrale de l'équation (q) qui s'annule ou dont la dérivée s'annule en t . Soit $n = 1, 2, \dots$, et désignons par

$\varphi_n(t)$ ou $\varphi_{-n}(t)$ le n -ième zéro de l'intégrale u qui suit ou qui précède le zéro t ;

$\psi_n(t)$ ou $\psi_{-n}(t)$ le n -ième zéro de la fonction v' qui suit ou qui précède le zéro t ;

$\chi_n(t)$ ou $\chi_{-n}(t)$ le n -ième zéro de la fonction u' qui suit ou qui précède le nombre t ;

$\omega_n(t)$ ou $\omega_{-n}(t)$ le n -ième zéro de l'intégrale v qui suit ou qui précède le nombre t .

Soit $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$, Nous appelons la fonction $\varphi_\nu, \psi_\nu, \chi_\nu, \omega_\nu$ la dispersion centrale de première, seconde, troisième, quatrième espèce d'indice ν , et en particulier, la fonction $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \omega_1$ la dispersion centrale *fondamentale* de l'espèce correspondante. Ces définitions ne dépendent manifestement pas du choix particulier des intégrales u et v . La dénomination « dispersion » est justifiée par ceci, que les fonctions correspondantes décrivent, en quelque sorte, la dispersion des zéros des intégrales de l'équation (q) et de leurs dérivées; l'attribut « centrale » sera justifié, au moins dans le cas des dispersions de première espèce, par nos considérations ultérieures.

On voit bien les relations existant entre les nombres conjugués de différentes espèces considérés ci-dessus et les dispersions centrales en question :

Pour tout nombre $t \in j$,

la valeur $\varphi_\nu(t)$ est le $|\nu|$ -ième nombre conjugué de première espèce avec t , supérieur ou inférieur à t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$;

la valeur $\psi_\nu(t)$ est le $|\nu|$ -ième nombre conjugué de deuxième espèce avec t , supérieur ou inférieur à t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$;

la valeur $\chi_\nu(t)$ est le $|\nu|$ -ième nombre conjugué de troisième espèce avec t , supérieur ou inférieur à t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$;

la valeur $\omega_\nu(t)$ est le $|\nu|$ -ième nombre conjugué de quatrième espèce avec t , supérieur ou inférieur à t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$.

La situation est indiquée dans la figure suivante :

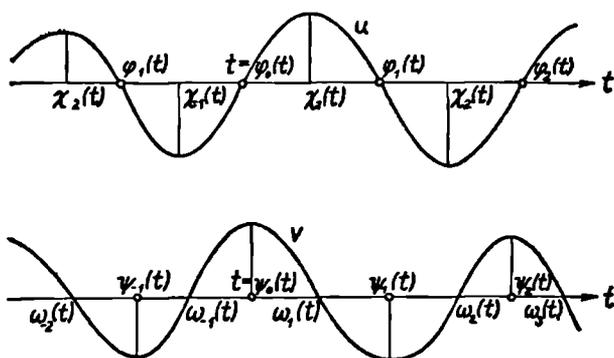


Fig. 4

Avec la notion des dispersions centrales le problème de caractérisation des fonctions (F), ou bien, si l'on veut, de détermination des courbes (F), par des notions empruntées de la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre s'exprime d'une manière élégante et très simple. Bornons-nous, pour ne pas compliquer l'énoncé correspondant, au cas des équations oscillatoires dans un intervalle j quelconque. On démontre la proposition suivante :

Toutes les courbes (F), définies par les équations (q) oscillatoires et à coefficients q négatifs, sont caractérisées par l'égalité des dispersions centrales fondamentales de première et deuxième espèce : $\varphi_1(t) = \psi_1(t)$ pour $t \in j$. S'il s'agit des courbes de RADON, elles sont caractérisées par l'égalité des dispersions centrales fondamentales de troisième et quatrième espèce : $\chi_1(t) = \omega_1(t)$ pour $t \in j$.

4. Les dispersions centrales que nous avons définies sont accessibles à une analyse détaillée et jouissent de remarquables propriétés analytiques. Nous nous contenterons d'en indiquer quelques-unes :

Les dispersions centrales de première espèce, auxquelles on ajoute la fonction $\varphi_0(t) = t$, forment un groupe cyclique infini qui est engendré par la dispersion centrale fondamentale φ_1 et dont l'élément-unité est l'identité $\varphi_0(t) = t$. L'opération algébrique correspondante, c'est-à-dire la multiplication, est définie, naturellement, moyennant de composition de fonctions. Les dispersions centrales de première espèce d'indices pairs forment un sous-groupe dans le groupe cyclique en question. On a des résultats analogues en ce qui concerne les dispersions centrales de deuxième espèce.

Toutes les dispersions centrales possèdent partout des dérivées continues du premier ordre qui s'expriment par des formules simples et élégantes. On a, par exemple, pour toute dispersion centrale de première espèce, φ , et pour toute dispersion centrale de troisième espèce, χ , les formules suivantes, dans lesquelles u désigne n'importe quelle intégrale de l'équation (q) :

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{u^2[\varphi(t)]}{u^2(t)} \text{ pour } u(t) \neq 0, \quad \varphi'(t) = \frac{u'^2(t)}{u'^2[\varphi(t)]} \text{ pour } u(t) = 0; \\ \chi'(t) &= - \frac{1}{q[\chi(t)]} \frac{u'^2[\chi(t)]}{u^2(t)} \text{ resp. } \chi'(t) = - \frac{1}{q[\chi(t)]} \frac{u'^2(t)}{u^2[\chi(t)]} \\ &\text{ pour } u(t) \neq 0 \text{ resp. pour } u(t) = 0. \end{aligned}$$

Ces formules entraînent que chaque dispersion centrale de première espèce appartient à la classe C_3 . Plus généralement, si la fonction q appartient à la classe C_k ($k = 0, 1, \dots$), toutes les dispersions centrales de première espèce appartiennent à la classe C_{k+3} et les dispersions centrales d'espèces plus élevées à la classe C_{k+1} .

Les valeurs des dérivées des dispersions centrales peuvent s'exprimer à l'aide de valeurs de la fonction q . On a par exemple, pour les dispersions centrales *fondamentales* de première et de troisième espèce, φ et χ , les formules

$$\varphi'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)}, \quad \chi'(t) = \frac{q(t_1)}{q[\chi(t)]},$$

les quantités t_1, t_3 vérifiant les inégalités

$$t < t_1 < \chi(t) < t_3 < \varphi(t).$$

Nous allons maintenant établir les relations existant entre les dispersions centrales et la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, (q).

Dans ce but revenons aux formules (1) qui expriment les dérivées du premier ordre des dispersions centrales, et envisageons, par exemple, la première de ces formules. Nous écrivons cette dernière en termes de la dispersion centrale d'indice $\nu (= 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $\varphi_\nu(t)$:

$$\varphi'_\nu(t) = \frac{u^2[\varphi_\nu(t)]}{u^2(t)} \quad (u(t) \neq 0).$$

On en tire la formule

$$(2) \quad (-1)^\nu u(t) = u[\varphi_\nu(t)] [\varphi'_\nu(t)]^{-1/2},$$

valable pour toute valeur $t \in (-\infty, \infty)$. Nous voyons que chaque intégrale u de l'équation (q) se transforme, complètement, à l'aide de toute dispersion centrale de première espèce $\varphi_\nu(t)$, en elle-même, au sens de la formule (2). On trouve ainsi une solution particulière du problème de transformation de KUMMER dans le cas spécial où il s'agit de transformations de l'équation (q) en elle-même, solution donnée par les fonctions

$$w(t) = (-1)^\nu : \sqrt{\varphi'_\nu(t)}, \quad X(t) = \varphi_\nu(t).$$

La solution en question est particulière dans ce sens qu'elle transforme toute intégrale $u(t)$ de l'équation (q) dans *la même* intégrale $u(t)$.

Il en résulte, que toute dispersion centrale de première espèce, $\varphi_\nu(t)$, satisfait à l'équation de KUMMER

$$(qq) \quad -\{X, t\} + q(X) X'^2 = q(t).$$

qui, à son tour, peut être mise sous la forme symétrique suivante :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{X'(t)} \right)'' + q(X) X'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x(T)} \right)'' + q(x) \dot{x}(T).$$

Dans cette formule t, T désignent des valeurs homologues, c'est-à-dire, liées l'une à l'autre ainsi : $T = X(t)$, $t = x(T)$, les fonctions X, x étant mutuellement inverses.

Remarquons que, conformément au théorème général sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation générale de KUMMER (Qq), dont nous avons parlé dans la première conférence, il existe précisément une solution X de l'équation (qq), définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, qui est déterminée par les valeurs initiales données arbitrairement : t_0 . $X_0 = X(t_0)$, $X'_0 = X'(t_0) (\neq 0)$, $X''_0 = X''(t_0)$. Toute solution X transforme chaque intégrale $u(t)$ de l'équation (q) dans une intégrale $v(t)$ de la même équation suivant la formule $v(t) = u[X(t)] : |X'(t)|^2$, et on obtient de cette façon toutes les transformations en question. On démontre que toutes les solutions X de l'équation (qq), définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, forment un groupe continu \mathcal{G} dépendant de trois paramètres. L'opération algébrique (multiplication) dans ce groupe \mathcal{G} est définie, naturellement, à l'aide de composition de fonctions.

Nous venons de parler seulement des dispersions centrales de première espèce. On a des résultats analogues au sujet des dispersions centrales des autres espèces. En grandes lignes on peut dire ceci ([15]) :

Les dispersions centrales de deuxième espèce transforment la dérivée $u'(t)$ de chaque intégrale $u(t)$ de l'équation (q) dans la même dérivée $u'(t)$. Les dispersions centrales de troisième espèce transforment la dérivée $u'(t)$ de chaque intégrale $u(t)$ de l'équation (q) dans cette intégrale $u(t)$, tandis que les dispersions centrales de quatrième espèce transforment $u(t)$ dans sa dérivée $u'(t)$. Remarquons que les dispersions centrales de chaque espèce satisfont à une certaine équation de KUMMER et que, dans le cas des dispersions centrales de deuxième espèce apparaît encore un groupe continu à trois paramètres formé par les solutions de l'équation de KUMMER correspondante. Je n'insisterai pas sur ce sujet afin de pouvoir dire encore quelques mots sur la structure algébrique du groupe \mathcal{G} , c'est-à-dire, répétons-le, du groupe continu à trois paramètres, qui est formé par les solutions X de l'équation (qq), définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ ([2]).

On démontre que toutes les solutions X de l'équation (qq) constamment croissantes forment un sous-groupe invariant \mathcal{K} dans le groupe \mathcal{G} , sous-groupe d'indice 2, tandis que toutes les solutions constamment décroissantes forment l'autre classe du groupe-quotient \mathcal{G}/\mathcal{K} .

Désignons par \mathcal{C} le groupe formé par toutes les dispersions centrales de première espèce et par \mathcal{D} son sous-groupe formé de

toutes les dispersions centrales de première espèce d'indices pairs
On a alors les relations

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{C} \supset \mathcal{S}.$$

Soient $X \in \mathcal{G}$ un élément quelconque et u, v deux intégrales arbitraires linéairement indépendantes de l'équation (q). On a alors les formules

$$u(X) |X'|^{-1/2} = c_{11} u + c_{12} v, \quad v(X) |X'|^{-1/2} = c_{21} u + c_{22} v,$$

où les coefficients $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ sont bien déterminés. Le déterminant de la matrice C de ces coefficients est égale à $\text{sgn } X'$. En faisant correspondre à tout élément $X \in \mathcal{G}$ la matrice respective C , on obtient une représentation homomorphe d du groupe \mathcal{G} sur le groupe \mathcal{L} formé des matrices carrées unimodulaires du deuxième ordre. En se servant de cette représentation d on démontre que le groupe \mathcal{S} est un sousgroupe invariant dans \mathcal{G} et le groupe-quotient \mathcal{G}/\mathcal{S} est isomorphe au groupe \mathcal{L} . On démontre même que le groupe \mathcal{C} est le centre du groupe \mathcal{K} ; ceci justifie la dénomination des dispersions *centrales*.

5. Après cette excursion dans le domaine de l'algèbre qui donne, évidemment, de grandes espérances pour application des méthodes algébriques, nous allons revenir à la partie analytique de la théorie des transformations qui nous occupe.

Les notions fondamentales de cette théorie dont nous avons parlées jusqu'ici, à savoir les phases, fonctions polaires, dispersions centrales et leurs dérivées, se montrent d'être liées les unes aux autres par de nombreuses relations qui donnent naissance à un puissant appareil analytique permettant d'envisager de différents problèmes au sujet des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, problèmes qui peut-être étaient souvent inattaquables jusque-là. L'importance des dispersions centrales pour la théorie en question consiste, au fond, en ceci, que ces fonctions relient d'une certaine manière les valeurs des intégrales des équations considérées et celles de leurs dérivées en points mutuellement conjugués et par suite éloignés, en ouvrant ainsi la voie de traiter des problèmes de caractère global.

Nous allons maintenant donner un bref aperçu de quelques problèmes résolus par application des méthodes en question ([11]).

1. Prolongement des solutions des équations (q). Considérons une équation (q) qui est oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. Soit y une intégrale quelconque de l'équation (q) et $x \in j$ un nombre arbitraire, différent de chaque zéro de y .

On sait que la fonction

$$\bar{y}_0(t) = y(t) \cdot \int_x^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$$

représente, pour des valeurs t assez proches du nombre x , une solution de l'équation (q). Cela s'applique au voisinage du nombre x qui s'étend à gauche jusqu'au premier zéro de l'intégrale y et une situation analogue subsiste à droite de x . Il s'agit alors de prolonger la fonction \bar{y}_0 dans tout l'intervalle j et à l'aide des valeurs de l'intégrale y de manière que la nouvelle fonction, \bar{y} , satisfasse dans cet intervalle j , à l'équation (q).

Désignons par $\dots < c_{-2} < c_{-1} < c_0 < c_1 < c_2 < \dots$ les différents zéros de l'intégrale y , les notations étant choisies de façon que l'on ait $c_0 < x < c_1$. Soit pour $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x_\nu = \varphi_\nu(x)$, $j_\nu = (c_\nu, c_{\nu+1})$, de sorte qu'on a $x_\nu \in j_\nu$ ($x_0 = x$).

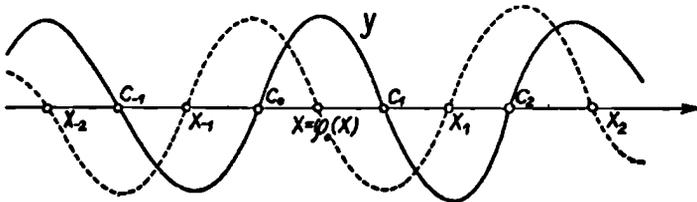


Fig. 5

On démontre alors le

THÉORÈME *La fonction, \bar{y} , définie dans l'intervalle j par la formule*

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t) \cdot \int_{x_\nu}^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} & \text{lorsque } t \in j_\nu \\ -\frac{1}{y'(c_\nu)} & \text{lorsque } t = c_\nu, \end{cases}$$

représente dans l'intervalle j une intégrale de l'équation (q), intégrale qui est, évidemment, le prolongement de la solution $\bar{y}_0(t)$.

Pour faire la démonstration de ce théorème, on constate d'abord la continuité de la fonction \bar{y} dans tout l'intervalle j . Puis, on envisage l'intégrale de l'équation (q), Y , déterminée par les valeurs initiales égales à celles de la solution \bar{y}_0 : $Y(x_0) = \bar{y}_0(x_0) = 0$; $Y'(x_0) = \bar{y}'_0(x_0) = 1$: $y(x_0)$. En se servant de la formule (2) on démontre que les valeurs des fonctions Y resp. Y' et celles de \bar{y} resp. \bar{y}' dans chaque point x_v sont les mêmes. Il en résulte l'égalité des fonctions Y, \bar{y} dans chaque intervalle j_v et, en vertu de leur continuité, dans l'intervalle j tout entier.

2. L'égalité des dispersions fondamentales φ, ψ et χ, ω . Nous revenons à notre problème original au sujet des courbes (F). Nous nous bornons aux équations (q) oscillatoires et à coefficients q négatifs, définies dans un intervalle j quelconque.

Nous avons dit que les équations de définition (q) des courbes (F) sont caractérisées par l'égalité des dispersions centrales fondamentales de première et de deuxième espèce, $\varphi_1(t) = \psi_1(t)$ pour $t \in j$, et, dans le cas des courbes de RADON, par l'égalité des dispersions centrales fondamentales de troisième et quatrième espèce: $\chi_1(t) = \omega_1(t)$ pour $t \in j$. Dans la suite nous écrivons, pour simplifier, $\varphi, \psi, \chi, \omega$ au lieu de $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \omega_1$.

Or, partons de la formule suivante, valable pour toute équation (q) oscillatoire à coefficient q négatif ([12]):

$$(3) \quad \varphi(t) = t + \frac{1}{\alpha'_0} \int_a^{\alpha + \varepsilon\pi} \left(\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \cotg H(\varrho) d\varrho \right) d\sigma.$$

Dans cette formule $H(\alpha)$ est une fonction polaire de l'équation (q), fonction rapportée à la première phase correspondante α : $H(\alpha) = \vartheta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, et définie, en vertu du caractère oscillatoire de l'équation (q), dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$; $\alpha_0, \alpha'_0 (\neq 0)$ sont des nombres arbitraires, $\varepsilon = \text{sgn } \alpha'_0$.

On déduit de la formule (3) par différentiation

$$\varphi'(t) = \exp 2 \int_a^{\alpha + \varepsilon\pi} \cotg H(\varrho) d\varrho,$$

et puis

$$(4) \quad \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = 2\alpha'_0 [\cotg H(\alpha + \varepsilon\pi) - \cotg H(\alpha)] \cdot \exp \left(-2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cotg H(\varrho) d\varrho \right).$$

D'autre part on démontre que la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité des dispersions centrales fondamentales φ et ψ de l'équation (q) consiste en ceci que la fonction polaire H soit périodique de période π .

On en conclût, en tenant compte de la formule (4) que: l'équation (q) admet les dispersions centrales fondamentales φ et ψ égales l'une à l'autre alors et alors seulement, si la fonction φ'' s'annule identiquement. On a par conséquent le résultat suivant ([17], [12]):

Les équations de définition des courbes (F), (q), sont caractérisées par linéarité de leurs dispersions centrales fondamentales φ : $\varphi(t) = ct + k$ ($c, k = \text{Const.}, c > 0$).

Le temps prévu pour ma conférence ne me permet plus d'insister sur d'autre résultats particuliers concernant les courbes (F). C'est pourquoi je me borne seulement à indiquer une expression explicite pour les coefficients q des équations de définition (q) correspondantes et ensuite l'équation finie des courbes (F).

On trouve cette expression explicite pour les fonctions (F):

$$-q(t) = \frac{1 + H'(\alpha)}{\sin^2 H(\alpha)} \exp\left(-4 \int_0^\alpha \cotg H(\varrho) d\varrho\right),$$

expression valable pour d'arbitraires valeurs homologues $t \in j$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$,

$$t = t_0 + \int_0^\alpha \left(\exp 2 \int_0^\sigma \cotg H(\varrho) d\varrho\right) d\sigma;$$

H désigne une fonction définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et satisfaisant aux conditions suivantes: 1^o $H \in C_1$, 2^o $0 < H < \pi$, 3^o $H(\alpha + \pi) = H(\alpha)$, 4^o $H' > -1$.

Remarquons, que le coefficient c dans la formule $\varphi(t) = ct + k$ s'exprime alors par la formule

$$c = \exp 2 \int_0^\pi \cotg H(\varrho) d\varrho.$$

Quant à l'équation finie des courbes (F), elle est donnée en coordonnées polaires par la formule suivante:

$$r = C^\alpha \cdot F(\alpha),$$

$C > 0$ étant une constante et F une fonction définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et jouissant des propriétés suivantes :

$$1^0 F > 0, \quad 2^0 F \in C_2, \quad 3^0 F(\alpha + \pi) = F(\alpha),$$

$$4^0 \frac{F''}{F} < \frac{F'^2}{F^2} + \left(\frac{F'}{F} + \log C \right)^2 + 1.$$

Remarquons qu'on peut faire de même une analyse détaillée au sujet des courbes de RADON ([16], [15]). Dans ce cas on a toujours $C = 1$ de sorte que, toutes les courbes de RADON sont fermées.

3. Equations (q) qui ont la même dispersion centrale fondamentale φ . Qu'il me soit permis de dire encore quelques mots sur un complexe de questions gravitant autour des équations (q) qui ont la même dispersion centrale fondamentale de première espèce, φ . Nous considérons dans la suite encore les équations (q) oscillatoires dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Etant donnée une équation (q) il existe toujours infiniment beaucoup d'équations (\bar{q}) dont les intégrales ont les mêmes zéros que les intégrales de (q). Cela veut dire ceci: Si deux intégrales quelconques, y resp. y de (q) resp. (\bar{q}) ont un zéro en commun, alors elles s'annulent toujours simultanément. On peut dire, en termes de la théorie des dispersions, qu'il y a infiniment beaucoup d'équations (q) dont la dispersion centrale fondamentale φ coïncide avec celle de l'équation (q). Nous verrons plus tard, que la puissance de l'ensemble formé de ces équations (\bar{q}) ne dépend point du choix particulier de l'équation (q) et résulte toujours égale à la puissance du continu, \aleph . Il s'agit alors d'étudier les propriétés et surtout les relations mutuelles des intégrales des équations (q) qui ont la même dispersion centrale fondamentale φ et de déterminer toutes ces équations.

Désignons par $(Q\varphi)$ l'ensemble formé par toutes les équations (q) qui ont la même dispersion centrale fondamentale φ . Soit c un nombre quelconque.

Le point de départ de l'étude en question fournissent les deux formules suivantes ([11]):

$$(5) \quad \int_x^{\varphi(x)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} \right] d\sigma = \frac{1}{c - x} + \frac{1}{\varphi(x) - c},$$

$$\int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(\sigma)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2} \right] d\sigma = \frac{1 + \varphi'(c)}{\varphi(c) - c} - \frac{1}{2} \frac{\varphi''(c)}{\varphi'(c)},$$

x étant un nombre arbitraire tel que $x < c < \varphi(x)$. Ces formules subsistent pour chaque fonction y qui s'annule au point c et qui est une intégrale d'une équation (q) quelconque contenue dans l'ensemble $(Q\varphi)$. On voit, par conséquent, que les intégrales définies figurant dans les premiers membres des formules (5) restent invariables par rapport aux intégrales des équations de l'ensemble $(Q\varphi)$, intégrales, qui s'annulent au point c .

Or, j'omets les considérations commençant par les formules (5) pour pouvoir dire quelques mots au sujet des résultats correspondants.

1. On a d'abord le résultat suivant : Les coefficients q, \bar{q} de deux équations quelconques (q), $(\bar{q}) \in (Q\varphi)$ prennent dans chaque intervalle $[t, \varphi(t)]$ ($t \in j$) au moins quatre fois la même valeur. En d'autres termes : Il y a dans chaque intervalle $[t, \varphi(t)]$ au moins quatre points x_i tels que $q(x_i) = \bar{q}(x_i)$; $i = 1, 2, 3, 4$. Remarquons que ce théorème ne peut pas être amélioré car on connaît des exemples dans lesquels la borne inférieure en question, 4, est atteinte.

2. Toutes les équations (\bar{q}) avec la même dispersion centrale fondamentale φ sont données par la formule ([11])

$$\bar{q} = q + \frac{p''}{p} + 2 \frac{y'}{p} \cdot \frac{p'}{y},$$

y étant une intégrale de l'équation (q) s'annulant au point c , et p une fonction arbitraire définie dans l'intervalle j et jouissant des propriétés suivantes :

1^o $p \neq 0$ pour $t \in j$, 2^o $p[\varphi(t)] = p(t)$ pour $t \in j$, 3^o $p \in C_2$, 4^o $p'(c) = 0$,

$$5^o \int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)} \right] \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = 0.$$

3. Si l'on applique ce résultat à l'équation $y'' = -y$ dont la dispersion centrale fondamentale est, évidemment, $\varphi(t) = t + \pi$, et qu'on choisit $y(t) = \sin(t - c)$ et pose $p(t) = p(c) \cdot \exp f(t)$, on obtient le résultat suivant :

Toutes les équations (q) dont les intégrales ont leurs zéros consécutifs placés en distances égales, π , sont données par la formule

$$q(t) = -1 + f''(t) + f'^2(t) + 2f'(t) \cdot \cotg(t - c),$$

f étant une fonction arbitraire définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et jouissant des propriétés suivants :

$$f(t + \pi) = f(t) \text{ pour } t \in j, \quad f \in C_2, \quad f(c) = f'(c) = 0,$$

$$\int_0^\pi \frac{\exp(-2f(\sigma)) - 1}{\sin^2(\sigma - c)} d\sigma = 0.$$

Cela est une formule de M. F. NEUMAN ([18]). On trouve, par exemple, pour $f(t) = -\frac{1}{2} \log \left[1 - \frac{1}{3} \sin 2(t - c) \cdot \sin^2(t - c) \right]$ les coefficients $q(t|c)$ d'un système d'équations différentielles à un paramètre, c , équations dont les intégrales ont leurs zéros consécutifs placés en distances égales, π :

$$q(t|c) = -1 + \frac{\sin 4(t - c) + \frac{1}{3} \sin^4(t - c)}{\left[1 - \frac{1}{3} \sin 2(t - c) \sin^2(t - c) \right]^2}.$$

6. Je voudrais terminer ma conférence par la remarque qu'on a utilisé la théorie des dispersions centrales pour la solution de quelques problèmes aux limites, pour l'élargissement de la théorie de FLOQUET dans le cas de la fonction q non-périodique et pour plusieurs problèmes de différente nature au sujet des équations différentielles linéaires d'ordres plus élevés.

TROISIÈME CONFÉRENCE.

1. Les deux conférences précédentes sur la théorie des transformations des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre ont été consacrées à la théorie des transformations générales et celle des dispersions centrales. La théorie des transformations générales s'applique, rappelons-le, aux équations en question

quelconques, tandis que l'autre, la théorie des dispersions centrales, concerne les équations oscillatoires. La conférence d'aujourd'hui sera composée de deux parties, liées du reste l'une à l'autre. Dans la première partie je vais donner un aperçu d'une théorie que j'appelle, d'après sa notion fondamentale, théorie des dispersions générales. Cette théorie représente, au fond, un procédé constructif d'intégration de l'équation de KUMMER (Qq), dans le cas oscillatoire. La seconde partie de la présente conférence sera conçue de manière à servir d'introduction dans les méthodes algébriques dans la théorie des transformations considérées. Ces méthodes, que nous développerons en pleine mesure dans la conférence prochaine, sont basées sur les résultats empruntés de la théorie des groupes abstraits et elles fournissent, dans les recherches envisagées, un moyen puissant et de longue portée.

2. Considérons deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre,

$$(q) \quad y'' = q(t) y, \quad (Q) \quad \ddot{Y} = Q(T) Y$$

dans les conditions habituelles. Nous supposons, par conséquent, que les coefficients q, Q sont des fonctions continues dans des intervalles ouverts $j = (a, b)$, $J = (A, B)$, bornés ou non. Nous savons que l'équation de KUMMER correspondante s'écrit

$$(Qq) \quad -\{X, t\} + Q(X) X'^2 = q(t).$$

$\{X, t\}$ étant la dérivée schwarzienne de la fonction X au point t .

Dans la suite nous faisons la supposition supplémentaire que, les équations (q), (Q) sont oscillatoires, ce qui veut dire, rappelons-le, que les intégrales des équations en question s'annulent infiniment de fois dans les deux directions vers les extrémités des intervalles correspondants j, J . Cette supposition est pour la théorie des dispersions générales, que nous allons maintenant développer, d'importance essentielle.

Il paraît utile d'introduire la théorie des dispersions générales par indiquer quelques propriétés des correspondances linéaires entre les espaces formés par les intégrales des équations (q), (Q). Quelques-unes de ces propriétés se sont déjà présentées au cours de ma première conférence ([4], [6], [7], [13]).

Désignons par r, R les espaces linéaires formés des intégrales des équations (q), (Q).

Nous choisissons à volonté, dans chacun de ces espaces, une base $u, v \in r, U, V \in R$ et désignons par w, W les wronskiens correspondants, $w = uv' - u'v, W = UV' - U'V$. A l'aide de ces bases nous définissons une correspondance linéaire entre les espaces r, R en associant l'une à l'autre deux intégrales quelconques $y \in r, Y \in R$, formées avec les mêmes coordonnées constantes, γ_1, γ_2 , par rapport aux bases en question: $y = \gamma_1 u + \gamma_2 v, Y = \gamma_1 U + \gamma_2 V$. Par la fonction $y \rightarrow Y$ se trouve définie une application ρ de l'espace r sur l'espace R ; le nombre $\tau = \frac{w}{W}$ s'appelle la *caractéristique* de l'application ρ . De même, par la fonction $Y \rightarrow y$ se trouve définie une application P de l'espace R sur r à la caractéristique $\mathcal{C} = \frac{W}{w}$. Les applications ρ, P sont, évidemment, inverses l'une de l'autre et leurs caractéristiques possèdent la même propriété: $\tau\mathcal{C} = 1$.

On se rend compte facilement que, la même application ρ peut être définie de manière qu'on prend n'importe quelle base $\bar{u}, \bar{v} \in r$ et la base $\bar{\rho u}, \bar{\rho v} \in R$, ou encore, qu'on choisit n'importe quelle base $\bar{U}, \bar{V} \in R$ et la base $P\bar{U}, P\bar{V} \in r$. On désigne, naturellement, par $\bar{\rho y}$ resp. PY l'image de l'intégrale y resp. Y dans l'application ρ resp. P . Remarquons que les caractéristiques τ, \mathcal{C} des applications ρ, P ne dépendent point du choix des bases définissant ces applications.

Soit α resp. A une (première) phase quelconque de la base u, v resp. U, V . Nous savons que, deux intégrales correspondantes quelconques $y \in r, Y \in R$, s'expriment par les formules suivantes

$$(1) \quad \begin{aligned} y(t) &= \varepsilon k_1 |w/\alpha'(t)|^{1/2} \sin[\alpha(t) + k_2], \\ Y(T) &= Ek_1 |W/\dot{A}(T)|^{1/2} \sin[A(T) + k_2] \end{aligned} \quad (\varepsilon, E = \pm 1)$$

les k_1, k_2 étant des constantes arbitraires, les mêmes dans les deux formules.

Ajoutons que, pour définir la même application ρ , on peut prendre, dans les formules (1), n'importe quelle phase α resp. A de l'équation (q) resp. (Q) à condition de choisir convenablement l'autre phase A resp. α parmi celles de l'équation (Q) resp. (q).

Cela étant remarqué, nous allons dire quelques mots sur les applications ρ appelées normées qui jouent un rôle important dans la théorie qui nous occupe.

Choisissons deux nombres arbitraires $t_0 \in j$, $T_0 \in J$.

Convenons d'appeler l'application ρ *normée* par rapport à t_0 , T_0 si elle fait correspondre à toute intégrale $y \in r$ s'annulant pour t_0 une intégrale $(\rho y =) Y \in R$ qui s'annule pour T_0 . En d'autres termes, l'application ρ est normée si la relation $y(t_0) = 0$ entraîne $\rho y(T_0) = 0$ ($y \in r$). Il est évident que, si l'application ρ est normée par rapport à t_0 , T_0 alors l'application inverse, P , résulte normée par rapport à T_0 , t_0 .

Quelles sont les propriétés des bases $u, v \in r$, $U, V \in R$ définissant l'application ρ pour que cette application soit normée par rapport à t_0 , T_0 ?

La réponse à cette question consiste en ceci que, l'application ρ est normée par rapport à t_0 , T_0 alors et alors seulement, si les valeurs des intégrales u, v resp. U, V pour t_0 resp. T_0 sont liées par la relation suivante :

$$u(t_0) V(T_0) - v(t_0) U(T_0) = 0.$$

Or, en mettant cette formule sous la forme $u(t_0)/v(t_0) = U(T_0)/V(T_0)$ on se rend compte facilement que, l'application ρ est normée précisément dans le cas, si les valeurs d'arbitraires phases α resp. A de la base u, v resp. U, V pour t_0 resp. T_0 ne diffèrent l'une de l'autre que d'un multiple entier de π . On peut profiter de ce résultat pour montrer que, l'application ρ étant normée par rapport à t_0 , T_0 , les phases α resp. A figurant dans les formules (1) peuvent être supposées nulles pour t_0 resp. T_0 :

$$(2) \quad \alpha(t_0) = A(T_0) = 0.$$

Convenons d'appeler *base canonique* de l'application ρ supposée normée par rapport à t_0 , T_0 , tout couple de phases α resp. A qui s'annulent pour t_0 resp. T_0 et définissent l'application ρ dans le sens des formules (1). Nous voyons que toute application ρ normée admet des bases canoniques et, inversement, tout couple de phases α, A satisfaisant aux équations telles que (2) représente une base canonique d'une application ρ normée par rapport à t_0 , T_0 .

Nous sommes maintenant en mesure de procéder à la définition de certaines fonctions définies dans l'intervalle j et nommées dispersions générales.

Partons des nombres $t_0 \in j$, $T_0 \in J$, choisis, rappelons-le, arbitrairement. Ces nombres joueront, pour les fonctions à définir, le rôle de valeurs initiales.

Désignons par t_ν le ν -ième nombre conjugué (de première espèce) avec t_0 par rapport à l'équation (q): $t_\nu = \varphi_\nu(t_0)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\varphi_0(t_0) = t_0$. t_ν est dit le ν -ième nombre fondamental associé à t_0 ; l'intervalle $j_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1})$ resp. $\bar{j}_\nu = (t_{\nu-1}, t_\nu]$, à son tour, est dit le ν -ième intervalle fondamental à droite resp. à gauche associé à t_0 . On a de même, par rapport à l'équation (Q), les nombres et les intervalles fondamentaux associés à T_0 : $T_\nu, J_\nu = [T_\nu, T_{\nu+1})$, $\bar{J}_\nu = (T_{\nu-1}, T_\nu]$.

Remarquons que, en vertu du théorème sur la séparation de zéros des intégrales d'une équation linéaire du deuxième ordre, tout intégrale de l'équation (q), y , a dans chaque intervalle j_ν ou \bar{j}_ν précisément un zéro. Un énoncé analogue s'applique, naturellement, à chaque intégrale de l'équation (Q), Y , et aux intervalles J_ν ou \bar{J}_ν .

Cela étant, soit p une application linéaire de l'espace τ sur R qui est normée par rapport à t_0, T_0 , est soit τ sa caractéristique.

Nous définissons une fonction $X(t)$, pour $t \in j$, de la manière suivante :

Soit $t \in j$ un nombre quelconque et j_ν cet intervalle fondamental à droite associé à t_0 qui contient t : $t \in j_\nu$. Choisissons une intégrale de l'équation (q), y , s'annulant pour t : $y(t) = 0$. Alors la valeur $X(t)$ est le zéro de l'intégrale py contenu dans l'intervalle J_ν ou bien dans $\bar{J}_{-\nu}$, suivant que $\tau > 0$ ou bien $\tau < 0$.

La fonction $X(t)$, $t \in j$, que nous venons de définir est nommée *dispersion générale* des équations (q), (Q), ou bien, plus précisément, la dispersion générale des équations (q), (Q), générée par les valeurs initiales t_0, T_0 et l'application linéaire p .

Remarquons que la construction de la fonction $X(t)$ donnée plus haut dépend de trois paramètres arbitraires, dont l'un, T_0 , fixe la valeur de X au point t_0 , tandis que les deux autres déterminent l'application linéaire normée correspondante, p .

3. Nous allons maintenant indiquer les propriétés fondamentales des dispersions générales et surtout préciser leur rôle dans la théorie des transformations qui nous occupe ([13]).

Soit $X(t)$, $t \in j$, la dispersion générale des équations (q), (Q) générée par les valeurs initiales t_0, T_0 et l'application linéaire p .

Pour l'étude des propriétés de la fonction $X(t)$ le théorème suivant est fondamental :

α , A étant une base canonique de l'application linéaire p par rapport aux nombres t_0, T_0 , la fonction $X(t)$ vérifie identiquement la relation

suivante :

$$(3) \quad \alpha(t) = A[X(t)] \quad (t \in J).$$

Pour ne pas combler les grandes lignes de nos raisonnements je n'insiste pas à la démonstration de ce théorème et je préfère de me contenter de la remarque suivante: L'importance du théorème en question consiste en ceci, que la formule (3) exprime une relation très simple existant entre la fonction $X(t)$ et les phases $\alpha(t)$, $A(T)$ des équations (q), (Q), phases, dont les propriétés on connaît très bien.

Voici alors en revue les propriétés de la dispersion générale $X(t)$:

1^o La fonction $X(t)$ s'exprime à l'aide des phases α , A de la manière suivante :

$$(4) \quad X(t) = A^{-1}[\alpha(t)].$$

2^o La fonction $X(t)$ va constamment en croissant de A à B ou en décroissant de B à A suivant que $\tau > 0$ ou bien $\tau < 0$.

3^o La fonction inverse de X , X^{-1} , est la dispersion générale des équations (Q), (q) générée par les valeurs initiales T_0, t_0 et l'application linéaire p^{-1} inverse de p .

4^o La fonction $X(t)$ appartient à la classe C_3 . Sa dérivée, $X'(t)$, est toujours positive ou bien négative et on a $\text{sgn } X' = \text{sgn } \alpha' \cdot \text{sgn } \dot{A}$.

5^o La fonction X transforme les dispersions centrales φ_ν , Φ_ν des équations (q), (Q) d'après la formule suivante :

$$X[\varphi_\nu(t)] = \Phi_{\nu \text{sgn } X'}[X(t)] \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

6^o La fonction $X(t)$ est une solution complète de l'équation de KUMMER

$$(Qq) \quad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t).$$

La fonction inverse de $X(t)$, $x(T)$, est en même temps une solution complète de l'équation de KUMMER

$$(qQ) \quad -\{x, T\} + q(x)x^2 = Q(T).$$

7^o Toute solution complète de l'équation de KUMMER (Qq) est une dispersion générale des équations (q), (Q).

8^o La fonction $X(t)$ et son inverse $x(T)$ transforment, l'une dans l'autre deux intégrales correspondantes quelconques $y \in r$,

($\neq 0$) $Y \in R$ d'après les formules :

$$c \cdot y(t) = Y[X(t)] |X'(t)|^{-1/2}, \quad Y(T) = c \cdot y[x(T)] |\dot{x}(T)|^{-1/2}$$

$c (\neq 0)$ étant une constante qui ne dépend pas des intégrales y, Y .

Voici alors le résultat principal de la théorie des dispersions générales :

Les dispersions générales des équations (q), (Q) sont toutes et seules les solutions complètes de l'équation de KUMMER (Qq).

Ajoutons enfin cette remarque qui nous sera utile dans la suite :

Soit $I(Q, q)$ l'ensemble composé de toutes les dispersions générales des équations (q), (Q) ou bien, en d'autres termes, de toutes les solutions complètes de l'équation de KUMMER (Qq). L'ensemble $I(Q, q)$ consiste en toutes les fonctions $X(t)$ telles que (4), formées de manière qu'une phase, α où A a été choisie parmi les phases de l'équation (q) ou (Q) arbitrairement et une fois pour toute, tandis que l'autre, A ou α , parcourt toutes les phases de l'équation (Q) ou (q).

C'est avec cette remarque que nous terminons la première partie de la présente conférence.

4. Théorie algébrique des dispersions générales. Je passe maintenant à la seconde partie de cette conférence qui est conçue de manière à servir, nous l'avons déjà dit, d'introduction dans les méthodes algébriques dans la théorie des transformations considérée. Ces méthodes seront développées et appliquées en pleine mesure dans la prochaine conférence. Remarquons dès le début que les méthodes en question s'appliquent aux équations différentielles linéaires oscillatoires et définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Ceci étant prélevé, la voie qui conduit aux méthodes en question consiste dans l'étude de l'ensemble formé de certaines fonctions appelées fonctions-phases ([10]).

Nous dénommons *fonction-phase* toute fonction α , définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, qui jouit de la propriété d'être inférieurement et supérieurement non-bornée et d'appartenir à la classe C_3 ; on suppose en outre que la dérivée α' est toujours différente de zéro :

$$1^0 \alpha \in C_3, \quad 2^0 \alpha' \neq 0,$$

$$3^0 \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = -\infty \cdot \operatorname{sgn} \alpha', \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty \cdot \operatorname{sgn} \alpha'.$$

On voit que toute (première) phase d'une équation oscillatoire quelconque (q) définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, est une fonction-phase. Inversement, toute fonction-phase, α représente une phase d'une équation oscillatoire (q) définie dans l'intervalle j , le porteur q_α de cette équation étant donné par la formule, rencontrée déjà dans la première conférence,

$$(5) \quad q_\alpha(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t).$$

Nous parlons, par conséquent, plus brièvement, des phases au lieu des fonctions-phases. Remarquons que la formule (5) peut être écrite dans la forme plus condensée :

$$(6) \quad q_\alpha(t) = -\{tg \alpha, t\}.$$

1. Soit \mathcal{G} l'ensemble formé par toutes les phases.

On voit facilement que l'ensemble \mathcal{G} contient la phase-identité $\varphi_0(t) = t$ et que, pour deux phases quelconques, $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, la fonction composée $\alpha\beta$ et de même la fonction inverse α^{-1} appartiennent encore à \mathcal{G} . Il en résulte que l'ensemble \mathcal{G} , dans lequel on a défini l'opération binaire (multiplication) à l'aide de composition des fonctions, représente un groupe, avec l'élément neutre $\varphi_0(t)$. Nous appelons \mathcal{G} le *groupe des phases*.

Les raisonnements suivants consistent, au fond, en recherches sur la structure algébrique du groupe \mathcal{G} .

2. Pour commencer, remarquons que le sous-ensemble \mathcal{K} du groupe \mathcal{G} , composé de toutes les phases croissantes est un sous-groupe de \mathcal{G} d'indice 2. Il en résulte que \mathcal{K} est un sous-groupe invariant dans \mathcal{G} de sorte qu'on a, pour chaque phase $\alpha \in \mathcal{G}$ la relation suivante : $\alpha \mathcal{K} = \mathcal{K} \alpha$. On voit que le groupe-quotient \mathcal{G}/\mathcal{K} consiste en deux classes dont l'une est \mathcal{K} tandis que l'autre, \mathcal{D} , est formée par toutes les phases décroissantes.

3. Pour aller plus loin, nous allons définir dans le groupe \mathcal{G} une relation d'équivalence de la manière suivante :

Étant données deux phases $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ quelconques, on définit la phase β d'être équivalente à α s'il subsiste une relation de la forme

$$(7) \quad tg \beta(t) = \frac{c_{11} + c_{12} tg \alpha(t)}{c_{21} + c_{22} tg \alpha(t)},$$

$c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ étant des constantes convenables telles que $|c_{ij}| \neq 0$. On suppose la relation vérifiée pour toutes les valeurs $t \in j$ à l'exception des points singuliers des fonctions $\operatorname{tg} \alpha(t), \operatorname{tg} \beta(t)$.

La relation en question étant, évidemment, reflexive, symétrique et transitive, elle représente, en effet, une relation d'équivalence que nous désignons par \mathcal{R} .

Le groupe \mathcal{G} se décompose, par conséquent, en différentes classes mod \mathcal{R} . Toute classe consiste en phases qui sont équivalentes par paires, tandis que deux phases appartenant à des classes différentes ne sont jamais équivalentes l'une à l'autre.

Désignons par \mathcal{F} cette classe mod \mathcal{R} qui contient l'élément neutre du groupe $\mathcal{G}, \varphi_0(t)$.

La classe \mathcal{F} consiste, par conséquent, en phases, ε , telles que

$$(8) \quad \operatorname{tg} \varepsilon(t) = \frac{c_{11} + c_{12} \operatorname{tg} t}{c_{21} + c_{22} \operatorname{tg} t},$$

les constantes c_j , prenant toutes les valeurs pour lesquelles $|c_j| \neq 0$.

Or, on voit que pour deux classes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{F}$ quelconques la fonction composée $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ et de même la fonction inverse ε_1^{-1} appartiennent encore à \mathcal{F} . Cela montre que la classe \mathcal{F} représente un sous-groupe du groupe \mathcal{G} . Nous appelons \mathcal{F} le *sous-groupe fondamental* du groupe \mathcal{G} .

4. Insistons pour un instant sur ce sous-groupe \mathcal{F} et envisageons l'ensemble formé par les phases croissantes et contenues dans \mathcal{F} . Il s'agit, par conséquent, de l'intersection $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$. Cherchons le centre, \mathcal{L} , de ce groupe $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$. Rappelons, que le centre d'un groupe quelconque est un sous-groupe invariant dans ce dernier et consiste en tous les éléments échangeables avec chaque élément du groupe en question. Le centre \mathcal{L} consiste, par conséquent, en phases croissantes contenues dans \mathcal{F} et qui sont échangeables avec chaque phase ayant ces propriétés. Or, en se servant de la formule (8) on trouve que le centre en question, \mathcal{L} , est formé par les phases

$$c_\nu(t) = t + \nu\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Le centre \mathcal{L} est, par suite, dénombrable et représente le groupe cyclique infini généré par la phase $c_1(t) = t + \pi$:

$$\mathcal{L} = \{t + \nu\pi\}.$$

Le groupe \mathcal{L} est naturellement invariant dans le groupe $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$.

La décomposition du groupe \mathcal{G} en classes latérales à droite par rapport au groupe \mathcal{L} . décomposition que nous désignons par $\mathcal{G}/_d\mathcal{L}$, consiste en classes $\mathcal{L}\alpha$, α parcourant les différentes phases $\alpha \in \mathcal{G}$. Or, pour toute phase $\alpha \in \mathcal{G}$, la classe correspondante $\mathcal{L}\alpha \in \mathcal{G}/_d\mathcal{L}$ est formée par les phases

$${}_v\alpha(t) = \alpha(t) + v\pi \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

et coïncide, par conséquent, avec le système dénombrable des phases déterminées par la même base $u(t)$, $v(t)$ à laquelle appartient $\alpha(t)$: $\text{tg } \alpha(t) = u(t) : v(t)$.

Nous trouvons ainsi cette signification de la décomposition $\mathcal{G}/_d\mathcal{L}$: La décomposition en question consiste précisément en systèmes des phases dont chacun est déterminé par la même base d'une équation (q).

5. Soit $\alpha \in \mathcal{G}$ une phase arbitraire. Désignons par \bar{a} la classe mod \mathcal{R} qui renferme α , $\alpha \in \bar{a}$. En remplaçant dans la formule (8) t par $\alpha(t)$ on voit que, pour tout élément $\varepsilon \in \mathcal{F}$ la phase $\varepsilon\alpha$ résulte équivalente à α . Cela entraîne $\bar{a} \supset \mathcal{F}\alpha$, $\mathcal{F}\alpha$ étant la classe latérale à droite de l'élément α par rapport au sous-groupe \mathcal{F} . D'autre part, en remplaçant dans la formule (7) t par $\alpha^{-1}(t)$, on voit que, pour toute phase β équivalente à α la fonction $\beta\alpha^{-1} (= \varepsilon)$ appartient au sous-groupe \mathcal{F} , de sorte que $\beta = \varepsilon\alpha \in \mathcal{F}\alpha$. Cela entraîne $\bar{a} \subset \mathcal{F}\alpha$. On a par conséquent $\bar{a} = \mathcal{F}\alpha$.

Nous voyons que les classes des phases mutuellement équivalentes mod \mathcal{R} , représentent précisément les classes latérales à droite par rapport au sous-groupe fondamental \mathcal{F} . On peut dire aussi que, la décomposition du groupe \mathcal{G} en classes mod \mathcal{R} , \bar{E} , coïncide avec la décomposition en classes latérales à droite par rapport au sous-groupe fondamental \mathcal{F} : $\bar{E} = \mathcal{G}/_d\mathcal{F}$.

6. Associons à toute phase α la fonction q_α définie d'après la formule (5) ou (6), fonction que nous appellerons le *porteur de α* . La fonction q_α est par conséquent le porteur de l'équation (q _{α}) dont α est une phase. En particulier, le porteur q_{φ_0} associé à l'élément neutre du groupe \mathcal{G} , $\varphi_0(t) = t$, résulte égale à -1 : $q_{\varphi_0} = -1$.

Subsiste, pour deux phases quelconques, α , $\beta \in \mathcal{G}$, la formule:

$$q_{\alpha\beta} = (1 + q_\alpha \beta) \beta'^2 + q_\beta.$$

Nous omettons la démonstration de cette formule que s'effectue à partir de la formule (5) ou (6) par des calculs formels.

L'importance des porteurs justement définis pour la théorie algébrique qui nous occupe, consiste en leur relation avec la décomposition \bar{E} . En effet, on peut démontrer que les porteurs q_α, q_β de deux phases arbitraires $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ coïncident si et seulement si les phases en question sont mutuellement équivalentes, ou bien, en d'autres termes, si elles appartiennent au même élément de la décomposition E . Nous voyons, par conséquent, que toutes les phases appartenant à la même classe quelconque $\mathcal{F}\alpha \in \bar{E}$, possèdent toujours le même porteur q_α , tandis qu'à des phases appartenant à des éléments différentes de la décomposition \bar{E} se trouvent associés les porteurs différents.

Toute classe $\mathcal{F}\alpha \in \bar{E}$ détermine, par conséquent, précisément une équation (q) oscillatoire, à savoir celle avec le porteur q_α ; les phases de cette équation (q_α) sont précisément les différents éléments de la classe $\mathcal{F}\alpha$. Inversement, à toute équation (q) oscillatoire correspond précisément un élément de la décomposition \bar{E} , à savoir l'élément constitué par les phases qui déterminent le porteur q de l'équation (q).

Désignons par $\mathcal{A}\bar{E}$ l'ensemble formé par les porteurs de toutes les équations oscillatoires (q). L'application en question (\mathcal{A}) de l'ensemble \bar{E} sur $\mathcal{A}\bar{E}$, faisant correspondre à toute classe $\mathcal{F}\alpha \in \bar{E}$ le porteur $q_\alpha \in \mathcal{A}\bar{E}$, résulte, évidemment, biunivoque.

Remarquons que, en particulier, le porteur déterminé par le sous-groupe fondamental \mathcal{F} est la fonction $q_{\varphi_0}(l) = -1$, $\mathcal{A}\mathcal{F} = -1$.

Voici une application des résultats que nous venons d'obtenir consistant en la démonstration de la proposition suivante :

Les ensemble formés par les phases de deux équations oscillatoires quelconques, (q), (Q), ont toujours la même puissance égale à celle du continu, \aleph . En effet, nous avons vu que les ensembles en question sont des classes latérales à droite figurant parmi les éléments de la décomposition \bar{E} . Or, d'après un théorème bien connu dans la théorie des groupes, tous les éléments de la décomposition d'un groupe en classes latérales à droite, par rapport à un sous-groupe du groupe en question, ont la même puissance. Par conséquent, les ensembles des phases des équations (q), (Q) ont la même puissance qui est égale à celle du sous-groupe fondamental \mathcal{F} . Or, la puissance de ce sous-groupe \mathcal{F} est égale à \aleph , ce qui résulte de la formule (8).

Une autre observation permet de montrer que la puissance de la décomposition \bar{E} est égale, elle aussi, à \aleph . En effet, la correspondance \mathcal{A} fait représenter d'une manière biunivoque la décomposition \bar{E} sur l'ensemble formé par les fonctions continues, q , pour lesquelles les équations (q) résultent oscillatoires. Or comme cet ensemble contient les fonctions-constantes $-k^2$ ($k \neq 0$), il a la puissance du continu, \aleph .

Les propriétés de structure du groupe \mathcal{G} dont nous venons de parler sont indiquées dans le schéma suivant :

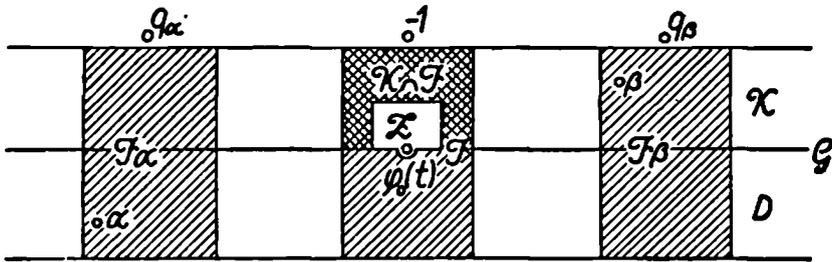


Fig. 6

5. Nous allons nous arrêter, pour aujourd'hui, dans l'étude des propriétés de structure du groupe \mathcal{G} afin de revenir aux dispersions générales et d'appliquer les résultats obtenus à ces fonctions.

Considérons deux équations (q), (Q) oscillatoires dans l'intervalle $j = J = (-\infty, \infty)$ et soit $X(t)$ une dispersion générale des équations (q), (Q).

Nous savons que la fonction X appartient à la classe C_3 et sa dérivée, X' , est toujours différente de zéro ; de plus, la fonction $X(t)$ est définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et ses valeurs recouvrent l'intervalle $J = (-\infty, \infty)$. Il en résulte immédiatement que X est une fonction-phase et se trouve par conséquent contenue comme élément dans le groupe \mathcal{G} . Il est du reste facile à montrer que le porteur de cette dispersion générale X, q_X , est lié aux fonctions q, Q de la manière suivante :

$$q_X(t) = q(t) - [1 + Q(X)] \cdot X'^2(t).$$

Désignons par $I(Q, q)$ l'ensemble formé par toutes les dispersions générales des équations (q), (Q). Cet ensemble constitue, nous venons de le voir, un sous-ensemble du groupe \mathcal{G} . Pour le déterminer, rappelons que, l'ensemble $I(Q, q)$ consiste en fonctions $A^{-1} \alpha(t)$, A étant une phase de l'équation (Q) choisie arbitrairement et une fois pour toute, tandis que α parcourt toutes les phases de

l'équation (q). Or, en tenant compte des propriétés de structure du groupe \mathcal{G} , établies plus haut, nous voyons que l'ensemble des phases de l'équation (q) est identique avec la classe latérale à droite par rapport à \mathcal{F} , $\mathcal{F}\alpha$ α étant une phase arbitraire de l'équation (q). Nous trouvons ainsi la formule

$$(9) \quad I(Q, q) = A^{-1} \mathcal{F}\alpha,$$

A, α étant, rappelons-le, des phases des équations (Q), (q), choisies arbitrairement et une fois pour toutes. Le second membre de la formule (9) s'appelle *expression canonique* des dispersions générales des équations (q), (Q).

Nous allons appliquer la formule (9) à l'étude des propriétés des ensembles tels que $I(Q, q)$, $I(\bar{Q}, \bar{q})$. Rappelons, que l'ensemble $I(Q, q)$ par exemple, coïncide avec l'espace intégrale de l'équation de KUMMER (Qq).

Considérons d'abord d'arbitraires équations de KUMMER, (Qq), ($\bar{Q}\bar{q}$).

Soient $X \in I(Q, q)$, $X \in I(\bar{Q}, \bar{q})$ les dispersions générales des équations (q), (Q) resp. (\bar{q}), (\bar{Q}), déterminées, dans le sens de la formule (9), par la même phase $\varepsilon \in \mathcal{F}$ qui est d'ailleurs arbitraire : $X = A^{-1} \varepsilon \alpha$, $\bar{X} = \bar{A}^{-1} \varepsilon \alpha$. En éliminant la fonction ε on obtient $AX\alpha^{-1} = \bar{A}\bar{X}\alpha^{-1}$, et puis

$$(10) \quad \bar{X} = Z^{-1} Xz,$$

où l'on a posé $Z = A^{-1} \bar{A}$, $z = \alpha^{-1} \bar{\alpha}$. Or, la fonction Z resp. z est évidemment, une dispersion générale des équations (\bar{Q}), (Q) resp. (\bar{q}), (q). On trouve ainsi le résultat suivant :

Les ensembles $I(Q, q)$ et $I(\bar{Q}, \bar{q})$ sont mutuellement équivalents et peuvent être représentés l'un sur l'autre suivant la formule (10) et l'aide des dispersions générales Z resp. z des équations (\bar{Q}), (Q) resp. (\bar{q}), (q). On choisit ces fonctions Z, z arbitrairement et une fois pour toutes.

Considérons, en second lieu, les équations de KUMMER, (QQ), (qq), associées à l'équation (Qq). La formule (9) entraîne

$$I(Q, Q) = A^{-1} \mathcal{F}A, \quad I(q, q) = \alpha^{-1} \mathcal{F}\alpha.$$

Nous voyons que l'ensemble $I(Q, Q)$ resp. $I(q, q)$ est le groupe conjugué avec le groupe fondamental \mathcal{F} par rapport à une phase

arbitraire A resp. α de l'équation (Q) resp. (q) . On en conclût que ces groupes $I(Q, O)$, $I(q, q)$ sont isomorphes. On obtient un isomorphisme du groupe $I(q, q)$ sur $I(Q, Q)$ en faisant correspondre à chaque élément $x \in I(q, q)$ l'élément $X \in I(Q, Q)$ d'après la formule

$$X = z^{-1} x z;$$

z désigne une dispersion générale des équations (Q) , (q) , qui est fixe.

6. Je voudrais terminer la présente conférence par la remarque suivante :

Dans l'algèbre moderne on rencontre souvent certaines structures à une opération binaire, appelées groupoïdes de BRANDT ⁽²⁾. Une telle structure, \mathcal{B} , est un ensemble non-vidé chargé d'une opération binaire, nommée encore la multiplication, qui, contrairement à ce qui se passe en groupes, n'est nécessairement pas définie pour toutes les paires d'éléments de \mathcal{B} . D'une manière plus précise, pour certaines paires d'éléments $a, b \in \mathcal{B}$ il existe le produit ab qui est encore un élément de \mathcal{B} , $ab = c \in \mathcal{B}$, tandis que, pour d'autres paires d'éléments de \mathcal{B} il n'en existe pas. La multiplication en question est soumise, naturellement, à remplir certains postulats; ils concernent surtout la validité d'une espèce de loi associative, l'existence des éléments-unités à droite et à gauche ainsi que l'existence des éléments inverses. En particulier, on existe pour tout élément $a \in \mathcal{B}$ des éléments bien déterminés, appelés l'élément-unité à droite, e , l'élément-unité à gauche, e' , et l'élément inverse de a , a^* , qui vérifient les relations suivantes : $ae = e' a = a$, $a^* a = e$.

Cela étant remarqué, considérons dans le groupe des phases, \mathcal{G} , l'ensemble, \mathcal{B} , formé par tous les sous-ensembles $I(Q, q)$ du groupe \mathcal{G} , déterminés par les différentes équations (q) , (Q) . En d'autres termes, il s'agit de l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de \mathcal{G} , $A^{-1} \mathcal{F} \alpha \in \mathcal{B}$, formés à l'aide d'arbitraires éléments A , $\alpha \in \mathcal{G}$.

Définissons dans \mathcal{B} une multiplication de manière que, pour deux éléments arbitraires $I(Q, q)$, $I(\bar{Q}, \bar{q}) \in \mathcal{B}$ le produit $I(Q, q)$

⁽²⁾ V. par ex. O. BORŮVKA : *Grundlagen der Gruppoïd-und Gruppentheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

$I(Q, q)$ existe dans le cas $\bar{Q} = q$, et alors il est égal à $I(Q, q)$:

$$I(Q, q) I(q, \bar{q}) = I(Q, q).$$

On démontre que l'ensemble \mathcal{B} chargé de cette multiplication est un groupoïde de BRANDT. Pour tout élément $I(Q, q) \in \mathcal{B}$, l'élément-unité à droite resp. à gauche et l'élément inverse sont les suivants: $I(q, q)$ resp. $I(Q, Q)$ et $I(q, Q)$. On a, en effet,

$$I(Q, q) I(q, q) = I(Q, q), \quad I(Q, Q) I(Q, q) = I(Q, q),$$

$$I(q, Q) I(Q, q) = I(q, q).$$

On voit par conséquent que, dans le groupoïde de BRANDT en question, \mathcal{B} , les éléments-unités sont les différents sous-groupes de \mathcal{G} , conjugués avec le sous-groupe fondamental \mathcal{F} , tandis que deux éléments mutuellement inverses consistent en dispersions générales qui sont par paires inverses l'une de l'autre.

C'est avec cette remarque que je termine ma conférence d'aujourd'hui.

QUATRIÈME CONFÉRENCE.

1. Dans la conférence précédente nous nous sommes occupés des éléments algébriques dans la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. Nous avons introduit la notion du groupe des phases, \mathcal{G} , groupe consistant en fonctions-phases définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, et nous avons étudié les propriétés de structure de ce groupe. Le résultat final de nos considérations était donné par une formule exprimant l'ensemble des dispersions générales de deux équations (q), (Q) en termes de phases de ces équations et du sous-groupe fondamental \mathcal{F} du groupe \mathcal{G} . Rappelons que nous avons aussi parlé du groupoïde de BRANDT formé par les ensembles des dispersions générales, $I(Q, q)$, appartenant à de différentes paires d'équations (q), (Q).

La conférence d'aujourd'hui est conçue à former une suite des raisonnements précédents afin d'approfondir nos connaissances sur la structure du groupe \mathcal{G} et d'en tirer des conséquences pour les méthodes algébriques et leurs applications. Quant à celles-là, nous

avons en vue de déterminer la puissance de l'ensemble formé par toutes les équations (q) oscillatoires, dont les intégrales ont les mêmes zéros, et de donner une caractérisation des dispersions générales de deux équations (q), (Q) par leurs relations aux groupes formés par les intégrales des équations de KUMMER (qq), (QQ). A la fin de cette conférence je me propose de donner un aperçu de quelques problèmes ouverts de la théorie des transformations considérées, problèmes qui indiquent, peut être, en grandes lignes, le futur développement de la théorie en question.

2. Nous allons commencer nos raisonnements par deux remarques concernant les (premières) phases d'une équation (q). Dans ce but, considérons une équation (q) définie, comme d'habitude, dans un intervalle ouvert $j = (a, b)$.

Rappelons qu'on appelle (première) phase d'une base $u(t), v(t)$ de l'équation (q), toute fonction, α , définie et continue dans l'intervalle j , et qui satisfait, à l'exception des zéros de l'intégrale $v(t)$, à la relation $\operatorname{tg} \alpha(t) : v(t)$. Rappelons en plus, qu'on parle d'une phase de l'équation (q), quand la base correspondante ne se trouve pas spécifiée, ou bien, en d'autres termes, s'il agit d'une phase appartenant à une base quelconque de l'équation (q).

Cela étant rappelé, la première remarque à faire consiste en ceci que, par d'arbitraires valeurs initiales du deuxième ordre, $t_0 \in j$; $\alpha_0, \alpha'_0 \neq 0, \alpha''_0$ se trouve définie précisément une phase de l'équation (q), $\alpha(t)$, qui admet ces valeurs initiales :

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \quad \alpha'(t_0) = \alpha'_0, \quad \alpha''(t_0) = \alpha''_0.$$

Nous omettons la démonstration qui est une conséquence immédiate du théorème générale sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de KUMMER, (Qq), théorème, dont nous avons parlé dans la première conférence.

La deuxième remarque à faire s'applique à l'équation (q) dans le cas, ou elle admet la dispersion fondamentale de première espèce, $\varphi_1(t)$. Pour ne pas être gêné par des particularités sans importance nous allons supposer que l'équation (q) soit oscillatoire et donnée, dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. Dans ce cas se trouvent définies, nous le savons, les dispersions centrales de première espèce et de différents indices, $\varphi_\nu(t)$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Rappelons que toute dispersion $\varphi_\nu(t)$ s'exprime à l'aide de la dispersion fondamentale

$\varphi_1(t)$ ($= \varphi(t)$) ou bien son inverse, $\varphi_{-1}(t)$, de la façon suivante :

$$(1) \quad \varphi_\nu(t) = \begin{cases} \varphi\varphi \dots \varphi(t) & (|\nu \text{ facteurs}) \text{ pour } \nu > 0. \\ \varphi_{-1}\varphi_{-1} \dots \varphi_{-1}(t) & \text{» } \nu < 0. \\ t & \text{» } \nu = 0. \end{cases}$$

Cela étant, la remarque en question consiste en ceci, qu'il subsiste dans l'intervalle j , pour toute phase de l'équation (q), $\alpha(t)$, la relation suivante, dite *abelienne*,

$$(2) \quad \alpha\varphi(t) = \alpha(t) + \pi \cdot \text{sgn } \alpha',$$

ou bien, plus généralement,

$$(3) \quad \alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \cdot \text{sgn } \alpha' \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$

La formule (3) est, manifestement, une conséquence immédiate des formules (1) et (2). Il suffit, par conséquent, de donner une démonstration de la formule (2), c'est ce que nous allons faire rapidement.

Soient $\alpha(t)$ une phase quelconque de l'équation (q). Nous savons que l'intégrale générale y de l'équation (q) s'exprime à l'aide de la fonction α par la formule

$$y(t) = k_1 |\alpha'(t)|^{-1/2} \sin[\alpha(t) + k_2],$$

k_1, k_2 étant des constantes arbitraires. Soit $x \in j$ un nombre arbitraire et envisageons une intégrale de l'équation (q), $y_0(t)$, qui s'annule pour la valeur x : $y_0(x) = 0$. En appliquant la formule précédente on obtient l'intégrale $y_0(t)$ sous la forme $y_0(t) = k_1 \cdot \sin[\alpha(t) - \alpha(x)]: \sqrt{|\alpha'(t)|}$. On voit que le premier zéro de l'intégrale $y_0(t)$, supérieur à x , c'est-à-dire la valeur $\varphi(x)$, vérifie la relation $\alpha\varphi(x) - \alpha(x) = \pi \cdot \text{sgn } \alpha'$. Il en résulte immédiatement la formule (2).

3. Nous allons maintenant revenir à l'étude de la structure du groupe des phases, \mathcal{G} . Nous avons déjà dit que le groupe \mathcal{G} est formé par les fonctions-phases, c'est-à-dire par les fonctions définies dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ qui sont inférieurement et supérieurement non-bornées, appartiennent à la classe C_3 et dont les dérivées du premier ordre ne sont jamais nulles. On parle plus brièvement des phases au lieu des fonctions-phases. Rappelons que le

groupe \mathcal{G} se décompose en deux classes dont l'une, \mathcal{K} , est un sous-groupe invariant dans le groupe \mathcal{G} et consiste en phases croissantes, tandis que l'autre, D , constitue le second élément du groupe-quotient \mathcal{G}/\mathcal{K} et consiste en phases décroissantes. Nous avons défini dans le groupe \mathcal{G} une relation d'équivalence, \mathcal{R} , et nous avons montré que, cet élément de la décomposition \bar{R} du groupe $\mathcal{G} \bmod \mathcal{R}$, qui contient l'élément neutre $\varphi_0(t) = t$ du groupe \mathcal{G} est un sous-groupe de \mathcal{G} , sous-groupe, \mathcal{F} , appelé fondamental. Nous avons introduit le centre $\mathcal{L} = \{t + \nu\pi\}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) du groupe $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ qui est, évidemment, dénombrable. Puis, nous avons montré que la décomposition \bar{R} coïncide avec la décomposition $\mathcal{G}/_d\mathcal{F} (= \bar{E})$ et que toute classe $\mathcal{F}\alpha \in E$ consiste précisément en phases d'une équation différentielle (q). Finalement, nous avons introduit la correspondance biunivoque, \mathcal{A} , faisant correspondre à toute classe $\mathcal{F}\alpha \in \bar{E}$ le porteur q de cette équation (q) dont les phases constituent la classe en question. Évoquons nos raisonnements au sujet de la structure du groupe \mathcal{G} sur la figure que nous avons donnée dans la conférence précédente (Fig. 6).

4. Nous allons maintenant introduire dans la théorie qui nous occupe une nouvelle notion, à savoir celle des fonctions-phases *élémentaires*. Nous parlerons encore, pour abrégé, des phases élémentaires au lieu des fonctions-phases élémentaires ([10]).

Nous entendons sous phase élémentaire une phase, $\lambda(t)$, qui vérifie, dans l'intervalle j , l'équation

$$(4) \quad \lambda(t + \pi) = \lambda(t) + \pi \cdot \operatorname{sgn} \lambda'.$$

Ainsi, par exemple, la phase-unité du groupe \mathcal{G} , $\varphi_0(t) = t$, est élémentaire.

On démontre facilement que les phases élémentaires sont données par la formule

$$(5) \quad \lambda(t) = t \cdot \operatorname{sgn} \lambda' + g(t),$$

g étant une fonction périodique de π , appartenant à la classe C_3 et vérifiant l'inégalité $g'(t) + \operatorname{sgn} \lambda' > 0$ resp. < 0 suivant que $\lambda'(t) > 0$ resp. < 0 . On voit, en particulier, que les phases élémentaires dépendent d'une fonction périodique qui est largement arbitraire.

Cela étant, soit $\lambda(t)$ une phase élémentaire. Envisageons un arbitraire élément $c_\nu(t) = t + \nu\pi$ du centre \mathcal{L} considéré ci-dessus ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). La formule (5) entraîne $\lambda c_\nu = c_\nu \cdot \text{sgn} \lambda' + g$ et puis

$$(6) \quad \lambda c_\nu(t) = c_{\nu \cdot \text{sgn} \lambda'} \lambda(t).$$

On voit que la phase λ transforme tout élément $c_{\nu \cdot \text{sgn} \lambda'}$ suivant la formule

$$(7) \quad \lambda^{-1} c_{\nu \cdot \text{sgn} \lambda'} \lambda(t) = c_\nu(t).$$

Par conséquent, toute phase élémentaire laisse dans la transformation telle que (7) chaque élément $c_\nu \in \mathcal{L}$ invariant ou bien le transforme dans son inverse, $c_{-\nu} \in \mathcal{L}$, suivant qu'elle est croissante ou bien décroissante.

Désignons par \mathcal{S} l'ensemble formé par toutes les phases élémentaires. En se servant de la formule (4) on démontre que l'ensemble \mathcal{S} est un sous-groupe du groupe \mathcal{G} :

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{G}.$$

\mathcal{S} est dit le *groupe des phases élémentaires*. Ce groupe engendre, naturellement, deux décompositions du groupe \mathcal{G} en classes latérales. Nous désignons par \bar{H} la décomposition consistant en classes latérales à droite: $\bar{H} = \mathcal{G}/_d \mathcal{S}$.

Nous savons que, toute fonction-phase $\alpha \in \mathcal{G}$ détermine précisément une équation (q) admettant la fonction α pour phase. Pour la commodité du langage nous disons, par occasion, que, le porteur q et les dispersions centrales φ_ν de l'équation (q) appartiennent ou bien correspondent à la phase α . Nous parlons aussi, pour abrégier, d'intégrales, de phases et de dispersions centrales du porteur q au lieu d'intégrales, phases et dispersions centrales de l'équation (q).

Cela étant, nous allons d'abord montrer qu'une phase $\lambda \in \mathcal{G}$ est élémentaire si et seulement si la dispersion fondamentale correspondante φ est linéaire et de la forme $\varphi(t) = t + \pi$. En effet, soit $\lambda \in \mathcal{G}$ une phase quelconque et φ la dispersion fondamentale correspondante. Si la fonction φ est linéaire et de la forme en question, la relation abélienne correspondante a la forme (4), ce qui montre, que la phase λ est élémentaire. Inversement, si la phase λ est

élémentaire alors la formule (4), confrontée avec la relation abélienne correspondante, conduit à la formule $\varphi(t) = t + \pi$, ce qui achève la démonstration.

En second lieu nous montrerons que toute phase $\alpha \in \mathcal{G}$ qui est équivalente (mod \mathcal{R}) à une phase élémentaire λ est aussi élémentaire. En effet, si les phases α, λ sont équivalentes (mod \mathcal{R}), elles sont des phases de la même équation (q). Or la phase λ étant élémentaire, la dispersion fondamentale φ de (q) a la forme $\varphi(t) = t + \pi$. Il en résulte que la phase α , elle aussi, est élémentaire.

Ces raisonnements entraînent que, pour chaque équation (q) ou bien toutes les phases sont élémentaires ou bien aucune d'entre elles. Dans le premier cas et alors seulement, la dispersion fondamentale φ de l'équation (q) est linéaire et de la forme $\varphi(t) = t + \pi$; autrement dit dans le cas en question, les zéros consécutifs de chaque intégrale de l'équation (q) sont placés à distance égale, π .

Nous venons de voir que toute classe $\bar{a} \in \bar{E}$ qui renferme une phase élémentaire consiste en seules phases élémentaires. En particulier, la phase-unité $\varphi_0(t) = t$ du groupe \mathcal{G} étant élémentaire, le sous-groupe fondamental \mathcal{F} est constitué entièrement par des phases élémentaires. Par conséquent, le sous-groupe \mathcal{F} est un sous-groupe dans \mathcal{S} . Nous arrivons ainsi aux relations

$$\{1\} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{G},$$

$\{1\}$ étant le plus petit sous-groupe en \mathcal{G} , constitué par l'élément unique $\varphi_0(t) = t$.

La relation $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ entraîne $\bar{E} \leq H$, ce qui veut dire que toute classe $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$ est la réunion de certaines classes-éléments de la décomposition \bar{E} . Or, d'après un théorème bien connu dans la théorie des groupes, la puissance de l'ensemble formé par les classes-éléments de la décomposition \bar{E} qui sont contenues dans la même classe $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$ et constituent, par conséquent, par réunion cette classe $\mathcal{S}\alpha$, résulte pour toutes les classes de la décomposition \bar{H} la même. Ce fait s'exprime par la formule

$$(8) \quad \text{card}(\bar{E} \cap \mathcal{S}\alpha) = \text{card}(\bar{E} \cap \mathcal{S}\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{G}).$$

Revenons à présent à la correspondance \mathcal{A} définie plus haut et qui fait correspondre à toute classe $\bar{a} \in \bar{E}$ le porteur $q = \mathcal{A}\bar{a}$ de cette équation (q), dont les phases constituent la classe \bar{a} . Désignons

par $(q)_\alpha$ l'ensemble formé par les porteurs $q = \mathcal{A}\bar{a}$ associés aux différents éléments $\bar{a} \in \bar{E}$ faisant partie de la même classe $\mathcal{S}\alpha$ ($\alpha \in \mathcal{G}$). Alors, en particulier, $(q)_t$ est l'ensemble des porteurs dont les phases forment par réunion le sous-groupe \mathcal{S} . La correspondance \mathcal{A} étant biunivoque, on a en vertu de (8)

$$\text{card } (q)_\alpha = \text{card } (q)_t.$$

Cette formule exprime le fait que la puissance de l'ensemble formé par les porteurs dont les phases constituent un élément quelconque $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$ ne dépend point du choix de cet élément et résulte, par conséquent, égale à la puissance de l'ensemble $(q)_t$. Cela se trouve illustré dans la figure suivante :

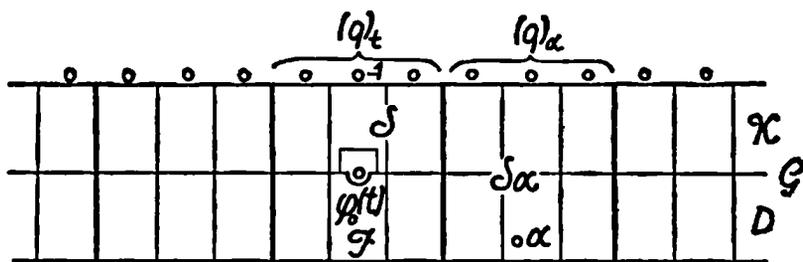


Fig. 7

Or les éléments de l'ensemble $(q)_t$ sont précisément les différents porteurs q , dont les phases sont élémentaires et qui ont, par conséquent, la même dispersion fondamentale $\varphi(t) = t + \pi$. Les éléments de l'ensemble en question étant des fonctions continues, on a $\text{card } (q)_t \leq \aleph$. D'autre part, nous avons trouvé, dans la deuxième conférence, un système de porteurs $q(t|c)$ à un paramètre, c , porteurs dont les intégrales ont leurs zéros consécutifs placés en distances égales, π . Ces porteurs font, naturellement, partie de l'ensemble $(q)_t$. On en conclut : $\text{card } (q)_t \geq \aleph$ et puis : $\text{card } (q)_t = \aleph$.

Nous voilà arrivé à la conclusion que la puissance de l'ensemble des porteurs dont les phases constituent une classe quelconque $\mathcal{S}\alpha$ de la décomposition \bar{H} , $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$, ne dépend point du choix de cette classe et résulte toujours la même et égale à la puissance du continu, \aleph .

Cela étant établi posons-nous la question suivante :

Comment se trouvent-ils caractérisés les porteurs dont les phases sont contenues dans la même classe $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$?

On trouve la réponse à cette question en partant de la relation abélienne (3). Soit $\alpha \in \mathcal{G}$ une phase arbitraire et q resp. φ , le

porteur resp. la ν -ième dispersion centrale correspondante ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). On alors la relation (3) qui peut être mise, évidemment, sous la forme

$$\alpha \varphi_\nu(t) = c_{\nu, \text{sgn}\alpha'} \alpha(t),$$

ou encore

$$(9) \quad \varphi_\nu(t) = \alpha^{-1} c_{\nu, \text{sgn}\alpha'} \alpha(t).$$

Cette formule montre que la phase $\alpha \in \mathcal{G}$ transforme, dans le sens exprimé par la formule en question, tout élément $c_{\nu, \text{sgn}\alpha'} \in \mathcal{L}$ en la dispersion centrale φ_ν .

Remarquons que la formule (9) entraîne

$$\{\varphi_\nu\} = \alpha^{-1} \mathcal{L} \alpha$$

$\{\varphi_\nu\}$ étant le groupe cyclique infini consistant en toutes les dispersions centrales de l'équation (q). Le groupe $\{\varphi_\nu\}$ est, par conséquent, conjugué avec le centre \mathcal{L} par rapport à la phase α qui est, rappelons-le, une phase quelconque de l'équation (q).

Or, revenons à la formule (9). Soit \bar{q} un arbitraire porteur dont les phases sont contenues dans la même classe $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$ et soit $\bar{\alpha}$ resp. $\bar{\varphi}_\nu$ une phase resp. la ν -ième dispersion centrale de \bar{q} . On a alors $\bar{\alpha} = \lambda\alpha$, étant une convenable phase élémentaire et, par conséquent, en vertu de la formule (9)

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\nu(t) &= \bar{\alpha}^{-1} c_{\nu, \text{sgn}\bar{\alpha}'} \bar{\alpha}(t) = \alpha^{-1} (\lambda^{-1} c_{\nu, \text{sgn}\lambda' \text{sgn}\alpha'} \lambda) \alpha(t) \\ &= \alpha^{-1} c_{\nu, \text{sgn}\alpha'} \alpha(t) = \varphi_\nu(t). \end{aligned}$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que les porteurs, dont les phases sont contenues dans la même classe $\mathcal{S}\alpha \in \bar{H}$ ont les mêmes dispersions centrales φ_ν . On démontre aussi facilement que, inversement, pour deux porteurs q, \bar{q} , dont les phases se trouvent dans deux classes différentes de la décomposition \bar{H} , les dispersions centrales $\varphi_\nu, \bar{\varphi}_\nu$ correspondantes sont, elles aussi, différentes.

Rappelons que, en vertu de la formule (1), deux porteurs q, \bar{q} ont les mêmes dispersions centrales φ_ν si et seulement si leurs dispersions fondamentales ($\nu = 1$) sont les mêmes. Nous pouvons par conséquent énoncer la réponse à notre question ci-dessus ainsi :

Les porteurs q dont les phases se trouvent contenues dans la même classe $\mathcal{S}\alpha \in H$ sont caractérisées par la propriété d'avoir la même dispersion fondamentale φ .

Et voici le résultat final ([10]):

La puissance de l'ensemble des équations (q) qui ont la même dispersion fondamentale φ ne dépend point de cette dernière et résulte toujours égale à la puissance du continu, \aleph .

Ajoutons à ce résultat encore la remarque suivante: La coïncidence des dispersions fondamentales $\varphi, \bar{\varphi}$ de deux équations (q), (\bar{q}) signifie, d'après la définition même de la dispersion fondamentale, que les intégrales des équations en question ont les mêmes zéros. Cela veut dire ceci: L'égalité $\varphi = \bar{\varphi}$ entraîne que, d'arbitraires intégrales y resp. \bar{y} de l'équation (q) resp. (\bar{q}) qui ont un zéro en commun coïncident en tous leurs zéros:

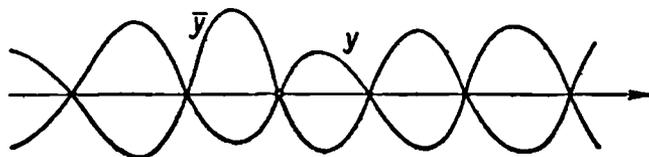


Fig. 8

Le résultat ci-dessus exprime par conséquent le phénomène, qu'il y a pour toute équation (q) \aleph beaucoup d'autres équations (q) dont les intégrales ont les mêmes zéros que celles de l'équation (q). Ce fait suggère l'idée suivante qui aurait, peut-être, d'applications dans les calculs numériques: Pour calculer les zéros d'une intégrale y d'une équation (q) donnée, il n'est point nécessaire de faire le calcul pour l'équation (q) elle-même; au contraire, on peut remplacer l'équation (q) par une autre, (\bar{q}), dont les intégrales ont les mêmes zéros que celles de (q) et qui serait plus commode pour le calcul. Voilà un problème ouvert de l'analyse numérique des équations différentielles.

5. Nous allons maintenant procéder à établir une autre propriété de structure du groupe \mathcal{Q} qui permettra de caractériser les dispersions générales de deux équations (q), (\bar{Q}) par leurs relations aux groupes formés par les intégrales des équations de KUMMER (qq), ($\bar{Q}\bar{Q}$) ([14]).

Le point de départ fournit l'expression canonique des dispersions générales des équations (q), (\bar{Q}), donnée par la formule

$$(10) \quad I(Q, q) = A^{-1} \mathcal{F}\alpha,$$

qui a été établie dans la conférence précédente. Ici le premier membre désigne l'ensemble des dispersions générales des équations

(q), (Q), ou bien, en d'autres termes, l'ensemble formé par les intégrales de l'équation de KUMMER (Qq); α resp. A est une phase quelconque de l'équation (q) resp. (Q), et, naturellement, \mathcal{F} le sous-groupe fondamental de \mathcal{G} .

Or, le second membre a un sens bien déterminé si l'on fait abstraction du fait qu'il s'agit du groupe des phases et qu'on envisage, plus généralement, un groupe abstrait entièrement arbitraire.

Soit alors \mathcal{G} un groupe quelconque et \mathcal{F} un arbitraire sous-groupe en \mathcal{G} . Considérons d'arbitraires éléments $a, A \in \mathcal{G}$ et les sous-groupes conjugués avec \mathcal{F} par rapport à a et A :

$$\mathcal{Y}_a = a^{-1} \mathcal{F} a, \quad \mathcal{Y}_A = A^{-1} \mathcal{F} A.$$

Soit enfin $\mathcal{G}/\mathfrak{g} \mathcal{Y}_a$ resp. $\mathcal{G}/\mathfrak{d} \mathcal{Y}_A$ la décomposition du groupe \mathcal{G} en classes latérales à gauche resp. à droite par rapport à \mathcal{Y}_a resp. \mathcal{Y}_A .

On voit d'abord facilement que l'ensemble $K(A, a) \subset \mathcal{G}$ défini par la formule

$$(11) \quad K(A, a) = A^{-1} \mathcal{F} a$$

se trouve contenu comme élément dans l'une et l'autre décomposition $\mathcal{G}/\mathfrak{g} \mathcal{Y}_a, \mathcal{G}/\mathfrak{d} \mathcal{Y}_A$, de sorte qu'on a

$$K(A, a) \in \mathcal{G}/\mathfrak{g} \mathcal{Y}_a \cap \mathcal{G}/\mathfrak{d} \mathcal{Y}_A.$$

Cela résulte immédiatement des formules

$$K(A, a) = (A^{-1} a) \mathcal{Y}_a = \mathcal{Y}_A (A^{-1} a).$$

Il se pose alors la question suivante: L'ensemble $K(A, a)$ est-il l'élément unique commun aux deux décompositions en question ou bien en existe-t-il d'autres?

Or, subsiste à ce sujet le théorème que nous allons énoncer sans en donner la démonstration et que voici ([14]):

L'ensemble $K(A, a)$ est l'élément unique commun aux deux décompositions $\mathcal{G}/\mathfrak{g} \mathcal{Y}_a, \mathcal{G}/\mathfrak{d} \mathcal{Y}_A$ alors et alors seulement, si le normalisateur du sous-groupe \mathcal{F} en \mathcal{G} , \mathcal{N} , se confond avec \mathcal{F} : $\mathcal{N} = \mathcal{F}$.

Rappelons qu'on entend sous normalisateur \mathcal{N} le plus grand sous-groupe en \mathcal{G} qui consiste en éléments $x \in \mathcal{G}$ transformant le sous-groupe \mathcal{F} dans lui-même: $x^{-1} \mathcal{F} x = \mathcal{F}$.

Une conséquence immédiate de ce théorème et qui est importante en vue de nos raisonnements ultérieurs est la suivante: Soit

$\mathcal{N} = \mathcal{F}$. Dans ce cas, un élément $x \in \mathcal{G}$ est contenu dans l'ensemble $K(A, a)$ précisément alors, s'il transforme le groupe \mathcal{Y}_A dans \mathcal{Y}_a d'après la formule

$$x^{-1} \mathcal{Y}_A x = \mathcal{Y}_a.$$

Voilà une caractérisation des éléments de $K(A, a)$ par leurs relations aux groupes $\mathcal{Y}_a, \mathcal{Y}_A$.

Cela étant établi, revenons au groupe des phases et examinons la situation dont nous venons de parler, dans le cas du sous-groupe fondamental.

Nous allons montrer que, dans le groupe des phases, \mathcal{G} , le normalisateur du groupe fondamental \mathcal{F} en \mathcal{G} , \mathcal{N} , se confond avec \mathcal{F} : $\mathcal{N} = \mathcal{F}$.

Soit, en effet, $\alpha \in \mathcal{N}$ un arbitraire élément du normalisateur \mathcal{N} . Il existe alors pour tout élément $\varepsilon \in \mathcal{F}$ un convenable élément $\bar{\varepsilon} \in \mathcal{F}$ vérifiant la relation $\alpha\varepsilon = \bar{\varepsilon}\alpha$. Cette relation entraîne l'égalité des porteurs correspondants $q_{\alpha\varepsilon}, q_{\bar{\varepsilon}\alpha}$: $q_{\alpha\varepsilon} = q_{\bar{\varepsilon}\alpha}$. Or, on a, en se servant des symboles dont la signification est évidente:

$$q_{\alpha\varepsilon} = [1 + q_\alpha(\varepsilon)] \varepsilon'^2 + q_\alpha, \quad q_{\bar{\varepsilon}\alpha} = [1 + q_{\bar{\varepsilon}}(\alpha)] \alpha'^2 + q_\alpha.$$

D'autre part, subsistent, manifestement, les identités $q_\varepsilon = q_{\bar{\varepsilon}} = -1$ et elles conduisent, en vertu des relations précédentes, à la formule

$$(12) \quad [1 + q_\alpha(\varepsilon)] \varepsilon'^2 = 1 + q_\alpha.$$

Cela étant, soit $t_0 \in j$ un nombre quelconque choisi une fois pour tout. Nous savons que, étant donnés des nombres arbitraires, $x, x' (\neq 0)$, existe de phases $\varepsilon \in \mathcal{F}$ admettant pour $t = t_0$ les valeurs initiales $\varepsilon(t_0) = x, \varepsilon'(t_0) = x'$. Appliquons la formule (12), en premier lieu, pour $t_0, \varepsilon(t_0) = x, \varepsilon'(t_0) = 1$ et puis pour $t_0, \varepsilon(t_0) = 0, \varepsilon'(t_0) = 2$. Nous obtenons d'abord $q_\alpha(x) = q_\alpha(t_0)$, ce qui montre que la fonction q_α garde une valeur constante ($= q_\alpha(t_0)$), et puis la relation $q_\alpha(t) = -1$. Cette relation entraîne $\alpha \in \mathcal{F}$ et cela achève la démonstration.

Nous voilà arrivés à une nouvelle propriété de structure du groupe des phases \mathcal{G} , propriété consistant en ceci, que le normalisateur en \mathcal{G} du sous-groupe fondamental \mathcal{F} se confond avec ce sous-groupe \mathcal{F} . Se trouve par conséquent ouverte la voie pour appliquer le théorème général énoncé plus haut. Dans ce but, considérons deux équations (q), (Q) quelconques et choisissons d'arbi-

traies phases α, A de ces équations. Le sous-ensemble de $\mathcal{G}, K(A, a)$, défini à l'aide des phases α, A et du sous-groupe fondamental \mathcal{F} par une formule telle que (11), coïncide d'après (10) avec l'ensemble $I(Q, q)$ des dispersions générales des équations (q), (Q). Les sous-groupes $\mathcal{Y}_A, \mathcal{Y}_a$, à leur tour, se confondent avec les ensembles formés par les intégrales de la première resp. seconde équation associée à l'équation de KUMMER (Qq), c'est-à-dire, de l'équation (QQ) resp. (qq). Le résultat obtenu plus haut entraîne, par conséquent, le théorème suivant ([1], [14]):

Une fonction-phase, ξ , est une dispersion générale des équations (q), (Q) si et seulement si elle transforme le groupe $I(Q, Q)$ consistant en intégrales de la première équation associée à (Qq), l'équation (QQ), dans le groupe $I(q, q)$ formé par les intégrales de la seconde équation associée à (Qq), (qq):

$$(13) \quad \xi^{-1} I(Q, Q) \xi = I(q, q).$$

Ce théorème exprime la caractérisation cherchée des dispersions générales des équations (q), (Q) par leurs relations aux groupes $I(Q, Q), I(q, q)$.

Ajoutons la remarque suivante: La formule (13) entraîne, évidemment,

$$(\xi^{-1})^{-1} I(q, q) \xi^{-1} = I(Q, Q).$$

On en tire la conclusion que, la fonction inverse ξ^{-1} d'une intégrale ξ de l'équation de KUMMER (Qq) est une intégrale de l'équation (qQ). Voilà un résultat qui a été déjà indiqué dans la conférence précédente, résultat, qui découle de la construction même des dispersions générales que nous avons donnée.

6. C'est par cette remarque dont je viens de parler, que je suis arrivé à la fin de mes conférences, dans lesquelles j'ai essayé de donner un aperçu de l'état actuel de la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans le domaine réel. Qu'il me soit permis de dire encore quelques mots au sujet de l'écho que la théorie en question a trouvé dans les travaux d'autres mathématiciens et surtout dans ceux de mes collaborateurs, et, ensuite, d'indiquer quelques problèmes ouverts qui montrent, peut-être la voie de futur développement de la dite théorie.

Dans plusieurs dizaines de travaux, la théorie dont j'ai parlée a été complétée, enrichie, appliquée ou élargie par des résultats plus ou moins particuliers concernant la théorie en question. On s'est occupé de diverses propriétés des phases et surtout de deuxièmes phases, de plus, des dispersions centrales, dont les propriétés ont été utilisées en diverses questions, par exemple en problèmes des limites, et dont la notion a été élargie pour être applicable à certaines équations différentielles d'ordres supérieurs. On a encore fait usage de la théorie en question pour déduire de nouveaux critères d'oscillation pour les intégrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre et aussi pour trouver de très générales formules asymptotiques pour le comportement des intégrales en question, etc. ⁽³⁾.

Quant aux problèmes ouverts, qui semblent de longue portée, il se pose d'abord la question de l'analyse numérique de la théorie considérée qui est purement qualitative. Il s'agit surtout des méthodes rapides pour le calcul numérique des phases, dont l'importance dans la théorie considérée est primordiale. Un autre problème consiste en ceci, qu'on peut essayer d'élargir le groupe des phases par des fonctions appartenant à la classe C_1 , afin de réunir dans un ensemble les premières et en même temps les deuxièmes phases des équations différentielles considérées. On aurait à étudier la structure de cet ensemble en relation avec les transformations considérées. Finalement, se pose le problème d'élargir la théorie considérée dans le domaine complexe, et, naturellement, d'axiomatiser les théories obtenues.

En terminant, je me permets de remarquer qu'une monographie écrite en allemand et dont je suis l'auteur, contenant un exposé systématique de la théorie étudiée dans ces conférences, se trouve sous presse et va paraître dans quelques mois. La monographie en question paraîtra sous le titre « Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung » chez le Deutscher Verlag der Wissenschaften à Berlin ([15]).

C'est avec cette remarque que je termine mes conférences.

⁽³⁾ V. la bibliographie indiquée dans [15].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BARVÍNEK: *Über die Vertauschbarkeit der Dispersionen und Lösungen der Differentialgleichung $\sqrt{|X'|}(\sqrt{|X'|})'' + q(X)X'^2 = Q(t)$* , Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, No 393 (1958), 141-155. (En russe. Résumé en allemand).
- [2] O. BORŮVKA: *Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du second ordre*, Czeck. Math. J. 3 (78) (1953), 199-255. (En russe. Résumé en français).
- [3] O. BORŮVKA: *Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre*, Ann. Mat. Pura Appl. 41 (1956), 325-342.
- [4] O. BORŮVKA: *Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre*, Bull. Math. Soc. Math. Phys. R. P. Roumaine 1 (49), (1957), 125-130.
- [5] O. BORŮVKA: *Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre*, Ann. Mat. Pura Appl. 49 (1960), 229-251.
- [6] O. BORŮVKA: *Sur la structure de l'ensemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre*, Ann. Mat. Pura Appl. 58 (1962), 317-334.
- [7] O. BORŮVKA: *Transformations des équations du deuxième ordre*, Séminaire Dubreil-Pisot 22 (1961), 1-18.
- [8] O. BORŮVKA: *Über einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung*, Hef 13 der Schriftenreihe des Inst. f. Math. Bericht von der Dirichlet-Tagung. Berlin 1963, 51-57.
- [9] O. BORŮVKA: *Transformation of ordinary second-order linear differential equations*. Differential Equations and Their Applications. Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962. Prague 1964, 27-38.
- [10] O. BORŮVKA: *Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale*, But. Inst. Polit. din Iasi, (9) 13 (1963), 11-20.
- [11] O. BORŮVKA: *Sur quelques applications des dispersions centrales dans la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*, Arch. Math. (Brno), 1 (1965), 1-20.
- [12] O. BORŮVKA: *Sur une application géométrique des dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*, Ann. Mat. Pura Appl. 71 (1966), 165-187.
- [13] O. BORŮVKA: *Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*, An. St. Univ. « Al. I. Cuza », Iasi, XI_B (1965), 217-238.

- [14] O. BORŮVKA: *Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung*, Math. Nachr., 1967 (sous presse).
- [15] O. BORŮVKA: *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967 (sous presse).
- [16] J. CHRASTINA: *On coincidence of basic central dispersions of 3rd and 4th orders of the differential equation $\ddot{y}(t) + Q(t)y(t) = 0$* , Čas. pěst. mat. 87 (1962), 188-197. (En tchèque. Résumé en anglais).
- [17] N. LAITICH: *Die Identität der Zentraldispersionen erster und zweiter Art, die zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + Q(x)y = 0$ gehören*, Czech. Math. J. 6 (81) (1956), 365-380. (En russe- Résumé en allemand).
- [18] F. NEUMAN: *Sur les équation différentielles linéaires oscillatoires du deuxième ordre avec la dispersion fondamentale $\varphi(t) = t + \pi$* , Bul. Inst. Polit. din Iasi, (10) 14 (1964), 37-42.

[Entrato in Redazione il 27 aprile 1967]