Otakar Borůvka

Décompositions dans les ensembles et théorie des grupoides

Séminaire Dubreil-Pisot. Algèbre et Théorie des nombres, tome 14, no. 2, 1960-61, exp. no. 22 bis, 19-35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500094

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 22 bis

8 mai 1961

DÉCOMPOSITIONS DANS LES ENSEMBLES ET THÉORIE DES GROUPOÏDES

par Otukar BORŮVKA

1. - Je me suis permis de choisir comme sujet de cette conférence un aperçu d'une théorie des décompositions dans les ensembles et de ses applications dans l'algèbre. J'ai pensé que ce thème, qui est, on le sait bien, en rel tions étroites avec la théorie des relations d'équivalence, pourrait avoir un intérêt pour les mathématiciens parisiens. Outre ces relations, on rencontrera dans mon exposé des notions et des résultats qu'il serait bien difficile d'éliminer d'un aperçu assez complet, tel que j'ai en vue.

Rappelons, dès le commencement, que la notion de décomposition dans un ensemble ne fait intervenir que les éléments les plus primitifs de la théorie des ensembles : la notion de sous-ensemble et celle d'ensembles disjoints. Étant donné un ensemble non vide, G , on appelle décomposition dans l'ensemble G tout système non vide formé de parties non vides de l'ensemble G , disjointes deux à deux. Si, en particulier, un tel système recouvre l'ensemble G , ou bien en d'autres termes, si l'ensemble G représente la somme de différents éléments de la décomposition, on parle d'une décomposition de l'ensemble G ou bien sur l'ensemble G .

Donnons tout de suite, à cette occasion, la définition d'une autre notion importante qui va jouer un rôle fondamental dans nos considérations : on appelle groupoïde un ensemble non vide, G , dans lequel on a défini une operation binaire, appelée par exemple multiplication, qui est univoque et universelle. Aucune propriété supplémentaire de la multiplication n'est, en général, exigée. Dans nos considérations nous laisserons de côté des figures plus générales, appelées, dans le langage de M. BRUCK, demi-groupoïdes, pour lesquelles la multiplication n'est pas nécessairement universelle. Par conséquent resteront aussi en dehors de nos considérations les groupoïdes de Brandt, qui en sont un cas particulier.

2. - Un phénomène bien connu des algébristes consiste en ce que les notions fondamentales de la théorie des groupes sont en connexion étroite avec la notion de décomposition dont nous venons de parler. Ainsi, par exemple, toute représentation et, en particulier, toute représentation homomorphe d'un groupoïde ou bien d'un groupe détermine univoquement une décomposition du groupoïde en question, à savoir la décomposition associée à cette représentation ; les sous-groupes

conduisent à des décompositions en classes latérales ; la notion de points conjugués dans un groupe donne naissance à la décomposition du groupe en classes de points conjugués, etc. On sait de plus que les relations définies entre les notions fondamentales de la théorie des groupes se manifestent par certaines liaisons entre les décompositions correspondantes. Par exemple, les compositions de représentations conduisent à des recouvrements des décompositions correspondantes, des sous-groupes plus petits déterminent des décompositions (en classes latérales) plus fines, des sous-groupes permutables engendrent des décompositions complémentaires, etc. Il paraît bien naturel par conséquent, que les théorèmes algébriques de la théorie des groupes possèdent des composantes portant sur des figures formées d'ensembles en relation avec la notion de décomposition. Pourtant ces figures d'origine algebrique ne sont pas entièrement arbitraires mais possèdent, au contraire, généralement des propriétés bien particulières. Ceci tient, manifestement, au fait qu'il s'agit de décompositions, pour ainsi dire, algébrisées, c'est-à-dire de décompositions liées d'une certaine façon à la multiplication, cette dernière étant, en outre, fort specialisée par les axiomes du groupe.

Ces considérations conduisent à concevoir l'importance d'une théorie des décompositions dans les ensembles, théorie qui contiendrait d'une façon systématique les situations d'origine algébrique dont nous venons de parler. On peut espérer, en effet, qu'une telle theorie fournira une base convenable pour développer, à l'aide de procédés d'algébrisation, une théorie générale des groupoïdes, assez riche en matières et résultats et s'approchant, dans les grandes lignes, de la théorie générale des groupes. On peut espérer en même temps que l'examen attentif de situations liées à la notion de décomposition dans un ensemble pourra conduire, au sujet des groupes, à des vues nouvelles faisant apparaître des résultats classiques dans une lumière inattendue et permettant d'approfondir nos connaissances respectives en différentes directions.

3. - Il est bien connu que la théorie des décompositions dans les ensembles se trouve en connexion très étroite avec la théorie des relations d'équivalences, fondée par P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN (1937) et O. ORE (1942), théorie qui s'est, depuis, très rapidement développée en raison de son importance fondamentale dans beaucoup de branches de la science. D'après une observation faite récemment par le mathématicien roumain Michail BENADO, la théorie des décompositions dans les ensembles représente la théorie analytique des relations d'équivalences, tandis que celle due à P. DUBREIL, M.-L. DUBREIL-JACOTIN et O. ORE en

représente la théorie synthétique. La theorie analytique en question est caractérisée par le fait que les éléments ou points de l'ensemble fondamental y jouent un rôle primordial, tandis que, dans la théorie synthétique, ce sont les relations d'équivalence elles-mêmes qui jouent le rôle primordial alors que les éléments de l'ensemble sous-jacent ne jouent qu'un rôle secondaire et que les méthodes algébriques de la théorie des treillis font mieux sentir leur puissance en tant que telles.

La théorie des décompositions dans les ensembles envisage des situations liées à la notion de décomposition, en utilisant des notions et methodes empruntées à la theorie des ensembles et à celle des treillis. Les liens avec la théorie des treillis apparaissent parce que le système formé de toutes les décompositions d'un ensemble G admet une loi d'ordination partielle qui en fait un treillis complet : rappelons que la relation $\overline{A} \geqslant \overline{B}$ signifie que la décomposition $\overline{B}$ est plus fine que $\overline{A}$ ou bien, en d'autres termes, que, pour chaque élément $\overline{a} \in \overline{A}$, il y a des $\overline{b} \in \overline{B}$ satisfaisant à la relation $\overline{a} = \bigcup \overline{b}$, $\bigcup$ étant la somme au sens de la théorie des ensembles. Si la relation $\overline{A} \geqslant \overline{B}$ est remplie, on appelle la décomposition $\overline{A}$ un <u>recouvrement</u> de $\overline{B}$ et la décomposition $\overline{B}$ un <u>raffinement</u> de $\overline{A}$. On voit que deux décompositions quelconques de l'ensemble G, $\overline{A}$, $\overline{B}$, possèdent une borne superieure précise et de même une borne inférieure précise au sens de la théorie des treillis. Dans la théorie en question, ces bornes sont appelees <u>le plus petit commun recouvrement</u> et <u>le plus grand commun raffinement</u> des decompositions $\overline{A}$, $\overline{B}$; on applique, pour les designer, des symboles tels que $[\overline{A}, \overline{B}]$, $(\overline{A}, \overline{B})$. Inutile de remarquer que tout système non vide formé de decompositions de l'ensemble G admet un plus petit commun recouvrement et un plus grand commun raffinement.

Après ces définitions, la théorie des decompositions dans les ensembles se trouve subordonnee, dans une certaine mesure, à la théorie générale des treillis. Cependant, il ne serait pas juste de penser que la théorie des treillis peut fournir toutes les propriétés des treillis formés de décompositions d'un ensemble. En effet, à côté des relations existant entre les décompositions envisagées comme éléments d'un treillis, relations de caractère global, il y a des relations entre des éléments de differentes decompositions, c'est-à-dire des relations locales. Précisément, pour analyser ces dernières, on a besoin de notions et de méthodes qui n'interviennent pas dans la théorie des treillis.

4. - Qu'il me soit permis d'élucider la distinction entre relations globales et locales par la definition de deux notions tres importantes, celles de <u>décompositions modulaires</u> et <u>de decompositions complémentaires</u>.

Étant données des décompositions de l'ensemble G, $\overline{X} \geq \overline{A}$ et $\overline{B}$, on dit que la décomposition $\overline{B}$ est <u>modulaire</u> par rapport aux décompositions $\overline{X}, \overline{A}$, si la relation correspondante de modularité, au sens de la théorie des treillis, est satisfaite c'est-à-dire, si l'on a la formule

$$(1) \qquad (\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) = [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})], \qquad (\overline{X} \geq \overline{A})$$

On voit bien que cette notion de modularité est de caractère global, car elle ne fait pas intervenir explicitement de relations entre les différents éléments des décompositions données.

Considérons, en second lieu, deux décompositions quelconques de l'ensemble G, $\overline{A}, \overline{B}$. On a alors, pour tout élément $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$, les relations $\overline{u} = \cup \overline{a} = \cup \overline{b}$, les $\overline{a}$ étant des élements convenables de $\overline{A}$ et les $\overline{b}$ des éléments convenables de $\overline{B}$: $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$. On appelle les décompositions $\overline{A}, \overline{B}$ (mutuellement) <u>complementaires</u>, si pour tout élément $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$, deux élements quelconques $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$, qui sont contenus dans l'élement $\overline{u}$, sont incidents, c'est-à-dire possèdent des points communs.

On voit que cette notion de complémentarité est de caractere local, car elle fait intervenir explicitement des relations entre différents eléments des décompositions considérées. On remarque bien que la notion en question correspond à la notion de relations d'équivalence associables due à P. DUBREIL, relations que O. ORE appelle "commuting".

Il paraît utile, en vue de nos considérations ulterieures, de rappeler le théorème suivant qui exprime une importante relation existant entre décompositions modulaires et complémentaires :

<u>si les décompositions</u> $\overline{A}, \overline{B}$ <u>d'un ensemble</u> G <u>sont complémentaires, alors chacune d'entre elles, par exemple</u> $\overline{B}$, <u>est modulaire par rapport aux décompositions</u> $\overline{X}, \overline{A}$, $\overline{X}$ <u>étant un recouvrement arbitraire de</u> $\overline{A}$: $\overline{X} \geq \overline{A}$; par conséquent, on a alors, une formule telle que (1). La réciproque de cette proposition n'est pas vraie ; on peut, en effet, indiquer des décompositions d'un ensemble G, $\overline{A}, \overline{B}$, qui satisfont pour tout recouvrement $\overline{X}$ de $\overline{A}$ à la formule (1) et qui pourtant ne sont pas complémentaires.

L'importance des décompositions complémentaires provient du fait que ces décompositions sont liees à des notions importantes de la théorie des groupes et que, même en dehors de cette théorie elles jouent un rôle remarquable. Rappelons à cette occasion le théorème de P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-groupes d'un groupe soient permutables consiste en la complémentarité des decompositions correspondantes en classes laterales à gauche (ou à droite). Ce théorème permet de trouver de nombreux resultats sur la permutabilité des sous-groupes à partir de propriétés des décompositions complementaires. Rappelons encore, en restant toujours dans le domaine de la theorie des groupes la proposition suivante :

Pour deux sous-groupes quelconques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ d'un groupe $\mathfrak{G}$, les décompositions correspondantes en classes laterales $\mathfrak{G}|_d \mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}|_g \mathfrak{B}$, dont une consiste en classes à droite et l'autre en classes à gauche, sont complementaires. Voici une autre proposition :

Tout groupe-facteur d'un groupe quelconque, $\mathfrak{G}$, est complémentaire à la décomposition de $\mathfrak{G}$ en classes de points conjugués. Hors de la théorie des groupes on rencontre la notion de complémentarité à propos des transformations de décompositions : par une application d'un ensemble G sur un ensemble G^*, une décomposition $\overline{A}$ de l'ensemble G n'est pas en général transformee en une decomposition de l'ensemble G^*, son image étant un système de parties de G^* qui ne sont nécessairement pas disjointes deux à deux. Or, un critérium simple et élégant pour que dans l'application φ de G sur G^* l'image par φ de la décomposition $\overline{A}$ sur G^* soit une décomposition de G^* est le suivant :

Il faut, notamment, et il suffit pour cela que la decomposition $\overline{A}$ soit complémentaire à la décomposition $\overline{F}$ de G associée à l'application φ.

5. - Nous nous contentons pour le moment de ce bref aperçu des fondements de la theorie des decompositions dans un ensemble en nous proposant de revenir plus tard à la théorie des séries de décompositions, théorie qui exige des notions plus compliquées. A present, nous allons voir comment la théorie des décompositions dans un ensemble peut servir à la construction et au développement de la théorie des groupoïdes. Revenons, dans ce but, à la remarque faite ci-dessus qu'on peut espérer développer une theorie des groupoïdes, en partant des décompositions, à l'aide de procédés convenables d'algebrisation. On choisit ces procédés de façon à distinguer, dans les groupoïdes, certaines decompositions liées à la multiplication, surtout les décompositions associées aux applications homomorphes. Dans

cet ordre d'idées, la notion fondamentale est celle de <u>décomposition génératrice</u>: Une décomposition $\bar{A}$ <u>dans</u> un groupoïde $\mathfrak{G}$ s'appelle <u>génératrice</u> s'il existe pour deux éléments quelconques $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ un élement $\bar{c} \in \bar{A}$ qui contient le produit $\overline{ab}$ de l'élément $\bar{a}$ par l'élement $\bar{b}$: $\overline{ab} \subset \bar{c}$. A toute décomposition génératrice $\bar{A}$ se trouve associé, d'une manière univoque, un groupoïde, $\bar{\mathfrak{A}}$, appelé <u>factoroïde</u>, dont les eléments sont ceux de la decomposition $\bar{A}$ et la multiplication est définie par la formule $\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c}$, $\bar{c} \in \bar{A}$ étant caractérisé par l'inclusion $\overline{ab} \subset \bar{c}$. On voit bien que les factoroïdes situés sur le groupoïde $\mathfrak{G}$ coïncident avec les groupoïdes-quotients associés aux equivalences régulières. Cependant, il est digne de remarque que la notion de factoroïde n'exige point que le factoroïde recouvre le groupoïde correspondant. On voit bien que les factoroïdes représentent une généralisation des groupes-facteurs. Rappelons le fait bien connu que, sur les groupes, les factoroïdes sont les groupes-facteurs, et eux seulement. Ce théorème permet de deduire de nombreux résultats au sujet des sous-groupes invariants en partant de propriétés des décompositions génératrices.

En revenant à la notion de decomposition génératrice nous remarquons que le plus petit commun recouvrement et le plus grand commun raffinement de deux décompositions génératrices représentent encore des décompositions génératrices. Il en resulte qu'il existe, pour deux factoroïdes quelconques $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ d'un groupoïde $\mathfrak{G}$, deux factoroïdes $[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]$, $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ qui sont le plus petit commun recouvrement et le plus grand commun raffinement des factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$. On sait que, si $\mathfrak{G}$ est un groupe et si les factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ sont les groupes-facteurs $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, on a les formules

$$[\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}] = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \qquad (\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{G}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \quad .$$

Avec la notion de factoroïde nous sommes en possession d'un nouvel élement important qui est à la base de la théorie des groupoïdes. Nous avons maintenant à notre disposition, pour développer cette théorie, les notions de sous-groupoïdes, factoroïdes, recouvrements et raffinements de factoroïdes ainsi que la notion d'homomorphisme. Ces notions paraissent assez efficaces pour qu'on arrive, grâce à elles, à une theorie riche en matières et en methodes, theorie qui représente une vaste généralisation de la theorie génerale des groupes, c'est-à-dire une géneralisation de ces parties de la théorie des groupes qui sont basées sur les seules notions de sous-groupes, de groupes-facteurs et d'homomorphismes. On trouve dans la theorie des groupoïdes les théoremes d'isomorphisme, la théori·

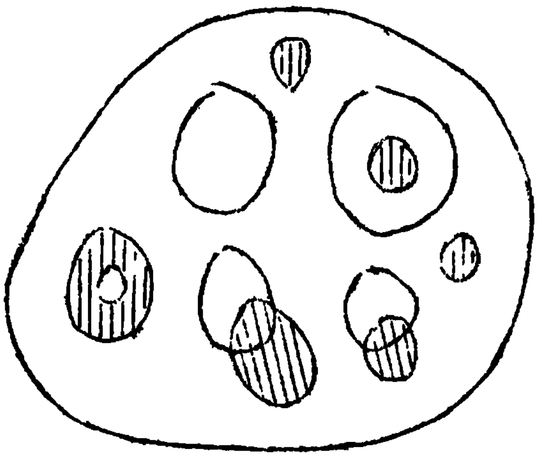
des séries et des chaînes de factoroïdes, des transformations de factoroïdes, etc. D'autres parties de cette théorie des groupoïdes, par exemple les produits directs, les groupoïdes à opérateurs, etc., n'ont pas encore trouvé leurs maîtres, et je pense qu'on peut espérer, à l'avenir, de nouveaux progrès, dans cette branche de l'algèbre. On trouve quelquefois dans la théorie des groupoïdes des theories qui surpassent leurs analogues dans le domaine des groupes. Ceci tient, naturellement, au fait qu'il y a, dans la théorie des groupoïdes, des situations mutuellement distinctes, dont les analogues, dans le cas des groupes, coïncident en raison des propriétés particulières de la multiplication, fortement spécialisée par les axiomes des groupes. A mon avis, on peut regarder comme bien remarquable le résultat qu'une loi de composition tout à fait arbitraire, ne possèdant aucune espèce de propriétés particulières, permet de développer une théorie qui s'approche, dans de larges limites, de la théorie des groupes, tout en exprimant, en substance, les phénomènes de cette dernière, et n'en déviant que par des détails plutôt formels.

6. - Pour faire mieux comprendre le profit qu'on peut tirer en algèbre de la théorie des décompositions dans un ensemble, indiquons, à présent, deux exemples très simples qui conduisent, quand même, à des resultats précieux.

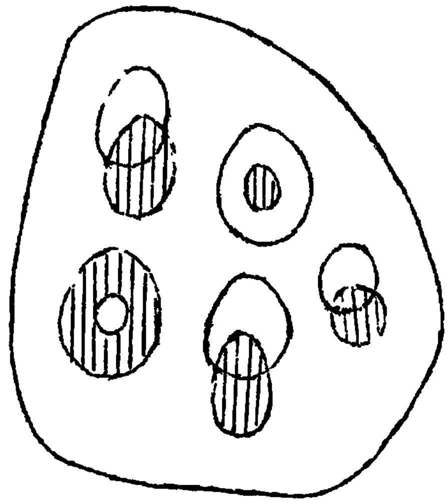
Commençons par indiquer, au sujet des décompositions dans un ensemble, trois notions élémentaires et intuitives, à savoir celles de décompositions demi-reliées, reliées et fermement reliées.

On appelle deux décompositions dans un ensemble G <u>demi-reliées</u> si tout élément de chacune d'entre elles est incident avec un élément au plus de l'autre, et que l'incidence a effectivement lieu au moins pour un couple d'éléments. On appelle deux décompositions dans G <u>reliées</u> si tout élément de chaque décomposition est incident précisément avec un élément de l'autre. Enfin, on les appelle <u>fermement reliées</u> si tout élément de chaque décomposition est incident avec au moins un élément de l'autre.

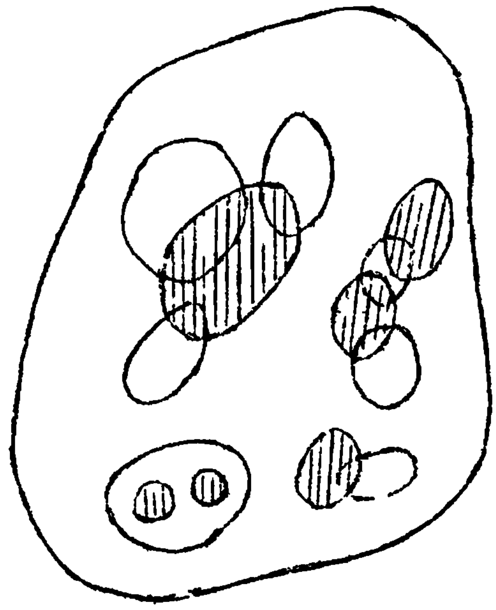
On peut représenter, dans le cas des décompositions finies, les notions en question par les figures simples suivantes :



D. demi-reliées



D. reliées



D. fermement reliées

Ceci étant, passons aux deux exemples en question.

Premier exemple. - Considérons, dans l'ensemble G, deux décompositions reliées, $\bar{A}$, $\bar{B}$. Il est évident que ces decompositions sont équivalentes au sens de la théorie des ensembles, une équivalence étant donnée par l'incidence de leurs éléments. On a, par conséquent, le résultat suivant : deux décompositions reliées sont toujours équivalentes, une equivalence de l'une à l'autre étant donnée par l'incidence d'élements. Ceci est précisément le deuxième théorème d'équivalence pour les décompositions.

Passons maintenant aux groupoïdes. Considérons, dans un groupoïde $\mathfrak{G}$, deux décompositions génératrices r e liées, $\bar{A}$, $\bar{B}$. Il leur correspond deux factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, qui sont, d'après le résultat ci-dessus, equivalents. Or, on démontre aisément que, dans ce cas, l'équivalenc donnee par l'incidence d'éléments constitue un isomorphisme. On a par consequent le résultat : deux factoroïdes reliés sont toujours isomorphes, un isomorphisme de l'un sur l'autre étant donné par l'incidence d'éléments. Ceci est le deuxième théorème d'isomorphisme pour les groupoïdes.

Passons, finalement, aux groupes. Considerons, dans un groupe $\mathfrak{G}$, deux groupes-facteurs $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$: les $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ designent, par conséquent, des sous-groupes dans $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{a}$ un sous-groupe invariant dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ un sous-groupe invariant dans $\mathfrak{B}$. On démontre que la condition necessaire et suffisante pour que les groupes-facteurs en question soient reliés s'exprime par les formules

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{a}$$

(2)

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{B} = (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A})\,\mathfrak{b} \qquad .$$

On arrive ainsi au résultat : les groupes-facteurs $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$, déterminés par des sous-groupes qui vérifient les formules (2), sont isomorphes, un isomorphisme de l'un sur l'autre étant donné par l'incidence d'éléments. Ceci représente une légère généralisation du deuxième théorème d'isomorphisme pour les groupes. On obtient, en effet, le théoreme classique, en prenant dans le groupe $\mathfrak{G}$ deux sous-groupes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ invariant dans $\mathfrak{G}$, et en appliquant notre résultat aux groupes

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}\mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{a}' = \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}, \qquad \mathfrak{b}' = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \qquad ;$$

on a alors la formule classique :

$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) \qquad .$$

Deuxième exemple. - Considérons, dans l'ensemble G , deux décompositions fermement reliées $\overline{A}$, $\overline{B}$. Soit A la somme des éléments $\overline{a} \in \overline{A}$, B celle des éléments $\overline{b} \in \overline{B}$: $A = \bigcup \overline{a}$, $B = \bigcup \overline{b}$, et soit $S = A \cap B$. Comme les $\overline{A}$, $\overline{B}$ sont fermement reliées, tout element $\overline{a} \in \overline{A}$, de même tout elément $\overline{b} \in \overline{B}$, est incident avec l'ensemble S . On a par conséquent, sur cet ensemble S , deux décompositions $\overline{A}'$, $\overline{B}'$, dont $\overline{A}'$ consiste en intersections de différents éléments $\overline{a} \in \overline{A}$ avec l'ensemble S , de même que $\overline{B}'$ consiste en intersections de différents éléments $\overline{b} \in \overline{B}$ avec S . Ceci étant, choisissons un recouvrement commun quelconque, $\overline{C}$, des deux décompositions $\overline{A}'$, $\overline{B}'$. Nous avons, par conséquent $\overline{C} \geq [\overline{A}', \overline{B}'$ tout élément $\overline{c} \in \overline{C}$ étant la somme de certains éléments $\overline{a}' \in \overline{A}'$ et en même temps celle de certains elements $\overline{b}' \in \overline{B}'$. Soit alors, pour chaque elément $\overline{c} \in \overline{C}$, $\mathring{a}$ la somme de tous les éléments $\overline{a} \in \overline{A}$ incidents avec $\overline{c}$ et, de même, $\mathring{b}$ la somme de tous les éléments $\overline{b} \in \overline{B}$ qui sont incidents avec $\overline{c}$. L'ensemble formé de différents éléments $\mathring{a}$ represente un recouvrement de la décomposition $\overline{A}$, recouvrement $\mathring{A}$, qui est dit engendré par la décomposition $\overline{C}$, de même que l'ensemble formé de différents éléments $\mathring{b}$ représente le recouvrement $\mathring{B}$ de la décomposition $\overline{B}$, engendre, lui aussi, par $\overline{C}$. On voit, d'après la construction même des recouvrements $\mathring{A}$, $\mathring{B}$, que ces derniers représentent des décompositions reliées, et par conséquent équivalentes, une application biunivoque de chacune de ces décompositions sur l'autre étant donnée par l'incidence d'éléments. On voit aussi que les decompositions $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$, $\overset{\circ}{\mathrm{B}}$ ont pour leur intersection précisément la décomposition $\bar{C}$.

Appelons $\bar{A}'$, $\bar{B}'$ les décompositions intersections de l'ensemble S par les décompositions $\bar{A}$, $\bar{B}$, et désignons-les par $(\bar{A}' =)\ S \cap \bar{A}$, $(\bar{B}' =)\ S \cap \bar{B}$. Nous pouvons alors resumer nos resultats de la façon suivante :

Étant données deux décompositions, $\bar{A}$, $\bar{B}$, dans l'ensemble G, fermement reliées, situées sur les sous-ensembles $A, B \subset G$, l'intersection de ces derniers étant $S\ (= A \cap B)$, alors tout recouvrement commun, $\bar{C}$, des deux décompositions $S \cap \bar{A}$, $S \cap \bar{B}$ engendre des recouvrements bien déterminés de $\bar{A}$, $\bar{B}$, recouvrements $\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{B}$, qui sont reliés et par conséquent équivalents, et dont l'intersection est précisément $\bar{C}$.

Passons maintenant aux groupoïdes. Considérons, dans un groupoïde $\mathfrak{G}$, deux factoroïdes fermement reliés, $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$. Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ les sous-groupoïdes sur lesquels se trouvent situés les factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ et soit $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ leur intersection. On a alors, sur ce sous-groupoïde $\mathfrak{S}$ les deux factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{S} \cap \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}' = \mathfrak{S} \cap \bar{\mathfrak{B}}$, intersections du sous-groupoïde $\mathfrak{S}$ par les factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$. Choisissons alors un factoroïde, $\bar{\mathfrak{C}}$, représentant un recouvrement commun quelconque des deux factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}'$, $\bar{\mathfrak{B}}'$. Nous avons par conséquent $\bar{\mathfrak{C}} \geq [\bar{\mathfrak{A}}', \bar{\mathfrak{B}}']$. Ce factoroïde $\bar{\mathfrak{C}}$ engendre des recouvrements bien déterminés des factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, recouvrements $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}$ qui sont des factoroïdes reliés, et par conséquent isomorphes, et dont l'intersection est précisément $\bar{\mathfrak{C}}$. On peut donc résumer :

Étant donnés deux factoroïdes $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ dans le groupoïde $\mathfrak{G}$, fermement reliés et situés sur les sous-groupoïdes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$, l'intersection de ces derniers étant le sous-groupoïde $\mathfrak{S}\ (= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, alors tout recouvrement commun, $\bar{\mathfrak{C}}$, des deux factoroïdes $\mathfrak{S} \cap \bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{S} \cap \bar{\mathfrak{B}}$, engendre des recouvrements bien déterminés de $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, recouvrements $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}$, qui sont reliés et par conséquent isomorphes, et dont l'intersection est le factoroïde $\bar{\mathfrak{C}}$.

Passons, finalement, aux groupes. Considérons, dans un groupe $\mathfrak{G}$, deux groupes-facteurs $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$, fermement reliés. Désignons, en conservant la notation utilisée plus haut, par $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ l'intersection des sous-groupes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{S}$ est par conséquent un sous-groupe dans $\mathfrak{G}$. Les groupes-facteurs en question étant fermement reliés, on a les formules

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{S}\mathfrak{b} \qquad ,$$

qui expriment en même temps une condition suffisante pour la propriété en question. Les deux intersections

$$\overline{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}/\mathfrak{a} , \qquad \overline{\mathfrak{B}}' = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}/\mathfrak{b}$$

consistent en groupes-facteurs.

$$\overline{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{G}/(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{a}) , \qquad \overline{\mathfrak{B}}' = \mathfrak{G}/(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{b}) \quad .$$

Choisissons, d'après la construction indiquée ci-dessus, un factoroïde, $\overline{\mathfrak{C}}$, représentant un recouvrement commun quelconque des deux groupes-facteurs $\overline{\mathfrak{A}}'$, $\overline{\mathfrak{B}}'$. On a

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{G}/\mathfrak{c} , \qquad \mathfrak{c} \subset \mathfrak{G}$$

étant un sous-groupe invariant dans $\mathfrak{G}$, situé sur le sous-groupe

$$(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{b}) : \ \mathfrak{G} \supset \mathfrak{c} \supset (\mathfrak{G} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{b}) \quad .$$

Remarquons que ce dernier est invariant dans $\mathfrak{G}$. Or, les recouvrements des groupes-facteurs $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$, recouvrements $\mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{B}}$, engendrés par le factoroïde $\overline{\mathfrak{C}}$, consistent en groupes-facteurs $\mathfrak{A}/\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ qui sont, par conséquent, reliés et alors isomorphes, leur intersection étant précisément le groupe-facteur $\overline{\mathfrak{C}}$. Cette dernière conclusion entraîne la formule

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad .$$

On arrive ainsi au théoreme suivant :

Étant donné deux groupes-facteurs dans le groupe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$, et un sous-groupe $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{G} (= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ qui est invariant dans $\mathfrak{G}$ et satisfait aux relations

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{c} \supset (\mathfrak{G} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}) \quad ,$$

alors les groupes-facteurs $\mathfrak{G}\mathfrak{a}/\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{b}/\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ sont reliés et par conséquent isomorphes,

$$\mathfrak{G}\mathfrak{a}/\mathfrak{c}\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{G}\mathfrak{b}/\mathfrak{c}\mathfrak{b} \quad ,$$

et on a la formule

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})\, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A})\, \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad .$$

Ce théorème entraîne comme cas particulier $(\mathfrak{c} = (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}))$ le "Viergruppensatz" de H. Zassenhaus.

Remarquons qu'on peut déduire, par des considérations analogues, le theorème beaucoup plus général suivant :

Soient $\{\mathfrak{A}_i \, , \; i \in I\}$ et $\{\mathfrak{a}_i \, , \; i \in I\}$ deux ensembles de sous-groupes du groupe $\mathfrak{G}$ (I étant un ensemble d'indices non vide et d'ailleurs arbitraire) tels que, pour chaque $i \in I$, $\mathfrak{a}_i$ soit un sous-groupe invariant dans $\mathfrak{A}_i$. Alors, si l'on pose $\mathfrak{S} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ et si $\mathfrak{c}$ est un sous-groupe quelconque, invariant dans $\mathfrak{S}$ et satisfaisant aux relations

$$\mathfrak{S} \supset \mathfrak{c} \supset \prod_{i \in I} (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a}_i) \quad ,$$

tous les groupes-facteurs $\mathfrak{S}\mathfrak{a}_i/\mathfrak{c}\mathfrak{a}_i$ $(i \in I)$ sont reliés et par conséquent isomorphes deux à deux et on a, pour des indices arbitraires $i \, , \, j \in I$, la formule :

$$\mathfrak{S}\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{c}\mathfrak{a}_j = \mathfrak{c} = \mathfrak{S}\mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{c}\mathfrak{a}_i \quad .$$

7. – Ayant ainsi essayé d'exposer les fondements de la théorie des décompositions dans les ensembles et d'indiquer le mode d'application de resultats de cette théorie en algèbre, je me propose, à présent, de revenir à la théorie des décompositions, pour parler de questions plus profondes de cette théorie. Plus precisément, je me propose de parler de la théorie des séries de décompositions d'un ensemble G, théorie qui offre de l'intérêt particulier à cause de ses relations étroites avec des matières classiques, en jetant sur ces dernières une lumière nouvelle, et à cause de ses applications dans la théorie des classifications scientifiques.

Indiquons d'abord quelques définitions fondamentales. Soient $\bar{A} \geq \bar{B}$ des décompositions arbitraires de l'ensemble G.

Par une <u>série de décompositions</u> de l'ensemble G, allant de $\bar{A}$ à $\bar{B}$, on entend une suite finie de décompositions de G de la forme

$$(\bar{A} =)\ \bar{A}_1 \geq \cdots \geq \bar{A}_\alpha\ \ (= \bar{B}) \qquad ,$$

de sorte que le premier membre, $\bar{A}_1$, de la série coïncide avec $\bar{A}$ et le dernier, $\bar{A}_\alpha$, avec $\bar{B}$. Le nombre α s'appelle la <u>longueur</u> de la série en question.

Soit alors

$$((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geq \cdots \geq \bar{A}_\alpha$$

une série de décompositions de G, allant de $\bar{A}$ à $\bar{B}$.

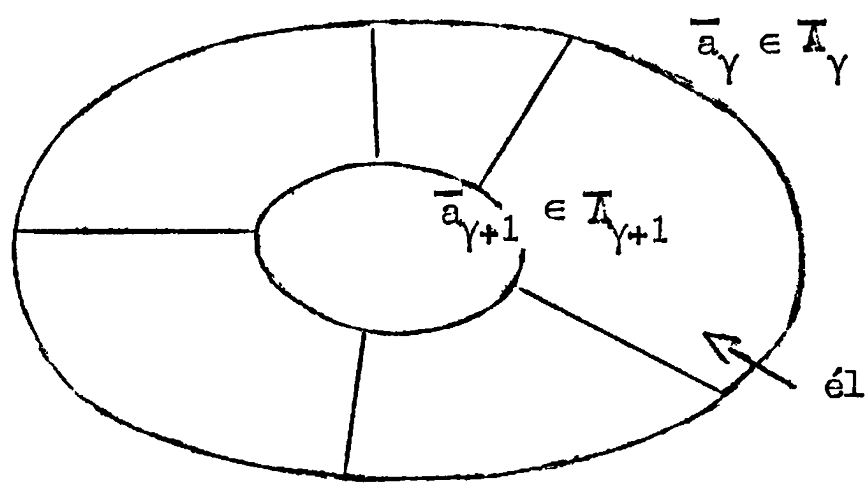
On appelle <u>raffinement</u> de la série $(\bar{A})$ toute série de décompositions de G telle que la série $(\bar{A})$ en fait partie. Tout raffinement de la série $(\bar{A})$ est, par conséquent, de la forme

$$((\mathring{\bar{A}}) =)\ \mathring{\bar{A}}_1 \geq \cdots \geq \mathring{\bar{A}}_{\mathring{\alpha}} \qquad ,$$

à condition que $\mathring{\alpha} \geq \alpha$ et qu'on arrive, en supprimant quelques termes $\mathring{\bar{A}}_\nu$, à la série $(\bar{A})$.

Un élément fondamental de la théorie en question est la notion de chaînes locales.

Pour la définir, partons de la remarque suivante. Considérons un terme quelconque de la série $(\bar{A})$, $\bar{A}_{\gamma+1}$ $(\gamma \geq 1)$. Ce terme étant un raffinement de la décomposition précédente, $\bar{A}_\gamma$, tout élément de cette dernière est la somme de certains éléments de la décomposition $\bar{A}_{\gamma+1}$. Par conséquent, si l'on choisit un elément arbitraire $\bar{a}_{\gamma+1} \in \bar{A}_{\gamma+1}$, il existe précisement un élement $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ qui satisfait à la relation $\bar{a}_\gamma \supset \bar{a}_{\gamma+1}$ et tous les élements de la decomposition $\bar{A}_{\gamma+1}$, dont $\bar{a}_\gamma$ est la somme, représentent une decomposition de l'élément $\bar{a}_\gamma$. Cette situation peut être illustrée par la figure suivante :



Cela posé, passons à la définition de la notion de chaîne locale de la serie (Λ). Choisissons, dans ce but, un elément quelconque $(\bar{a} =)\ \bar{a}_\alpha \in \Lambda_\alpha$, c'est-à-dire, soulignons-le, un élément appartenant au dernier membre, Λ_α, de la suite (Λ). Sur cet élément se trouve la décomposition, $\{\bar{a}\}_\alpha$, consistant en le seul élément $\bar{a}_\alpha$. Posons $K_\alpha \bar{a} = \{\bar{a}\}$.

La décomposition Λ_α étant un raffinement de la decomposition précédente, $\Lambda_{\alpha-1}$, il existe précisément un élément $\bar{a}_{\alpha-1} \in \Lambda_{\alpha-1}$ qui satisfait à la relation $\bar{a}_{\alpha-1} \supset \bar{a}_\alpha$ et tel que tous les éléments de la décomposition Λ_α, dont cet élément $\bar{a}_{\alpha-1}$ est la somme, forment une décomposition dans l'ensemble G, $K_{\alpha-1}\bar{a}$, qui est une décomposition de l'élément $\bar{a}_{\alpha-1}$.

De même, il existe précisément un élément $\bar{a}_{\alpha-2} \in \Lambda_{\alpha-2}$ qui satisfait à la relation $\bar{a}_{\alpha-2} \supset \bar{a}_{\alpha-1}$ et tel que tous les éléments de la décomposition $\Lambda_{\alpha-1}$, dont cet élément $\bar{a}_{\alpha-2}$ est la somme, forment une décomposition dans l'ensemble G, $K_{\alpha-2}\bar{a}$, qui est une décomposition de l'élément $\bar{a}_{\alpha-2}$.

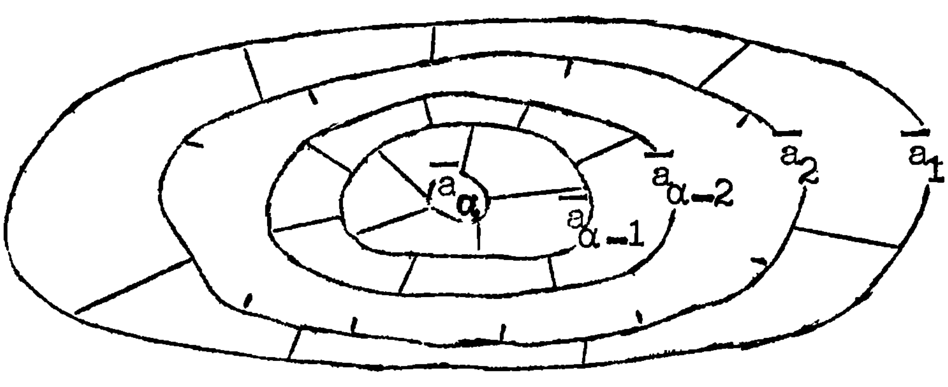
En procédant ainsi on arrive finalement à un elément $\bar{a}_1 \in \Lambda_1$ qui satisfait à la relation $\bar{a}_1 \supset \bar{a}_2$ et tel que tous les eléments de la décomposition Λ_2, dont cet élément $\bar{a}_1$ est la somme, forment une décomposition dans l'ensemble G, $K_1\bar{a}$, qui est une décomposition de l'élément $\bar{a}_1$.

On définit ainsi, en partant de l'élément $\bar{a} \in \Lambda_\alpha$, une suite, de longueur α, de décompositions dans l'ensemble G,

$$([Ka] =)\ K_1\bar{a} \to K_2\bar{a} \to \dots \to K_{\alpha-1}\bar{a} \to K_\alpha\bar{a} \quad ,$$

cette suite s'appelle la <u>chaîne locale</u> (de la série (Λ)) appartenant à l'élément $\bar{a}\ (= \bar{a}_\alpha \in \Lambda_\alpha)$. Cet élément $\bar{a}$ s'appelle, à son tour, la <u>base</u> de la chaîne locale $[Ka]$.

La chaîne locale appartenant à la base $\bar{a}_\alpha$ peut être illustree par la figure suivante :



L'ensemble formé de toutes les chaînes locales appartenant aux différents éléments $\overline{a} \in \mathcal{A}_\alpha$ s'appelle la <u>variété de chaînes locales</u> (de la série $(\overline{\mathcal{A}})$). Il est bien évident que la varieté de chaînes locales de la série $(\overline{\mathcal{A}})$ est équivalente, au sens de la théorie des ensembles, avec le dernier terme $\mathcal{A}_\alpha$ de la série en question.

Cette définition étant donnée, considérons deux séries de décompositions de l'ensemble G, de même longueur α.

$$((\overline{\mathcal{A}}) =) \quad \overline{\mathcal{A}}_1 \geqslant \dots \geqslant \overline{\mathcal{A}}_\alpha \qquad ,$$

$$((\overline{\mathcal{B}}) =) \quad \overline{\mathcal{B}}_1 \geqslant \dots \geqslant \overline{\mathcal{B}}_\alpha \qquad ,$$

et supposons, pour simplifier nos raisonnements, que les deux derniers membres de ces séries, $\overline{\mathcal{A}}_\alpha$, $\overline{\mathcal{B}}_\alpha$, coïncident : $\overline{\mathcal{A}}_\alpha = \overline{\mathcal{B}}_\alpha$. On voit que, dans cette hypothèse, se trouvent associées à tout elément $\overline{a} \in \overline{\mathcal{A}}_\alpha = \overline{\mathcal{B}}_\alpha$ deux chaînes locales de même base $\overline{a}$, l'une, $[Ka]$, pour la série $(\overline{\mathcal{A}})$, et l'autre $[La]$, pour la série $(\overline{\mathcal{B}})$:

$$([Ka] =) \quad K_1\overline{a} \to \dots \to K_\alpha\overline{a}$$

$$([La] =) \quad L_1\overline{a} \to \dots \to L_\alpha\overline{a} \qquad .$$

Désignons par $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ les variétés de chaînes locales appartenant aux deux séries en question. Ces variétés sont, évidemment, équivalentes : on obtient une application biunivoque de la variété $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ sur $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ en associant à toute chaîne locale $[Ka] \in \underset{\sim}{\mathcal{A}}$ la chaîne locale $[La] \in \underset{\sim}{\mathcal{B}}$ qui a la même base $\overline{a}$. Nous appelons l'application en question <u>l'application par bases</u>.

Ceci etant pose, nous sommes en mesure d'introduire les notions de séries demi-enchaînées et de séries enchaînées, notions importantes dans la théorie qui nous occupe.

Supposons qu'il existe une permutation p de l'ensemble des indices $1, \dots, \alpha$, agissant sur les variétés de chaînes locales $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$, de la manière suivante : Pour tout couple d'éléments $[Ka] \in \underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $[La] \in \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, mutuellement associés dans l'application par bases chaque terme $K_\gamma\overline{a}$ de la suite $[Ka]$ et le terme $L_\delta\overline{a}$ de la suite $[La]$, correspondant à $K_\gamma\overline{a}$ en vertu de la permutation p, $\delta = p_\gamma$, sont toujours des décompositions demi-reliées ou bien reliées.

On appelle, dans le cas de demi-liaison, les séries (A) , (B) demi-enchaînées et, dans le cas de liaison, enchaînées.

Avec ces notions de demi-enchaînement et d'enchaînement, nous allons passer à l'énoncé des résultats fondamentaux de la theorie qui nous occupe. Ces résultats concernent des couples de séries de décompositions, séries dont les membres sont en certains rapports de modularité et complémentarité et qui admettent, dans ces conditions, des raffinements demi-enchaînés ou même enchaînés.

Considérons deux séries de décompositions de l'ensemble G , séries ayant les longueurs arbitraires α , β (≥ 1) :

$$((A) =) \quad A_1 \geq \cdots \geq A_\alpha \quad ,$$

$$((B) =) \quad B_1 \geq \cdots \geq B_\beta \quad .$$

Pour simplifier le langage appelons les séries (A) , (B) mutuellement modulaires si tout membre de chacune d'entre elles est modulaire par rapport à deux membres consecutifs quelconques de l'autre ; en d'autres termes, si l'on a les formules

$$(A_{\gamma-1} , [A_\gamma , B_\nu]) = [A_\gamma , (A_{\gamma-1} , B_\nu)] \quad ,$$

$$(B_{\delta-1} , [B_\delta , A_\mu]) = [B_\delta , (B_{\delta-1} , A_\mu)]$$

pour tous les indices γ , ν , δ , μ correspondants.

De même, appelons les séries (A) , (B) mutuellem nt complémentaires si tout membre de chacune d'entre elles est complémentaire à tout membre de l'autre.

Avec cette terminologie les resultats fondamentaux en question sont les suivants :

Pour d'arbitraires séries de décompositions de l'ensemble G , mutuellement modulaires, on peut construire, par un procédé analogue à celui de ZASSENHAUS dans la théorie des groupes, deux raffinements demi-enchaînés des séries considérées.

Si les séries de décompositions sont mutuellement complementaires, alors le procédé en question conduit à deux raffinements enchaînés.

Voilà des resultats qui rappellent, évidemment, le théorème classique de Schreier au sujet des suites de compositions, mais qui sont beaucoup plus généraux en ce qui concerne la matière aussi bien que le contenu. Les résultats en question conduisent à de nombreuses applications, tant dans la théorie des groupoïdes où l'on arrive par des procédés convenables d'algebrisation à des théorèmes analogues concernant les factoroïdes, que dans la théorie des groupes où l'on obtient des compléments au sujet des résultats classiques sur les suites de compositions, résultats élucidant le comportement des groupes-facteurs correspondants non seulement dans le voisinage de l'élément-unité, mais encore celui de n'importe quel autre élément du groupe. On peut aussi développer, sur la base des résultats précédents, une théorie des suites de sous-groupes, ces derniers n'étant pas nécessairement invariants l'un dans l'autre, en subordonnant cette théorie à celle des séries de décompositions en classes latérales correspondantes à gauche ou à droite. Il ne me reste, malheureusement, pas assez de temps pour entrer dans les détails sur ce sujet.

La théorie des séries de décompositions dans les ensembles a trouvé aussi d'intéressantes applications dans le domaine des classifications scientifiques. On sait que, pour déterminer un individu sur la base d'une classification, on a à déterminer une suite de certains caractères par laquelle l'individu considéré se trouve parfaitement déterminé. Or, en réalisant, dans l'espèce, une détermination de ce genre, il se peut qu'on n'aboutisse pas au résultat à cause de certains caractères en defaut. Il peut arriver, par exemple, que l'individu à déterminer est endommagé ou bien pathologique, etc. Il se pose alors la question d'un principe de construction de deux classifications qui seraient basées sur deux suites différentes de caractères et se trouveraient en certaines relations mutuelles : on demande que les deux classifications conduisent au même résultat, et qu'on puisse passer, pour chaque individu, de chaque caractere intervenant dans une classification à un certain caractère intervenant dans l'autre, la correspondance en question étant toujours biunivoque. Pour de telles classifications on peut espérer qu'on sera en mesure de remplacer, dans l'espèce, les caractères en défaut dans une classification par certains caractères dans l'autre, caractères qui seraient presents. La théorie précédente des séries de décompositions permet de donner une certaine solution de ce problème aussi intéressant que difficile à résoudre. Pour les détails, je me permets de renvoyer à mon livre en allemand paru récemment (*).

(*) BORŮVKA (Otukar). - Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960 (Hochschulbücher für Mathematik, 46).