Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre

Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser, Vol. 49, 1960, 229-251

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500088

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Bořůvka, M. O.
1960
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. XLIX, pp. 229-252

Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre.

Mémoire par M. O. Bořůvka (à Brno)

A M. Giovanni Sansone pour son 70^me anniversaire.

Résumé. - *Étant données les équations différentielles linéaires du second ordre,* (*a*), (*A*) (p. 229), *on sait que, deux intégrales quelconques, y, Y, admettent toujours des transformations mutuelles suivant les formules* (2) (p. 230), *les X, x étant des solutions inverses l'une à l'autre des équations* (*b*), (*B*) (p. 229), *Or, ces transformations ne concernent pas en général les intégrales y, Y toutes entières mais seulement leurs pièces définies dans certains voisinages des valeurs initiales des solutions X, x. Sont étudiées, dans le présent Mémoire, les transformations, appelées complètes, caractérisées par la propriété d'opérer aux intégrales y, Y dans toute leur étendue. Il s'agit, bien entendu, des questions dans le domaine réel.*

1. Position du problème.

1. Considérons deux équations différentielles du second ordre, du type jacobien,

$$(a) \qquad y'' = q(t)y\,; \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A)$$

les coefficients q, Q étant supposés continus dans les intervalles ouverts j, J.

On sait que, la théorie des transformations linéaires du second ordre concerne le problème suivant:

Étant donnée une intégrale de l'équation (A), par ex., il s'agit de trouver des fonctions $w(t)$, $X(t)$ de manière que, la fonction, y, composée suivant la formule

$$(1) \qquad y(t) = w(t)Y[X(t)]$$

représente une solution de l'équation (a). En d'autres termes, il s'agit de transformer l'une à l'autre, de la façon indiquée, les équations (a), (A).

En procédant à la solution de ce problème on est conduit à considérer les deux équations différentielles non-linéaires du troisième ordre

$$(b) \qquad -\{X,\ t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \qquad\qquad -\{x,\ T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T) \qquad (B)$$

les $\{X,\ t\}$, $\{x,\ T\}$ étant les dérivées schwarziennes des fonctions inconnues X, x.

Il paraît utile de rappeler brièvement quelques résultats de la théorie des transformations en question que nous avons obtenus récemment et qui paraissent indispensables pour comprendre nos considérations ultérieures [1].

Toute intégrale de l'une et de l'autre équation (b), (B) représente une fonction allant constamment en croissant ou bien en décroissant et possédant, par conséquent, la fonction inverse.

Pour toute intégrale de l'équation (b), $X(t)$, la fonction inverse, $x(T)$, représente une intégrale de l'équation (B); inversement, pour toute intégrale de l'équation (B), $x(T)$, la fonction inverse, $X(t)$, représente une intégrale de l'équation (b).

Les intégrales de l'équation (b), $X(t)$, réalisent des transformations des équations (a), (A) de la façon indiquée, indépendamment du choix de l'intégrale Y. La formule (1) et son inverse, prennent la forme suivante:

$$(2) \qquad y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \qquad Y(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}}.$$

Étant données les valeurs quelconques, $t_0 \in j$; $X_0 \in J$, X_0' $(\neq 0)$, X_0'', il existe précisément une intégrale de l'équation (b), $X(t)$, définie dans un intervalle ouvert, i, qui satisfait aux conditions initiales cauchyennes

$$X(t_0) = X_0, \qquad X'(t_0) = X_0', \qquad X''(t_0) = X_0'',$$

et qui est en même temps la plus large en ce sens que, toute intégrale de l'équation (b) vérifiant les mêmes conditions initiales en fait partie.

Or, c'est précisément ce dernier théorème sur l'existence et l'unicité des plus larges solutions de l'équation (b) qui nous fournit le point de départ pour les considérations du présent Mémoire. En effet, l'intervalle de définition i, de la plus large solution $X(t)$ ne coïncide en général pas avec l'intervalle j, et de même, les valeurs de cette solution ne recouvrent pas l'intervalle J tout entier. Ceci entraîne que, la transformation correspondante des intégrales, y, Y, des équations (a), (A), suivant les formules (2) ne concerne pas toujours les intégrales y, Y toutes entières, mais seulement leurs pièces définies dans certains voisinages des valeurs t_0, X_0.

Convenons d'appeler *complète* une solution de l'équation (b), $X(t)$, qui est définie dans l'intervalle j et dont les valeurs recouvrent l'intervalle J tout entier. Nous appelons par le même nom les transformations des équations (a), (A), réalisées, suivant les formules telles que (2), par les solutions complètes des équations (b), (B); $X(t)$, $x(T)$.

---

[1] O. Borůvka, *Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre*, « Ann. di Mat. p. ed app. », *41*, 1956, p. 325-342.

Avec cette terminologie le problème que nous nous proposons de resoudre dans ce Mémoire consiste en ceci:

Reconnaître, s'il existe des solutions complètes de l'équation (b) *et, dans l'affirmative, déterminer la généralité de toutes ces solutions complètes.*

Il est évident que les solutions complètes de l'équation (b) et leurs fonctions inverses réalisent des transformations des intégrales des équations (a), (A) dans toute leur étendue.

En tenant compte des formules (2) on s'aperçoit immédiatement de la situation suivante: Les équations (a), (A) admettent des transformations complètes seulement dans le cas si elles sont toutes les deux de types finis, c'est-à-dire si leurs intégrales ne possèdent, dans les intervalles j, J, qu'un nombre fini de zéros; ou bien dans le cas, si elles sont toutes les deux du type infini, c'est ce qui veut dire que leurs intégrales s'annulent infiniment de fois. Pour abrévier ce Mémoire nous nous bornons au cas des équations de types finis admettant des points conjugués. L'étude de ces équations présente un intérêt particulier à cause de la variété de matières et de résultats correspondants. Quant aux autres équations, à savoir celles dont les intégrales possèdent dans les intervalles j, J toujours une racine au plus et celles dont les solutions admettent une infinité de racines, il paraît utile de les considérer à part. Cependant, l'étude de ces équations peut être traitée par les mêmes méthodes que nous allons employer dans la suite.

2. Suites fondamentales des nombres conjugués.

2. Considérons une équation différentielle linéaire du second ordre du type jacobien,

$$(a) \qquad y'' = q(t)y;$$

nous supposons la fonction q définie et continue dans un intervalle ouvert $j = (a, b)$, les cas $a = -\infty$, $b = \infty$ n'étant pas exclus.

Nous convenons d'entendre sous *intégrale* de l'équation (a) une solution de l'équation (a), non identiquement nulle, définie dans l'intervalle j tout entier.

Nous appelons l'équation (a) *du type* (m), pour un nombre naturel m (≥ 1) quelconque, si le plus grand nombre de nombres mutuellement conjugués, situés dans l'intervalle j, égale à m. On peut dire aussi que, l'équation (a) est du type (m) si elle admet des intégrales s'annulant dans j précisément m fois, mais si elle n'en admet pas qui s'annulent $m+1$ fois. Il est évident qu'il existe des équations (a) du type (m) pour tout nombre naturel m; par ex. $y'' = -m^2y$, $t \in (0, \pi)$.

Nous appelons *groupe complet de nombres conjugués* un ensemble formé par tous les nombres situés dans j, qui sont conjugués à un nombre d'entre eux. Il est facile à montrer que, pour toute équation (a) du type (m) chaque groupe complet de nombres conjugués est formé par $m-1$ ou bien m nombres.

Pour un nombre $t \in j$ quelconque nous désignons par $\varphi_\nu(t)$, $\varphi_{-\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, le ν-me nombre conjugué à t qui est situé à droite resp. à gauche de t, s'il en existe; pour simplifier, on écrit aussi φ au lieu de φ_1.

On obtient tout groupe complet de nombres conjugués à la base d'un nombre $t_0 \in j$, d'après le schème

$$\ldots, \quad \varphi_{-2}(t_0), \qquad \varphi_{-1}(t_0), \qquad t_0, \qquad \varphi_1(t_0), \qquad \varphi_2(t_0), \ldots,$$

où on ne lit, naturellement, que les symboles désignant les nombres actuellement existant.

3. *Dans la suite nous supposons toujours que l'équation* (a) *est du type* (m), $m \geq 2$.

Dans cette supposition il existe, dans l'intervalle j, au moins deux nombres $r < s$ conjugués l'un à l'autre.

Soit $A \subset j$ $(B \subset j)$ l'ensemble des nombres $t \in j$ jouissant de la propriété qu'il existe des nombres inférieurs (supérieurs) conjugués à t. On a évidemment $s \in A$ $(r \in B)$. La suite des nombres décroissants (croissants) s, $\varphi_{-1}(s)$, $\varphi_{-2}(s), \ldots \in j$ $(r, \ \varphi_1(r), \ \varphi_2(r), \ldots \in j)$ se termine par un certain nombre $\varphi_{-i}(s)$ $(\varphi_i(r))$, $i \leq m-1$, le symbole $\varphi_{-(i+1)}(s)$ $(\varphi_{i+1}(r))$ n'ayant plus de sens. On voit facilement que ce nombre $\varphi_{-i}(s)$ $(\varphi_i(r))$ représente un minorant (majorant) de l'ensemble A (B). Ceci démontre l'existence des deux nombres, situés dans l'intervalle j,

$$(a <) \quad a_1 = \inf A, \qquad b_{-1} = \sup B \quad (< b).$$

Le nombre a_1 (b_{-1}) est en même temps le plus grand (le plus petit) nombre dans j pour lequel il n'y a pas de nombres conjugués à gauche (à droite).

On a évidemment

$$a_1 \notin A, \quad b_{-1} \notin B; \qquad A = (a_1, b), \quad B = (a, b_{-1}).$$

Nous appelons a_1 (b_{-1}) *le nombre fondamental gauche (droit)* de l'équation (a). Si ces deux nombres a_1, b_{-1} sont conjugués l'un à l'autre, l'équation (a) est dite *spéciale*.

Pour l'équation $y'' = -m^2 y$, $t \in (0, \pi)$, nous avons $a_1 = \dfrac{\pi}{m}$, $b_{-1} = \dfrac{m-1}{m}\pi$ et nous voyons que cette équation est spéciale.

4. On tire de la définition des nombres a_1, b_{-1} qu'il existe, pour chaque nombre $x > a_1$ $(x < b_{-1})$ dans j, précisément un nombre conjugué à gauche (à droite) contenu dans l'intervalle $(a, a_1]$ $([b_{-1}, b))$.

On démontre, sans aucune espèce de difficulté, qu'*il existe précisément* $m-2$ *nombres conjugués à droite (à gauche) par rapport à* a_1 (b_{-1}).

La suite croissante (décroissante) formée par le nombre fondamental gauche, a_1, (par le nombre fondamental droit b_{-1}), et par les différents nombres conjugués par rapport à a_1 (b_{-1}),

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1}, \qquad (b_{-1} > b_{-2} > \ldots > b_{-m+1})$$

s'appelle *la suite fondamentale gauche (droite) des nombres conjugués.*

Si l'équation (a) est spéciale, et dans ce cas seulement, les deux suites fondamentales en question se confondent dans une seule qui est alors appelée *la suite fondamentale des nombres conjugués.*

En tous cas on a les inégalités suivantes:

$$a < b_{-m+1} \leq a_1 < b_{-m+2} \leq a_2 < b_{-m+3} \leq a_3 < \ldots \leq a_{m-3} < b_{-2} \leq a_{m-2} < b_{-1} \leq a_{m-1} < b.$$

Dans ces formules ou bien tous les signes $=$ sont valables ou bien aucun d'entre eux; le premier cas a lieu si l'équation (a) est spéciale, le second si l'équation (a) n'est pas spéciale.

Un nombre $t_0 \in j$ s'appelle *privilégié* (par rapport à l'équation (a)) s'il figure parmi les membres de l'une ou l'autre suite fondamentale des nombres conjugués.

5. Un nombre $t_0 \in j$ s'appelle *du type* $\mu \mid \nu$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ étant des nombres entiers, s'il existe, dans l'intervalle j, précisément μ nombres conjugués à gauche et ν nombres conjugués à droite par rapport à t_0. On a alors $\mu + \nu + 1 = m - 1$ ou bien $= m$.

On voit facilement que tout nombre $t_0 \in (a_k, b_{-m+k+1})$ est du type $k \mid m-k-1$ $(k = 0, \ldots, m-1;\ a_0 = a,\ b_0 = b)$ tandis que tout nombre $t_0 \in [b_{-m+k+1}, a_{k+1}]$ est du type $k \mid m-k-2$ $(k = 0, \ldots, m-2)$.

On voit de plus, que, tout groupe complet de nombres conjugués, formé de m nombres, contient toujours un nombre de chaque intervalle

$$(a, b_{-m+1}), (a_1, b_{-m+2}), (a_2, b_{-m+3}), \ldots, (a_k, b_{-m+k+1}), \ldots, (a_{m-1}, b),$$

tandis que, chaque groupe complet de nombres conjugués, formé de $m-1$ nombres, contient toujours un nombre de chaque intervalle

$$[b_{-m+1}, a_1], [b_{-m+2}, a_2], \ldots, [b_{-m+k+1}, a_{k+1}], \ldots, [b_{-1}, a_{m-1}].$$

Ce résultat met en évidence la situation suivante: Si l'équation (a) est spéciale, tout groupe complet de nombres conjugués contient m nombres, sauf un groupe unique qui est formé des $m-1$ membres de la suite fondamentale des nombres conjugués.

Deux nombres t_1, $t_2 \in j$ sont dits de *types inverses* si leurs types ont la forme $\mu \mid \nu$, $\nu \mid \mu$.

Si les nombres t_1, $t_2 \in j$ sont des types inverses $k \mid m-k-1$, $m-k-1 \mid k$ ($k=0, \dots, m-1$), ils appartiennent aux intervalles (a_k, b_{-m+k+1}), (a_{m-k-1}, b_{-k}); s'ils sont des types inverses $k \mid m-k-2$, $m-k-2 \mid k$ ($k=0, \dots, m-2$), ils se trouvent dans les intervalles $[b_{-m+k+1}, a_{k+1}]$, $[b_{-k-1}, a_{m-k-1}]$.

6. La dispersion centrale de première espèce et d'indice μ, $\varphi_\mu(t)$, $\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1)$, existe dans l'intervalle j_μ, qui est identique à $(a, b_{-\mu})$ ou bien $(a_{-\mu}, b)$ suivant que $\mu \geq 0$ ou bien $\mu \leq 0$ ($a_0 = a$, $b_0 = b$).

Remarquons que la valeur de la fonction $\varphi_\mu(t)$, pour $t \in j_\mu$, représente le μ^{me} nombre conjugué à t, situé à gauche ou à droite de t, suivant que $\mu < 0$ ou bien $\mu > 0$; pour $\mu = 0$ on pose $\varphi_0(t) = t$.

Dans l'intervalle j_μ la fonction φ_μ va constamment en croissant de a_μ à b ($\mu \geq 0$) ou bien de a à b_μ ($\mu \leq 0$). On a donc les formules

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\lim_{t\to a+} \varphi_\mu(t) = a_\mu, \qquad \lim_{t\to b_{-\mu}-} \varphi_\mu(t) = b \quad \text{pour} \quad \mu \geq 0, \\ &\lim_{t\to a_{-\mu}+} \varphi_\mu(t) = a, \qquad \lim_{t\to b-} \varphi_\mu(t) = b_\mu \quad \text{pour} \quad \mu \leq 0. \end{aligned}$$

On sait que, pour tout couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation (a), u, v, on a, dans l'intervalle j_μ, la relation identique suivante:

$$(4)\qquad u(t)v[\varphi_\mu(t)] - v(t)u[\varphi_\mu(t)] = 0.$$

7. Soit u, v un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation (a). Nous désignons par $w (= uv' - u'v)$ la wronskienne correspondante.

La fonction $\dfrac{u(t)}{v(t)}$ existe dans l'intervalle j à l'exception des racines de l'intégrale v et elle va constamment en croissant ou bien en décroissant, pour chaque $t \in j$ vérifiant l'inégalité $v(t) \neq 0$, suivant que $-w > 0$ ou bien $-w < 0$.

En tenant compte des formules (3), (4) on a les égalités

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\lim_{t\to a+} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t\to a+} \frac{u[\varphi_\mu(t)]}{v[\varphi_\mu(t)]} = \lim_{t\to a_\mu+} \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u(a_\mu)}{v(a_\mu)} = \frac{u(a_1)}{v(a_1)} \quad \text{pour} \quad \mu \geq 0, \\ &\lim_{t\to b-} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t\to b-} \frac{u[\varphi_\mu(t)]}{v[\varphi_\mu(t)]} = \lim_{t\to b_\mu-} \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u(b_\mu)}{v(b_\mu)} = \frac{u(b_{-1})}{v(b_{-1})} \quad \text{pour} \quad \mu \leq 0; \end{aligned}$$

si l'intégrale v s'annule en a_μ, $0 < \mu \leq m-1$ (b_μ, $-m+1 \leq \mu < 0$), les deux derniers membres figurant dans les égalités de la première (seconde) ligne sont à remplacer par $-\operatorname{sgn}(-w)\infty$ ($\operatorname{sgn}(-w)\infty$).

On voit que, la limite $\lim\limits_{t \to a+} \dfrac{u(t)}{v(t)} \left(\lim\limits_{t \to b-} \dfrac{u(t)}{v(t)} \right)$ est toujours finie sauf dans le cas où a_1 (b_{-1}) représente une racine de l'intégrale v; dans ce dernier cas la limite en question est infinie et égale à $-\operatorname{sgn}(-w)\infty$ ($\operatorname{sgn}(-w)\infty$). Remarquons que, la limite considérée est zéro si le nombre a_1 (b_{-1}) est une racine de l'intégrale u et dans ce cas seulement.

Si l'équation (a) est spéciale, nous avons $b_{-1} = \varphi_{m-2}(a_1)$, $a_1 = \varphi_{-m+2}(b_{-1})$, et, par conséquent, d'après (4), $u(a_1)v(b_{-1}) - v(a_1)u(b_{-1}) = 0$. Il en résulte, dans le cas $v(a_1)v(b_{-1}) \neq 0$,

$$\lim_{t \to a+} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t \to b-} \frac{u(t)}{v(t)},$$

tandis que, dans le cas $v(a_1) = 0 = v(b_{-1})$ ces deux limites sont infinies et de signes opposés.

3. Phases.

8. Nous considérons dans la suite un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation (a), u, v, et nous désignons par $w (= uv' - u'v)$ la wronskienne correspondante.

On appelle *première phase* du couple ordonné d'intégrales u, v toute fonction $\alpha(t)$ qui est continue dans l'intervalle j et vérifie, dans cet intervalle, à l'exception des racines de l'intégrale v, la relation [2]

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}.$$

Dans la suite, pour simplifier le langage, nous parlons simplement des *phases* des intégrales u, v au lieu des premières phases du couple ordonné d'intégrales u, v.

On voit qu'il existe, en somme, un système dénombrable de phases des intégrales u, v; $\alpha_0(t)$ étant une quelconque d'entre elles, toutes les autres s'obtiennent par l'addition des différentés multiples (entiers) de π.

La valeur de chaque phase en question, dans une racine quelconque de l'intégrale u (v), est un multiple pair (impair) du nombre $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, il existe toujours précisément une phase des intégrales u, v qui s'annule dans une racine donnée de l'intégrale u.

Il est clair que, toute phase $\alpha(t)$ va constamment en croissant ou bien

---

(2) Remarquons qu'on définit, d'une manière analogue, les *secondes phases* du couple d'intégrales en question, $\beta(t)$, par la formule $\operatorname{tg} \beta(t) = u'(t) : v'(t)$.

en décroissant dans l' intervalle j suivant que $\operatorname{sgn}(-w) = 1$ ou bien $\operatorname{sgn}(-w) = -1$.

Considérons une phase quelconque des intégrales $u, v, \alpha(t)$. Nous voulons préciser les valeurs de cette phase dans l'intervalle j.

Soit $t_0 \in j$ une racine quelconque de l'intégrale u. Nous désignons les autres racines de cette intégrale, à gauche et à droite de t_0, tant qu'il en existe, d'après le schème:

$$(a = t_{-p-1} <) \quad t_{-p} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_s \quad (< t_{s+1} = b).$$

On a, par conséquent, $t_0 \in (a_r, \; b_{-m+r+1})$, $s = m - r - 1$, ou bien $t_0 \in [b_{-m+r+1}, \; a_{r+1}]$, $s = m - r - 2$, pour un r $(= 0, \dots, m-1)$ convenable.

Nous pouvons supposer $\alpha(t_0) = 0$. En effet, si cette relation n'est pas remplie, les valeurs de la phase $\alpha(t)$ s'obtiennent par l'addition d'un multiple convenable de π aux valeurs de la phase déterminée par la relation en question.

Ceci étant, nous désignons par $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{u(t)}{v(t)}$ cette branche de la fonction arc tg, dont les valeurs sont situées dans l'intervalle $[0, \pi)$ ou bien dans $(-\pi, 0]$ suivant que $\operatorname{sgn}(-w) = 1$ ou bien $\operatorname{sgn}(-w) = -1$.

Or, on déduit facilement, pour $t \in [t_\nu, \; t_{\nu+1}) \cap j$, $\nu = -p-1, \dots, s$, la formule suivante:

$$\alpha(t) = \nu \operatorname{sgn}(-w)\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{u(t)}{v(t)}. \tag{6}$$

Il résulte de cette formule, en particulier, qu'on a, pour $t = t_\nu$, $\nu = -p, \dots, s$:

$$\alpha(t_\nu) = \nu \operatorname{sgn}(-w)\pi.$$

Soit

$$c_1 = \lim_{t \to a+} \alpha(t), \qquad c_2 = \lim_{t \to b-} \alpha(t).$$

Les formules (5) et (6) donnent pour ces limites les valeurs suivantes: Dans le cas $a_r < t_0 \leq b_{-m+r+1}$ les valeurs

$$\begin{aligned} c_1 &= -(r+1) \operatorname{sgn}(-w)\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{u(a_1)}{v(a_1)}, \\ c_2 &= (m - r - 1) \operatorname{sgn}(-w)\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{u(b_{-1})}{v(b_{-1})}, \end{aligned} \tag{7}$$

et de même, dans le cas $b_{-m+r+1} < t_0 \leq a_{r+1}$, les valeurs:

$$(8)\qquad \begin{aligned} c_1 &= -(r+1)\operatorname{sgn}(-w)\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{u(a_1)}{v(a_1)}, \\ c_2 &= (m-r-2)\operatorname{sgn}(-w)\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{u(b_{-1})}{v(b_{-1})}, \end{aligned}$$

Nous avons, en particulier,

$$\text{pour}\quad t_0 = b_{-m+r+1}:\quad c_2 = (m-r-1)\operatorname{sgn}(-w)\pi,$$

$$\text{pour}\quad t_0 = a_{r+1}:\quad c_1 = -(r+1)\operatorname{sgn}(-w)\pi.$$

Si l'équation (a) n'est pas spéciale, on a toujours $c_2 - c_1 \neq m\pi \operatorname{sgn}(-w)$, si elle est, au contraire, spéciale $(b_{-m+r+1} = a_{r+1})$, seules les formules (7) sont à appliquer, et l'on a $c_2 - c_1 = m\pi\operatorname{sgn}(-w)$.

9. Considérons une phase quelconque des intégrales u, v; cette phase, α, prend alors en t_0 la valeur $n\pi$, n étant un nombre entier.

On s'assure facilement que, la fonction α appartient à la classe C_3 et qu'on a, pour chaque valeur $t \in j$ les formules suivantes:

$$(9)\qquad \alpha' = \frac{-w}{\rho^2};\qquad \alpha'' = 2w\frac{\rho\rho'}{\rho^4};\qquad \alpha''' = 2w\left[\frac{q}{\rho^2} - 3\frac{\sigma^2}{\rho^4} + 4\frac{w^2}{\rho^6}\right],$$

$$(\rho^2 = u^2 + v^2;\ \sigma^2 = u'^2 + v'^2).$$

Il résulte de ces formules que, la fonction α vérifie, dans l'intervalle j, l'équation différentielle non linéaire du 3me ordre:

$$(10)\qquad -\{\alpha,\ t\} - \alpha'^2 = q(t).$$

Remarquons qu'on a en même temps les formules suivantes, valables dans j:

$$u(t) = \varepsilon\sqrt{\frac{-w}{\alpha'(t)}}\sin\alpha(t),\qquad v(t) = \varepsilon\sqrt{\frac{-w}{\alpha'(t)}}\cos\alpha(t)$$

$$(\varepsilon = (-1)^n \operatorname{sgn} v(t_0)).$$

10. Soit λ un nombre arbitraire.

Il est évident que, dans le cas $\lambda \neq 0$, le système de phases des intégrales $u_1 = \lambda u$, $v_1 = \lambda v$ coïncide avec le système de phases déterminé par les intégrales u, v.

Considérons, en second lieu, le couple ordonné d'intégrales de l'équation (a), u_1, v_1, qui s'obtient si l'on applique aux intégrales u, v la substitution orthogonale

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \quad u\cos\lambda + v\sin\lambda,\\
v_1 &= -u\sin\lambda + v\cos\lambda.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

On démontre aisement que le système de phases des intégrales u_1, v_1 s'obtient si l'on ajoute aux différentes phases des intégrales u, v la même valeur λ.

Remarquons que les dérivées du premier ordre des différentes phases des deux systèmes ont, en tout nombre $t \in j$, toujours la même valeur et il en est de même pour les dérivées du second et du troisième ordre.

11. Pour simplifier le langage nous entendons par *phase de l'équation* (a) une phase appartenant à un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes quelconques de l'équation (a).

Ceci posé nous allons démontrer le théorème suivant:

Soient $t_0 \in j$; X_0, $X_0' \neq 0$, X_0'' *des nombres arbitraires. Il existe précisément une phase* α *de l'équation* (a) *satisfaisant aux conditions cauchyennes*

$$\alpha(t_0) = X_0, \qquad \alpha'(t_0) = X_0', \qquad \alpha''(t_0) = X_0''.$$

Cette phase appartient au système déterminé par les intégrales de l'équation (a)

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= \quad\left(X_0'\cos X_0 - \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'}\sin X_0\right)u_0(t) + \sin X_0 \cdot v_0(t),\\
v_1(t) &= -\left(X_0'\sin X_0 + \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'}\cos X_0\right)u_0(t) + \cos X_0 \cdot v_0(t),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

les u_0, v_0 *étant les intégrales de l'équation* (a) *déterminées par les valeurs initiales suivantes*

$$u_0(t_0) = 0, \quad u_0'(t_0) = 1; \qquad v_0(t_0) = 1, \quad v_0'(t_0) = 0.$$

Démonstration. - Nous pouvons supposer $X_0 = 0$, car il suffit d'appliquer aux intégrales résultantes la substitution orthogonale (11) pour $\lambda = X_0$.

Ceci étant, admettons qu'il y a une phase α satisfaisant aux conditions du théorème. La phase appartient au système déterminé par certaines intégrales u, v de l'équation (a) et on a les formules

$$
\begin{aligned}
u(t) &= c_{11}u_0(t) + c_{12}v_0(t),\\
v(t) &= c_{21}u_0(t) + c_{22}v_0(t),
\end{aligned}
$$

les c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} étant des constantes convenables. On voit facilement qu'on a, au nombre t_0, les relations suivantes

$$\rho^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2; \qquad \rho\rho' = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}; \qquad -w = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$
$$(\rho^2 = u^2 + v^2, \quad w = uv' - u'v).$$

Or, comme les fonctions α, α', α'' prennent au nombre t_0 les valeurs 0, X_0', X_0'', on a, en vertu des formules (9), les relations

$$c_{12} = 0, \qquad X_0' = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \qquad X_0'' = -2\frac{c_{11}}{c_{22}}\frac{c_{21}}{c_{22}}.$$

On peut supposer $c_{22} = 1$, car la fonction α ne change pas si l'on multiplie les intégrales u, v par le même facteur différent de zéro. Nous avons alors les formules

$$u(t) = X_0' \cdot u_0(t), \qquad v(t) = -\frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'}u_0(t) + v_0(t). \tag{13}$$

Il existe, par conséquent, tout au plus une phase satisfaisant aux conditions du théorème et elle ne peut appartenir qu'au système déterminé par les intégrales u, v données par les formules (13). Or, on s'assure facilement que, la phase α appartenant au système en question et s'annulant en t_0 satisfait bien aux conditions du théorème. Il en résulte la proposition.

Remarquons que, si l'on pose

$$X_0' = \sigma_{10}\cos\tau, \qquad -\frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'} = \sigma_{10}\sin\tau,$$

on peut mettre les formules (12) sous la forme plus simple

$$u_1(t) = \quad \sigma_{10}\cos(X_0 - \tau)u_0(t) + \sin X_0 \cdot v_0(t),$$
$$v_1(t) = -\sigma_{10}\sin(X_0 - \tau)u_0(t) + \cos X_0 \cdot v_0(t).$$

Ajoutons que le théorème précédent entraîne la formule suivante

$$\operatorname{tg}\alpha(t) = \frac{\left(X_0'\cos X_0 - \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'}\sin X_0\right)u_0(t) + \sin X_0 \cdot v_0(t)}{-\left(X_0'\sin X_0 + \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'}\cos X_0\right)u_0(t) + \cos X_0 \cdot v_0(t)}, \tag{14}$$

valable pour toute valeur $t \in j$ à l'exception des racines de l'intégrale v_1 figurant dans le dénominateur. Or, étant donné que toute intégrale de l'équation (a) ne possède qu'un nombre fini de racines, la formule (14) subsiste, en particulier, pour toutes les valeurs $t \in j$ situées dans certains voisinages des extrémités a, b de l'intervalle j.

4. Caractéristiques aux limites.

12. Soit $t_0 \in j$ un nombre arbitraire. En se servant des notations du n. 8, nous avons

$$t_0 \in (a_r, b_{-m+r+1}],\ 0 \leq r \leq m-1, \text{ ou bien } t_0 \in (b_{-m+r+1}, a_{r+1}],\ 0 \leq r \leq m-2.$$

Considérons une phase α de l'équation (a) s'annulant en t_0, et posons, conformément aux notations du n. 8,

$$c_1 = \lim_{t \to a+} \alpha(t), \qquad c_2 = \lim_{t \to b-} \alpha(t).$$

Nous appelons *la caractéristique aux limites* de la phase α et nous désignons par (t_0, c_1, c_2), le triple ordonné de nombres t_0, c_1, c_2. Les c_1, c_2 sont *les membres principaux* de la caractérisque en question.

D'après les résultats du n. 8, les nombres t_0, c_1, c_2 sont liés par certaines relations. Pour les exprimer d'une manière bien disposée, nous posons $\varepsilon = \operatorname{sgn}(-w) = \operatorname{sgn} \alpha'$ et nous entendons par le symbole $\lessgtr$ $(\gtrless)$ le signe $<$ $(>)$ ou bien $>$ $(<)$ suivant que $\varepsilon = +1$ ou bien $\varepsilon = -1$.

Ceci étant convenu, les relations en question s'expriment par les formules

$$\begin{gathered} a_r < t_0 \leq b_{-m+r+1};\ -(r+1)\pi\varepsilon \lessgtr c_1 \lessgtr -r\pi\varepsilon;\ (m-r-1)\pi\varepsilon \underline{\lessgtr} c_2 \lessgtr (m-r)\pi\varepsilon, \text{ ou bien} \\ (15) \\ b_{-m+r+1} < t_0 \leq a_{r+1};\ -(r+1)\pi\varepsilon \underline{\lessgtr} c_1 \lessgtr -r\pi\varepsilon;\ (m-r-2)\pi\varepsilon \lessgtr c_2 \lessgtr (m-r-1)\pi\varepsilon, \end{gathered}$$

ces formules étant à compléter par l'explication suivante:

Les deux signes $=$ figurant dans les formules de la première (seconde) ligne subsistent ou bien ne subsistent pas tous les deux en même temps. Si l'équation (a) n'est pas spéciale, on a $c_2 - c_1 \neq m\pi\varepsilon$; si elle est, au contraire, spéciale $(b_{-m+r+1} = a_{r+1})$ seules les formules écrites dans la première ligne sont à appliquer, après la modification consistant en ceci, qu'on remplace les inégalités subsistant pour c_1 par l'égalité $c_2 - c_1 = m\pi\varepsilon$.

13. Considérons une phase de l'équation (a), α, s'annulant en $t_0 \in j$.

Soit (t_0, c_1, c_2) la caractéristique aux limites correspondante et 0, X_0', $(\neq 0)$, X_0'' les valeurs de la phase α et de ses dérivées du premier et du second ordre pour $t = t_0$: $\alpha(t_0) = 0$, $\alpha'(t_0) = X_0'$, $\alpha''(t_0) = X_0''$.

Nous voulons indiquer les relations existant entre les valeurs initiales X_0', X_0'' d'une part et les membres principaux c_1, c_2 d'autre part.

Le point de départ fournit la formule (14) qui prend, dans le cas actuel ($X_0 = 0$), la forme suivante:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{X_0'}{-\frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0'} + \frac{v_0(t)}{u_0(t)}}, \tag{16}$$

les u_0, v_0 étant les intégrales de l'équation (a) déterminées par les valeurs initiales $u_0(t_0) = 0$, $u_0'(t_0) = 1$; $v_0(t_0) = 1$, $v_0'(t_0) = 0$. Ajoutons, que la formule (16) subsiste, en particulier, pour toutes les valeurs $t \in j$ situées dans certains voisinages des extrémités a, b de l'intervalle j.

La formule (16) et les résultats du n. 7 conduisent facilement aux conclusions suivantes:

Dans le cas $c_1 \neq -\left(r + \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$, $-(r+1)\pi\varepsilon$ on a

$$X_0'^2 - X_0' \frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)} \operatorname{tg} c_1 + \frac{1}{2} X_0'' \operatorname{tg} c_1 = 0, \tag{17_1}$$

et de même, pour $c_2 \neq \left(m - r - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$, $\left(m - r - \frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon$, $(m - r - 1)\pi\varepsilon$,

$$X_0'^2 - X_0' \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})} \operatorname{tg} c_2 + \frac{1}{2} X_0'' \operatorname{tg} c_2 = 0. \tag{17_2}$$

Dans le cas $c_1 = -\left(r + \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$ on trouve

$$X_0'' = 2X_0' \frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)}, \tag{18_1}$$

et analogue, pour $c_2 = \left(m - r - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$ ainsi que pour $c_2 = \left(m - r - \frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon$

$$X_0'' = 2X_0' \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})}, \tag{18_2}$$

la quantité X_0' étant indéterminée.

Dans le cas $c_1 = -(r+1)\pi\varepsilon$ on a nécessairement $t_0 = a_{r+1}$ tandis que les quantités X_0', X_0'' restent indéterminées. Une situation analogue a lieu pour $c_2 = (m - r - 1)\pi\varepsilon$; dans ce cas on a $t_0 = b_{-m+r+1}$, les X_0', X_0'' étant indéterminées.

14. Nous appelons *triple admissible* par rapport à l'équation (a), tout ensemble ordonné formé de trois nombres t_0, c_1, c_2, ces nombres étant liés par des relations telles que (15) avec les compléments correspondants.

Il est clair que la caractéristique aux limites de chaque phase de l'équation (a) représente un triple admissible par rapport à cette équation. Mais, inversement, y a-t-il, pour tout triple admissible, de phases dont les caractéristiques aux limites coïncident avec le triple en question, et, dans l'affirmative, quelle est la généralité de la solution? Voilà la question importante dont nous allons nous occuper actuellement.

La réponse à cette question est fournie par le théorème suivant:

A tout triple admissible par rapport à l'équation (a), (t_0, c_1, c_2), *il existe au moins une phase de l'équation* (a), *dont la caractéristique aux limites coïncide avec le triple en question.*

Si l'équation (a) *est spéciale, il existe précisément* ∞^1 *ou bien* ∞^2 *de phases de ce genre, suivant que nul nombre* c_1, c_2 *n'est un multiple de* π *ou bien tous les deux sont de tels multiples. Si l'équation* (a) *n'est pas spéciale, il existe précisément une ou bien* ∞^1 *de phases considérées, suivant que nul nombre* c_1, c_2 *n'est un multiple de* π *ou bien un d'entre eux jouit de cette propriété.*

Démonstration. - Pour démontrer le théorème en question nous allons procéder de la manière suivante. Soit (t_0, c_1, c_2) un triple admissible quelconque par rapport à l'équation (a). D'abord, nous admettons l'existence d'une phase α de l'équation (a) à caractéristique aux limites (t_0, c_1, c_2) et nous déterminons, en nous servant des formules du n. 13, les valeurs initiales X_0', X_0'' correspondantes, en fonction de c_1, c_2. Nous trouvons de cette façon les valeurs initiales $0, X_0', X_0''$ de toutes les phases pouvant satisfaire au théorème. Or, d'après les résultats du n. 11, il existe, pour chaque système de ces valeurs $0, X_0', X_0''$ précisément une phase $\bar{\alpha}$ de l'équation (a) aux valeurs initiales $0, X_0', X_0''$. La phase $\bar{\alpha}$ possède naturellement une certaine caractéristique aux limites $(t_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$ et elle vérifie une formule telle que (16). L'achèvement de la démonstration consiste alors en ceci qu'on constate, en se servant de la dite formule, les égalités $\bar{c}_1 = c_1$, $\bar{c}_2 = c_2$. Ceci montre que toutes les phases de l'équation (a), déterminées par les conditions initiales ci-dessus, satisfont au théorème.

Ceci étant prélevé nous allons examiner la situation en détail. Nous considérons deux cas suivant que l'équation (a) est spéciale ou non.

1. Supposons, en premier lieu, l'équation (a) spéciale.

Dans ce cas ou bien nul nombre c_1, c_2 n'est un multiple de π ou bien tous les deux possèdent cette propriété. D'après cela deux cas sont à distinguer:

a. $\quad a_r < t_0 < a_{r+1}\,; \quad c_1 = c_2 - m\pi\varepsilon, \quad (m-r-1)\pi\varepsilon \lessgtr c_2 \lessgtr (m-r)\pi\varepsilon\,;$

b. $\quad t_0 = a_{r+1}\,; \quad c_1 = -(r+1)\pi\varepsilon, \quad c_2 = (m-r-1)\pi\varepsilon.$

Dans le cas a., ou bien les nombres c_1, c_2 sont des multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $c_1 = -\left(r+\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$, $c_2 = \left(m-r-\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$ ou bien ils ne les sont pas, de sorte que $c_1 = c_2 - m\pi\varepsilon$, $c_2 \neq \left(m-r-\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$.

Si les nombres c_1, c_2 sont des multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$, on voit, d'après les formules (18_1), (18_2), que la valeur X_0' est indéterminée tandis que X_0'' est donnée par la formule

$$X_0'' = 2X_0' \frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)} = 2X_0' \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})}. \tag{19}$$

Si les nombres c_1, c_2 ne sont pas des multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$, on a les formules telles que (17_1), (17_2) et ces formules coïncident, en vertu des relations $v_0(a_1) : u_0(a_1) = v_0(b_{-1}) : u_0(b_{-1})$, $c_1 = c_2 - m\pi\varepsilon$. On a, en outre, $\operatorname{tg} c_1 \neq 0$, car l'inégalité $t_0 < a_{r+1}$ entraîne que le nombre c_1 n'est pas un multiple de π. On voit que la valeur X_0' résulte indéterminée tandis que X_0'' est donnée par la formule

$$X_0'' = -2X_0' \left\{ \frac{X_0'}{\operatorname{tg} c_1} - \frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)} \right\}. \tag{20}$$

Remarquons que la dernière formule entraîne la formule (19) si l'on remplace le symbole $1 : \operatorname{tg} c_1$ par zéro.

On voit, en procédant de la manière indiquée ci-dessus, que toutes les phases α satisfaisant au théorème considéré sont déterminées par les valeurs initiales 0, X_0', X_0'', la valeur X_0' ($X_0' \neq 0$, $\operatorname{sgn} X_0' = \varepsilon$) étant entièrement arbitraire et X_0'' étant donnée par la formule (20). On a, par conséquent, dans les conditions considérées, précisément une famille de ∞^1 phases de l'équation (a), dont les caractéristiques aux limites sont identiques à (t_0, c_1, c_2).

Dans le cas b. la caractéristique aux limites de toute phase de l'équation (a) s'annulant en a_{r+1}, est représentée par le triple formé des nombres a_{r+1}, $\mp(r+1)\pi$, $\pm(m-r-1)\pi$, de sorte que les valeurs X_0', X_0'' résultent indéterminées. On voit que toutes les phases α satisfaisant au théorème considéré sont déterminées par les valeurs initiales 0, X_0' $(\neq 0)$, X_0'', ces valeurs étant entièrement arbitraires. On a, par conséquent, dans les conditions considérées, précisément une famille de ∞^2 phases de l'équation (a) dont les caractéristiques aux limites sont (t_0, c_1, c_2).

2. Supposons, en second lieu, que l'équation (a) n'est pas spéciale.

Dans ce cas les nombres a_1, b_{-1} ne sont pas conjugués l'un à l'autre, de sorte que $v_0(a_1) : u_0(a_1) \neq v_0(b_{-1}) : u_0(b_{-1})$. On a, en outre, $c_2 - c_1 \neq m\pi\varepsilon$.

a. Supposons d'abord que, nul nombre c_1, c_2 n'est un multiple de π. On a alors les inégalités

$$a_r < t_0 < a_{r+1}, \quad t_0 \neq b_{-m+r+1}; \quad -r+1)\pi\varepsilon \lessgtr c_1 \lessgtr -r\pi\varepsilon,$$
$$(m-r-2)\pi\varepsilon \lessgtr c_2 \lessgtr (m-r)\pi\varepsilon; \quad c_2 \neq (m-r-1)\pi\varepsilon.$$

Considérons, en premier lieu, la situation caractérisée par les inégalités $c_1 \neq -\left(r+\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$, $\left(m-r-\frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon \neq c_2 \neq \left(m-r-\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$. Dans ces conditions on a les formules telles que (17_1), (17_2) et on en déduit, en tenant compte de l'inégalité $c_2 - c_1 \neq m\pi\varepsilon$,

$$X_0' = -\frac{\operatorname{tg} c_1 \cdot \operatorname{tg} c_2}{\operatorname{tg} c_1 - \operatorname{tg} c_2}\left\{\frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)} - \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})}\right\},$$

(21)

$$X_0'' = -2\frac{\operatorname{tg} c_1 \cdot \operatorname{tg} c_2}{[\operatorname{tg} c_1 - \operatorname{tg} c_2]^2}\left\{\frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)}\operatorname{tg} c_1 - \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})}\operatorname{tg} c_2\right\}\left\{\frac{v_0(a_1)}{u_0(a_1)} - \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})}\right\}.$$

Considérons, en second lieu, la situation caractérisée par l'égalité $c_1 = -\left(r+\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$. On a alors nécéssairement $\left(m-r-\frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon \neq c_2 \neq \left(m-r-\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$ et on trouve facilement, en se servant des formules (17_2), (18_1) que les valeurs X_0', X_0'' correspondantes sont déterminées par les mêmes formules (21), ces formules étant soumises à une légère modification consistant en division par $\operatorname{tg} c_1$ resp. $\operatorname{tg}^2 c_1$ et en remplacement du symbole $1 : \operatorname{tg} c_1$ par zéro.

Un résultat analogue se présente dans la situation si le nombre c_2 égale à $\left(m-r-\frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon$ ou bien $\left(m-r-\frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$.

On voit, en définitive, que dans le cas actuel a., il existe précisément une phase de l'équation (a) à la caractéristique aux limites (t_0, c_1, c_2).

b. Supposons maintenant que le nombre c_1, par exemple, est un multiple de π, de sorte que $t_0 = a_{r+1}$, $c_1 = -(r+1)\pi\varepsilon$, $(m-r-2)\pi\varepsilon \lessgtr c_2 \lessgtr (m-r-1)\pi\varepsilon$. Dans ces conditions on a les relations $0 = u_0(t_0) = u_0(a_{r+1}) = u_0(a_1) \neq u_0(b_{-1})$ qui conduisent, d'après (17_2), pour $c_2 \neq \left(m-r-\frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon$, à la formule

$$X_0'' = -2X_0'\left\{\frac{X_0'}{\operatorname{tg} c_2} - \frac{v_0(b_{-1})}{u_0(b_{-1})}\right\}, \tag{22}$$

la valeur X_0' étant indéterminée. On s'assure facilement, en tenant compte de (18_2) que la formule (22) reste valable même pour $c_2 = \left(m-r-\frac{3}{2}\right)\pi\varepsilon$, si l'on remplace le symbole $1 : \operatorname{tg} c_2$ par zéro.

On voit, par conséquent, que dans le cas actuel b. il existe précisément une famille de ∞^1 phases de l'équation (a) aux caractéristiques aux limites considérées.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

5. Applicabilité de phases.

15. Dans la suite nous considérons deux équations différentielles linéaires du second ordre du type jacobien

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A);$$

les fonctions q, Q sont supposées continues dans les intervalles ouverts $j = (a, b)$, $J = (A, B)$, les cas $a = -\infty$, $b = \infty$; $A = -\infty$, $B = \infty$ n'étant pas exclus.

Nous supposons que les équations (a), (A) sont du même type (fini) $m \geq 2$.

En ce qui concerne l'équation (a) nous reprenons les notations précédentes, tandis que nous choisissons pour l'équation (A) des notations analogues en lettres majuscules.

Nous avons, par conséquent, en particulier, les suites fondamentales des nombres conjugués appartenant aux équations (a), (A):

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}; \qquad b_{-1} > b_{-2} > \dots > b_{-m+1};$$
$$A_1 < A_2 < \dots < A_{m-1}; \qquad B_{-1} > B_{-2} > \dots > B_{-m+1}.$$

Ceci étant convenu, soient $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ des nombres arbitraires.

Nous appelons les nombres t_0, T_0 *mutuellement associés* s'il se présente l'un des cas suivants:

$$(23) \qquad \begin{aligned}
&1. \quad t_0 = a_{r+1}, \quad T_0 = A_{r+1};\\
&2. \quad t_0 = b_{-m+r+1}, \quad T_0 = B_{-m+r+1};\\
&3. \quad a_r < t_0 < b_{-m+r+1}, \quad A_r < T_0 < B_{-m+r+1};\\
&4. \quad b_{-m+r+1} < t_0 < a_{r+1}, \quad B_{-m+r+1} < T_0 < A_{r+1};
\end{aligned}$$

nous les appelons *inverses* l'un à l'autre dans les cas suivants:

$$(24) \qquad \begin{aligned}
&1. \quad t_0 = a_{r+1}, \quad T_0 = B_{-r-1};\\
&2. \quad t_0 = b_{-m+r+1}, \quad T_0 = A_{m-r-1};\\
&3. \quad a_r < t_0 < b_{-m+r+1}, \quad A_{m-r-1} < T_0 < B_{-r};\\
&4. \quad b_{-m+r+1} < t_0 < a_{r+1}, \quad B_{-r-1} < T_0 < A_{m-r-1}.
\end{aligned}$$

Dans ces formules l'indice r peut prendre n'importe quelle des valeurs $0, \ldots, m-1$ ($a_0 = a$, $b_0 = b$; $A_0 = A$, $B_0 = B$).

On s'assure facilement que, les nombres t_0, T_0 peuvent être mutuellement associés et en même temps inverses l'un à l'autre. Ceci se présente précisément dans le cas, si les équations (a), (A) sont spéciales, m paire, $t_0 = a_{\frac{m}{2}} = b_{-\frac{m}{2}}$, $T_0 = A_{\frac{m}{2}} = B_{-\frac{m}{2}}$; ou bien si les équations (a), (A) ne sont pas spéciales, m impaire, $a_{\frac{m-1}{2}} < t_0 < b_{-\frac{m-1}{2}}$; $A_{\frac{m-1}{2}} < T_0 < B_{-\frac{m-1}{2}}$; ou bien enfin, si les équations (a), (A) ne sont pas spéciales, m paire $b_{-\frac{m}{2}} < t_0 < a_{\frac{m}{2}}$, $B_{-\frac{m}{2}} < T_0 < A_{\frac{m}{2}}$.

En se servant des résultats du n. 5 on voit ceci:

Si les nombres t_0, T_0 sont mutuellement associés ils sont du même type s'ils sont inverses l'un à l'autre, ils sont aussi des types inverses.

16. Soient (t_0, c_1, c_2), (T_0, C_1, C_2) des triples admissibles quelconques par rapport aux équations (a), (A).

Nous appelons le triple (T_0, C_1, C_2) *directement (inversement) applicable* au triple (t_0, c_1, c_2) si l'on a $C_1 = c_1$, $C_2 = c_2$ ($C_1 = c_2$, $C_2 = c_1$).

Cette relation d'application est évidemment symétrique par rapport aux deux triples en question; on peut, par conséquent, parler de triples directement ou inversement applicables l'un à l'autre.

Il est facile de voir que, *si les triples* (t_0, c_1, c_2), (T_0, C_1, C_2) *sont applicables l'un à l'autre d'une des deux façons considérées, alors les équations* (a), (A) *sont toutes les deux spéciales ou bien les deux ne possèdent pas cette propriété.*

En effet, la condition d'applicabilité directe ou inverse conduit à l'égalité $C_1 - C_2 = \pm(c_1 - c_2)$. Si l'équation (a) par ex., est spéciale, on a $c_1 - c_2 = -m\pi\varepsilon$ et cette égalité entraîne $C_1 - C_2 = -m\pi(\pm\varepsilon)$; on voit que l'équation (A) résulte aussi spéciale. On obtient un résultat analogue dans le cas, si nulle équation (a), (A) ne possède la propriété en question.

Un autre résultat facile à démontrer est le suivant:

Les triples (t_0, c_1, c_2), (T_0, C_1, C_2) *sont directement (inversement) applicables l'un à l'autre alors et alors seulement si l'on a les égalités* $c_1 = C_1$, $c_2 = C_2$ ($c_1 = C_2$, $c_2 = C_1$) *et que les nombres* t_0, T_0 *sont mutuellement associés (inverses l'un à l'autre).*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la notion des triples admissibles et celle de l'applicabilité de telles triples.

En vertu de ce résultat il est aisé de déterminer tous les triples admissibles par rapport à l'équation (A), (T_0, C_1, C_2), qui sont directement (inversement) applicables au triple (t_0, c_1, c_2) supposé donné d'avance.

Il suffit, en effet, de prendre les nombres C_1, C_2 d'après les formules $C_1 = c_1$, $C_2 = c_2$ ($C_1 = c_2$, $C_2 = c_1$) et de choisir, conformément aux formules

(23) (24), le nombre T_0 de manière qu'il soit associé (inverse) à t_0. S'il s'agit de l'applicabilité directe (inverse) on choisit, par conséquent, dans les différents cas $t_0 = a_{r+1}$, $t_0 = b_{-m+r+1}$, $a_r < t_0 < b_{-m+r+1}$, etc., la valeur T_0 comme ça: $T_0 = A_{r+1}$, $T_0 = B_{-m+r+1}$, T_0 arbitraire dans l'intervalle (A_r, B_{-m+r+1}), etc. ($T_0 = B_{-r-1}$, $T_0 = A_{m-r-1}$, T_0 arbitraire dans l'intervalle (A_{m-r-1}, B_{-r}), etc.).

On voit, si t_0 est un nombre privilégié par rapport à l'équation (a), qu'il existe précisément un triple admissible, (T_0, C_1, C_2), qui est applicable directement au triple (t_0, c_1, c_2), et il existe de même précisément un triple applicable inversement. Si t_0 ne possède pas cette propriété, il existe une infinité de ∞^1 triples (T_0, C_1, C_2) qui sont applicables directement au triple (t_0, c_1, c_2) et de même ∞^1 de ceux applicables inversement.

17. Pour abrévier le langage il paraît utile d'introduire les définitions suivantes.

Étant donné un triple admissible par rapport à l'équation (a), (t_0, c_1, c_2), on convient d'appeler une *phase de l'équation* (A), $\mathfrak{A}$, *directement (inversement) applicable au triple* (t_0, c_1, c_2), si la caractéristique aux limites de la phase $\mathfrak{A}$ résulte directement (inversement) applicable au triple (t_0, c_1, c_2).

On convient d'appeler *deux phases des équations* (a), (A); α, $\mathfrak{A}$, *directement (inversement) applicables l'une à l'autre,* si les caractéristiques aux limites correspondantes résultent directement (inversement) applicables l'une à l'autre.

On voit facilement ceci: Si la phase $\mathfrak{A}$ résulte directement applicable à la phase α, ces phases vont toutes les deux constamment en croissant ou bien en décroissant; si la phase $\mathfrak{A}$ résulte inversement applicable à α, alors l'une d'entre les phases α, $\mathfrak{A}$ va constamment en croissaint et l'autre en décroissant. S'il existe de phases α, $\mathfrak{A}$ directement ou inversement applicables l'une à l'autre, alors les équations (a), (A) sont toutes les deux spéciales ou bien non-spéciales.

18. Étant donné un triple admissible par rapport à l'équation (a), (t_0, c_1, c_2), il est facile, en vertu des résultats précédents, de déterminer toutes les phases de l'équation (A), directement (inversement) applicables au triple en question.

Nous allons montrer, que, *toutes les phases de l'équation* (A) *directement (inversement) applicables au triple* (t_0, c_1, c_2) *forment une famille à deux ou bien à un paramètres, suivant que les équations* (a), (A) *sont spéciales ou non.*

En effet, soit $\mathfrak{A}$ une phase de l'équation (A), directement (inversement) applicable au triple (t_0, c_1, c_2) et (T_0, C_1, C_2) la caractéristique aux limites correspondante.

Nous distinguons deux cas suivant que les équations (a), (A) sont speciales ou non.

Supposons que les équations (a), (A) sont spéciales.

Si le nombre t_0 est privilégié, les nombres c_1, c_2 sont des multiples de π. Dans ce cas la caractéristique aux limites (T_0, C_1, C_2) est bien déterminée et les nombres C_1, C_2 sont eux aussi, des multiples de π. D'après le théorème du n. 14, toutes les phases de l'équation (A), dont les caractéristiques aux limites coïncident avec (T_0, C_1, C_2) forment une famille à deux paramètres. On voit que toutes les phases de l'équation (A) directement (inversement) applicables sur (t_0, c_1, c_2) forment une famille à deux paramètres.

Si le nombre t_0 n'est pas privilégié, les nombres c_1, c_2 ne sont pas des multiples de π. Dans ce cas (T_0, C_1, C_2) fait partie de la famille de ∞^1 triples admissibles par rapport à l'équation (A), directement (inversement) applicables au (t_0, c_1, c_2), et, en même temps, les nombres C_1, C_2 ne sont non plus des multiples de π. D'après le théorème du n. 14 toutes les phases de l'équation (A) dont les caractéristiques aux limites coïncident avec le même triple quelconque de la famille en question, forment une famille de ∞^1 phases. On voit que toutes les phases de l'équation (A) directement (inversement) applicables au (t_0, c_1, c_2) forment encore une famille à deux paramètres.

Supposons que les équations (a), (A) ne sont pas spéciales.

Si le nombre t_0 est privilégié, précisément un des nombres c_1, c_2 est un multiple de π. Dans ce cas, la caractérisque aux limites (T_0, C_1, C_2) est bien déterminée et précisément un des nombres C_1, C_2 est un multiple de π. D'après le théorème du n. 14, toutes les phases de l'équation (A), dont les caractéristiques aux limites coïncident avec (T_0, C_1, C_2), forment une famille à un paramètre. On voit que, toutes les phases de l'équation (A), directement (inversement) applicables au (t_0, c_1, c_2) forment une famille à un paramètre.

Si le nombre t_0 n'est pas privilégié, nul nombre c_1, c_2 n'est un multiple de π. Dans ce cas, (T_0, C_1, C_2) fait partie de la famille de ∞^1 triples admissibles par rapport à l'équation (A), directement (inversement) applicables au (t_0, c_1, c_2). D'après le théorème du n. 14, il existe précisément une phase de l'équation (A), dont la caractéristique aux limites coïncide avec le même triple quelconque de la famille en question. On voit que toutes les phases de l'équation (A), directement (inversement) applicables au (t_0, c_1, c_2) forment encore une famille à un paramètre.

La proposition se trouve établie.

6. Solution du problème proposé.

19. Nous sommes actuellement en mesure de donner la solution du problème posé au n. 1 de ce Mémoire.

Nous considérons, par conséquent, les deux équations

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A)$$

aux coefficients q, Q continus dans les intervalles $j = (a, b)$, $J = (A, B)$, les cas $a = -\infty$, $b = \infty$; $A = -\infty$, $B = \infty$ n'étant pas exclus. Nous supposons que ces équations sont des types finis (m), (M); m, $M \geq 2$.

A côté de ces équations nous envisageons les équations différentielles non-linéaires du 3^{me} ordre

$$(b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \qquad\qquad -\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T) \qquad (B)$$

Il s'agit de reconnaître si ces équations admettent des solutions complètes et, dans l'affirmative, de déterminer la généralité de ces solutions.

Il suffit, naturellement, de resoudre ce problème pour une seule équation (b), (B), par ex. pour l'équation (b).

Pour commencer nous allons montrer que, si l'équation (b) admet de solutions complètes, les équations (a), (A) sont du même type.

En effet, admettons l'existence d'une solution complète de l'équation (b), $X(t)$. Rappelons que la fonction $X(t)$ est définie pour $t \in j$ et qu'elle va constamment en croissant ou bien en décroissant; ses valeurs recouvrent l'intervalle J tout entier.

Supposons, contrairement à la proposition, qu'on ait, par ex., $M > m$.

L'équation (A) étant du type (M), il existe une intégrale $Y(t)$ de cette équation qui a précisément M racines, soit $T_1 = X(t_1), \ldots, T_M = X(t_M)$. Les nombres $t_1, \ldots, t_M \in j$ sont, évidemment, différents l'un de l'autre. Or, nous savons que la fonction $y(t)$ composée d'après la formule $y(t) = Y[X(t)] : \sqrt{|X'(t)|}$ représente une intégrale de l'équation (a). On voit que cette intégrale s'annule en $t_1, \ldots, t_M$, ce qui est absurde, étant donné que l'équation (a) est du type (m) $(m < M)$.

Considérons, en second lieu, une fonction, $X(t)$, définie dans l'intervalle j, prenant dans un nombre $t_0 \in j$ une certaine valeur $T_0 = X(t_0) \in J$.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

Pour que la fonction X représente une solution complète croissante (décroissante) de l'équation (b), il faut et il suffit qu'elle vérifie identiquement, dans l'intervalle j, une relation de la forme

$$(25) \qquad \alpha(t) = \mathfrak{A}[X(t)];$$

dans cette formule α désigne une phase de l'équation (a), choisie arbitrairement, s'annulant en t_0, en $\mathfrak{A}$ une phase de l'équation (A) s'annulant en T_0, directement (inversement) applicable sur α.

Démonstration. - 1. Supposons que la fonction X représente une solution complète croissante (décroissante) de l'équation (b).

Soit α une phase de l'équation (a) s'annulant en t_0; nous la supposons, par ex., croissante. Or, X étant une solution de l'équation (b), prenant en t_0 la valeur T_0, il existe une phase $\mathfrak{A}(T)$ de l'équation (A) s'annulant en T_0, croissante (décroissante) et telle que la relation (25) résulte vérifiée identiquement dans l'intervalle j ([3]). Puisque la fonction X va en croissant (en décroissant) et ses valeurs, pour $t \in j$, recouvrent l'intervalle J tout entier, la relation (25) entraîne les égalités $c_1 = C_1$, $c_2 = C_2$ ($c_1 = C_2$, $c_2 = C_1$), les c_1, c_2; C_1, C_2 ayant, naturellement, la signification usuelle. On voit que la phase $\mathfrak{A}$ résulte directement (inversement) applicable sur α.

2. Supposons que, la fonction X satisfait identiquement, dans l'intervalle j, à une relation de la forme (25), les phases α, $\mathfrak{A}$ ayant les propriétés indiquées dans le théorème.

Dans ces conditions la fonction X s'exprime par la formule

$$X(t) = \mathfrak{A}^{-1}[\alpha(t)],$$

$\mathfrak{A}^{-1}$ étant, manifestement, la fonction inverse de $\mathfrak{A}$. Or, puisque la phase $\mathfrak{A}$ est directement (inversement) applicable sur α, la formule précédente montre que, les valeurs de X recouvrent, constamment en croissant (en décroissant), l'intervalle J tout entier. On voit de plus, en vertu des résultats du n. 9, que la fonction X résulte de la classe C_3.

Ceci étant, on a, en égalant les dérivées schwarziennes des deux membres de la relation (25)

$$\{\alpha,\ t\} = \{\mathfrak{A}[X(t)],\ t\} = \{\mathfrak{A},\ X(t)\}\, X'^2(t) + \{X,\ t\}$$

et puis, en remplaçant les quantités $\{\alpha,\ t\}$, $\{\mathfrak{A},\ X(t)\}$ par les valeurs correspondantes tirées de la formule (10),

$$q(t) + \alpha'^2(t) = (Q[X(t)] + \mathfrak{A}'^2[X(t)])X'^2(t) - \{X,\ t\},$$
$$q(t) + \alpha'^2(t) = -\{X,\ t\} + Q[X(t)]X'^2(t) + \mathfrak{A}[X(t)]'^2,$$

d'où il résulte, en vertu de la formule (25)

$$-\{X,\ t\} + Q[X(t)] \cdot X'^2(t) = q(t).$$

On voit que la fonction X représente une solution complète de l'équation (b).

La proposition se trouve ainsi démontrée.

Le résultat précédent et ceux du n. 16 entraînent que, si l'équation (b) admet des solutions complètes, les équations (a), (A) sont toutes les deux spéciales ou bien non-spéciales.

Nous voilà arrivés à la solution suivante du problème proposé:

([3]) O. Borůvka, l. c., p. 339.

Pour que les équations (a), (A) *de types finis, admettant des points conjugués, soient complètement transformables l'une à l'autre, il faut et il suffit qu'elles soient du même type et toutes les deux spéciales ou bien non-spéciales.*

Si ces conditions sont vérifiées, il existe toujours de solutions complètes constamment croissantes (décroissantes) de l'équation (b), $X(t)$, *qui réalisent la transformation et qui prennent, dans un nombre* $t_0 \in j$ *choisi arbitrairement une valeur* $T_0 \in J$ *donnée d'avance; cette valeur* T_0 *est assujetie à la seule condition d'être associée (inverse) à la valeur* t_0.

On obtient toutes les solutions complètes croissantes (décroissantes), $X(t)$, *en choisissant à volonté une phase de l'équation* (a), $\alpha(t)$, *s'annulant en* t_0, *et en prenant les différentes phases de l'équation* (A), $\mathfrak{A}(T)$, *s'annulant en* T_0, *qui sont directement (inversement) applicables sur* α; *les solutions en question sont alors données par la formule*

$$X(t) = \mathfrak{A}^{-1}[\alpha(t)].$$

Dans le cas des équations (a), (A) *spéciales il existe, en somme, une famille de* ∞^2 *solutions complètes de l'équation* (b) *qui sont croissantes et autant de solutions complètes décroissantes. Si les équations* (a), (A) *ne sont pas spéciales, il existe, en somme, une famille de* ∞^1 *solutions complètes croissantes et autant de solutions complètes décroissantes.*

Remarquons que les résultats précédents s'appliquent, manifestement, aussi dans le cas s'il s'agit de transformer complètement une équation différentielle du second ordre d'un type fini, jacobien, admettant des points conjugués, en elle même. Une telle équation admet toujours, par conséquent, une famille dépendant de deuxou bien d'un paramètres de transformations complètes en elle même qui sont croissantes et autant de celles qui sont décroissantes.

Ajoutons que, dans ce cas, les solutions complètes de l'équation (b) forment un groupe continu à deux ou bien à un paramètres.