Otakar Borůvka
Theorie rozkladů v množině. Část I

Spisy přír. fak. MU, č. 278, 1946, 37 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500066

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1946 ČÍS. 278

THEORIE ROZKLADŮ V MNOŽINĚ

ČÁST I.

(THÉORIE DES DÉCOMPOSITIONS DANS UN ENSEMBLE)
(PREMIÈRE PARTIE)

NAPSAL
OTAKAR BORŮVKA

S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

THEORIE ROZKLADŮ V MNOŽINĚ.

ČÁST I.

NAPSAL O. BORŮVKA.

Provedeno s podporou Národní rady badatelské.

Avec un résumé en français.

Tento spis jest první částí větší práce obsahující theorii rozkladů v množině, kterou jsem vypracoval se zřetelem k tomu, aby byla základem obecné theorie grupoidů. Oproti mým dřívějším studiím o rozkladech množin¹) jsou tyto úvahy obecnější tím, že se v definici rozkladu nepožaduje, aby rozklad množinu pokrýval. Z oněch studií jsem zde přejal jenom základní myšlenku, podřaditi theorii rozkladů v množině obecné theorii svazů zavedením vhodných svazových operací, přiřazujících k systémům rozkladů vždycky dva význačné rozklady, t. zv. nejmenší zákryt a největší zjemnění systému. V důsledku zmíněného zobecnění bylo nutné definice těchto operací pozměniti, což se podstatně uplatňuje v celé theorii. Zejména, na rozdíl od systémů rozkladů množiny, nemá každý systém rozkladů v množině největšího zjemnění a studium systémů, které největší zjemnění mají, vede na t. zv. trsové systémy, zaujímající v této theorii význačné místo.

Obsah spisu jest rozdělen do tří kapitol, z nichž první jedná o kongruencích a svazech, druhá o základních vlastnostech rozkladů v množině a třetí o t. zv. přidružených rozkladech čili sociech. Obsah kapitoly o kongruencích a svazech není ovšem nový, avšak zpracoval jsem jej se zřetelem na použití v theorii, která následuje, a po stránce formální odlišně od jiných autorů. V druhé kapitole jsou studovány pojmy nejmenšího zákrytu a největšího zjemnění systémů rozkladů v souvislosti s theorií svazů. Dále jsou tam studovány t. zv. majorantní a minorantní systémy rozkladů, systémy trsové a spřažené a výsledky jsou aplikovány v theorii grup. Třetí kapitola, obsahující theorii rozkladů přidružených, má zvláštní důležitost pro theorii grupoidů. Základním pojmem jest kartézské zobrazení rozkladů, které ke každému rozkladu v množině přiřazuje rozklad přidružený čili jeho socius, t. j. jistý rozklad v kartézském čtverci množiny. Pojmy studované v druhé kapitole jsou vzhledem ke kartézskému zobrazení invariantní, až na nejmenší zákryt, který se zachovává jenom ve zvláštních případech, na př. když jde o rozklady na množině. V těchto případech jest kartézské zobrazení svazovým isomorfismem.

¹) *O rozkladech množin* (Rozpravy II. tř. České akademie, roč. LIII, č. 23 [1944]).

I. Kongruence a svazy.

1. Kartézské součiny. Důležitou úlohu v našich úvahách mají kartézské součiny.

Nechť A, B značí libovolné neprázdné množiny.

Kartézským součinem množiny A s množinou B rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic (α, β), kde $\alpha \in A$, $\beta \in B$; označujeme jej symbolem $A \times B$. A (B) jest první (druhý) *činitel* nebo *faktor* kartézského součinu $A \times B$, α (β) jest první (druhá) *souřadnice* uspořádané dvojice (α, β). Zejména jest *kartézská druhá mocnina* čili *kartézský čtverec* množiny A, $A \times A$, množina všech uspořádaných dvojic (α, β), kde α, $\beta \in A$; místo $A \times A$ píšeme někdy kratčeji $A\times$. Když A jest součtem množin A_1, A_2, ... a množina B součtem množin B_1, B_2, ..., pak $A \times B$ jest součtem množin $A_\mu \times B_\nu$, kde A_μ (B_ν) značí jednotlivé sčítance množiny A (B). Když $A' \subset A$, $B' \subset B$ jsou neprázdné podmnožiny, pak ovšem platí $A' \times B' \subset A \times B$. Podmnožina $A' \times B'$ se vyznačuje tím, že druhé (první) souřadnice všech jejích prvků, jejichž první (druhá) souřadnice jest stejná, tvoří množinu B' (A'). Odtud plyne, že část množiny $A \times B$ není nutně kartézským součinem části množiny A s částí množiny B.

2. Kongruence. Všude v dalším značí písmeno Γ libovolnou neprázdnou množinu.

Část kartézského čtverce $\Gamma\times$, K, nazývá se *kongruence na* Γ, když má tyto vlastnosti:

1. Pro $\alpha \in \Gamma$ jest $(\alpha, \alpha) \in K$,
2. když (α, β), $(\beta, \gamma) \in K$, pak také $(\alpha, \gamma) \in K$.

První vlastnost vyjadřujeme tím, že kongruence jest *reflexivní* a druhou, že jest *transitivní*. Když $(\alpha, \beta) \in K$, pak pravíme, že prvek β jest kongruentní s α v kongruenci K.

Zejména máme na Γ dvě význačné kongruence, a to tak zvanou kongruenci *největší* a *nejmenší*. Největší kongruence na Γ jest celá množina $\Gamma\times$; jest největší v tom smyslu, že každá kongruence na Γ jest její částí. Nejmenší kongruence na Γ se skládá ze všech prvků (α, α), kde $\alpha \in \Gamma$; jest nejmenší, neboť jest částí každé kongruence na Γ (podle 1.). Největší kongruenci označujeme někdy symbolem $K_{\max}$ a nejmenší $K_{\min}$.

Nechť K značí libovolnou kongruenci na Γ.

Kongruencí K jsou ke každému prvku $\alpha \in \Gamma$ přiřazeny dvě podmnožiny v Γ, které nazýváme *horní* a *dolní třída* prvku α v kongruenci Γ, stručněji: horní a dolní třída. A sice jest horní třída prvku α množina všech prvků v Γ, které jsou kongruentní s α; jinými slovy, jest to množina druhých souřadnic všech prvků v K, jejichž první souřadnice jest α. Dolní třída prvku α jest pak množina všech prvků v Γ, s nimiž jest prvek α kongruentní, čili jest to množina prvních souřadnic všech prvků v K, jejichž druhá souřadnice jest α. Z těchto definic vidíme, že když prvek α jest v horní (dolní) třídě prvku β, pak prvek β jest v dolní (horní) třídě prvku α. Horní (dolní) třída každého prvku α jest tedy množina všech prvků v Γ, jejichž dolní (horní) třídy obsahují prvek α. Horní i dolní třída každého prvku α obsahuje alespoň tento prvek α, jak plyne z 1. Odtud zejména vidíme, že žádná třída není prázdná a systém všech horních nebo dolních tříd pokrývá Γ a dále, že horní a dolní třída každého prvku jsou incidentní, t. j. mají společný alespoň jeden prvek. Dále obsahuje horní (dolní) třída každého prvku jako části horní (dolní) třídy všech prvků, které v ní leží, jak plyne z 2. Odtud vidíme, že horní (dolní) třída libovolného prvku α jest obsažena v horní (dolní) třídě každého prvku β ležícího v dolní (horní) třídě prvku α, neboť prvek α jest v horní (dolní) třídě prvku β. Naopak, když ke každému prvku v Γ jest přiřazena jistá podmnožina v Γ, která obsahuje tento prvek a dále obsahuje jako části všechny podmnožiny přiřazené k jednotlivým prvkům, které v ní leží, pak systém těchto podmnožin jest systémem horních nebo dolních tříd v jisté kongruenci. Tato kongruence jest dána v prvním případě tím, že s každým prvkem $\alpha \in \Gamma$ jsou kongruentní právě ony prvky, které leží v podmnožině přiřazené k α a v druhém případě tím, že prvek α jest právě s těmito prvky kongruentní. V prvním (druhém) případě jest dolní (horní) třídou prvku α množina všech prvků v Γ, k nimž přiřazené podmnožiny obsahují prvek α.

Kongruencí K jest určena další kongruence na Γ, t. zv. kongruence *inversní* ke K, kterou označujeme K^{-1}. Její prvky vzniknou z prvků kongruence K výměnou pořádku obou souřadnic každého prvku. Podle této definice jest tedy $(\alpha, \beta) \in K^{-1}$, když a jen když platí $(\beta, \alpha) \in K$. Horní (dolní) třída každého prvku $\alpha \in \Gamma$ v kongruenci K jest dolní (horní) třídou prvku α v kongruenci K^{-1}. Kongruence inversní ke K^{-1} jest zřejmě původní kongruence K. Rovněž jest zřejmé, že platí rovnosti $K^{-1}_{\max} = K_{\max}$, $K^{-1}_{\min} = K_{\min}$.

Pro náš účel mají zvláštní význam t. zv. kongruence symetrické a antisymetrické.

3. Kongruence symetrické. Libovolná kongruence K na Γ se nazývá *symetrická*, když má tuto vlastnost:

S) když $(\alpha, \beta) \mathrm{e} K$, pak také $(\beta, \alpha) \mathrm{e} K$.

Tato vlastnost vyjadřuje symetrii kongruence K v tom smyslu, že z každých dvou prvků v Γ buď žádný nebo každý jest kongruentní s druhým. Když pak β jest kongruentní s α, píšeme $\beta \equiv \alpha$ (K) nebo stručněji $\beta \equiv \alpha$. Máme pak ovšem také $\alpha \equiv \beta$ a pravíme, že prvky α, β jsou kongruentní.

Nechť K značí symetrickou kongruenci na Γ.

Z definice symetrie plyne, že když některý prvek $\alpha \mathrm{e} \Gamma$ jest v horní (dolní) třídě některého prvku $\beta \mathrm{e} \Gamma$, pak β jest v horní (dolní) třídě prvku α a tedy α jest současně v dolní (horní) třídě prvku β. Odtud vychází, že horní a dolní třída každého prvku splývají. Z toho důvodu mluvíme stručně o *třídách*, nerozlišujíce, zda jde o třídy horní nebo dolní. Z předcházejících úvah o kongruencích vidíme, že třída každého prvku α jednak obsahuje třídu každého prvku, který v ní leží, a jednak jest v této třídě obsažena. Odtud plyne, že třída každého prvku ležícího ve třídě prvku α splývá s třídou prvku α. Důsledkem toho pak jest, že třídy každých dvou prvků $\alpha, \beta \mathrm{e} \Gamma$ jsou buď disjunktní nebo splývají, neboť mají-li společný prvek $\gamma \mathrm{e} \Gamma$, pak jeho třída splývá s třídou prvku α i s třídou prvku β a tudíž jsou tyto třídy identické. Systém všech podmnožin v Γ, z nichž každá jest třídou některého prvku v kongruenci K, jest tedy jistý rozklad R na Γ.[2]) Podle jeho definice jsou každé dva prvky v Γ ležící v témže prvku rozkladu R kongruentní, kdežto žádné dva, které v témže prvku neleží, nejsou. Libovolný výběr v rozkladu R, t. j. tedy podmnožina v Γ, mající s každým prvkem rozkladu R společný právě jeden prvek v Γ, jest tedy systémem *representantů kongruence* K, v tom smyslu, že každý prvek v Γ jest kongruentní právě s jedním representantem. Naopak patří ke každému rozkladu na Γ jistá symetrická kongruence, jejíž třídy splývají s prvky rozkladu. Tato kongruence jest dána tím, že dva prvky v Γ jsou kongruentní, když a jen když leží v témže prvku rozkladu.

Kongruence inversní ke K jest opět kongruence K, takže platí $K \cap K^{-1} = K$. Obě extrémní kongruence $K_{\max}$ a $K_{\min}$ jsou zřejmě symetrické.

---

[2]) Definice rozkladu na množině jest uvedena v odst. 9.

4. Kongruence antisymetrické. Libovolná kongruence K na Γ se nazývá *antisymetrická*, když má tuto vlastnost:

$$\text{AS)} \quad \text{když } (\alpha, \beta), (\beta, \alpha) \in K, \text{ pak } \alpha = \beta.$$

Tato vlastnost vyjadřuje antisymetrii kongruence K v tom smyslu, že z každých dvou různých prvků v Γ buď žádný nebo právě jenom jeden jest kongruentní s druhým. Když pak prvek β jest kongruentní s prvkem α, píšeme $\alpha \leqslant \beta$ (K) nebo $\beta \geqslant \alpha$ (K), stručněji: $\alpha \leqslant \beta$ nebo $\beta \geqslant \alpha$.

Nechť K značí antisymetrickou kongruenci na Γ.

Podle vlastnosti AS mají horní a dolní třída každého prvku $\alpha \in \Gamma$ společný právě jenom tento prvek α. Odtud plyne, že horní (dolní) třída každého prvku β ležícího v horní (dolní) třídě některého prvku α, která, jak víme, jest částí horní (dolní) třídy prvku α, obsahuje prvek α jen když $\beta = \alpha$. Zejména jsou tedy horní (dolní) třídy dvou různých prvků v Γ různé. Naopak, když ke každému prvku $\alpha \in \Gamma$ jest přiřazena jistá podmnožina v Γ, která obsahuje prvek α a dále obsahuje jako části všechny podmnožiny přiřazené k jednotlivým prvkům, které v ní leží, při čemž žádná z nich, s výjimkou podmnožiny přiřazené k α neobsahuje prvek α, pak systém těchto podmnožin jest systémem horních nebo dolních tříd v jisté antisymetrické kongruenci. Tato kongruence jest dána v prvním případě tím, že s každým prvkem α jsou kongruentní právě ony prvky, které leží v podmnožině přiřazené k α a v druhém případě tím, že prvek α jest právě s těmito prvky kongruentní.

Inversní kongruence K^{-1} jest také antisymetrická a máme $K \cap K^{-1} = K_{\min}$.

Podle Hausdorffa nazývá se množina Γ *částečně uspořádaná*, když jest dáno pravidlo, t. zv. *částečné uspořádání*, které ke každému prvku $\alpha \in \Gamma$ přiřazuje jisté prvky v Γ, splňujíc přitom určité podmínky. Zaveďme symbol $\alpha \twoheadrightarrow \beta$ k vyjádření toho, že pravidlo přiřazuje prvek β k prvku α. Pak ony podmínky jsou tyto:

1. Pro $\alpha \in \Gamma$ jest $\alpha \twoheadrightarrow \alpha$ (reflexivnost),
2. když $\alpha \twoheadrightarrow \beta$, $\beta \twoheadrightarrow \gamma$, pak $\alpha \twoheadrightarrow \gamma$ (transitivnost),
3. když $\alpha \twoheadrightarrow \beta$, $\beta \twoheadrightarrow \alpha$, pak $\alpha = \beta$ (antisymetrie).

Odtud vidíme, že každé částečné uspořádání množiny Γ určuje na ní jistou antisymetrickou kongruenci, totiž kongruenci skládající se z prvků (α, β), kde α značí jednotlivé prvky v Γ a β ony prvky, které jsou k α přiřazeny. Pro tuto kongruenci má symbol $\twoheadrightarrow$ význam symbolu $\leqslant$. Naopak jest každou antisymetrickou kongruencí na Γ dáno jisté částečné uspořádání množiny Γ, totiž ono, které ke každému prvku $\alpha \in \Gamma$ přiřazuje všechny prvky β, které jsou kongruentní s α. Pro toto částečné uspořádání má symbol $\leqslant$ význam symbolu $\rightarrow$. Ke každému částečnému uspořádání množiny Γ existuje částečné uspořádání inversní, které k prvku α přiřazuje prvek β tehdy a jen tehdy, když původní částečné uspořádání přiřazuje k prvku β prvek α. Příslušná antisymetrická kongruence jest ovšem inversní k antisymetrické kongruenci, která patří k částečnému uspořádání původnímu.

5. Horní a dolní hranice. Všechny další úvahy v této kapitole I., zejména pojmy horní a dolní hranice a pojem svazu, vztahují se podstatně k pojmu antisymetrické kongruence.

Nechť jest dána antisymetrická kongruence na Γ, K.

Nechť $A \subset \Gamma$ značí libovolnou neprázdnou podmnožinu. Prvek $\varphi \in \Gamma$ se nazývá *horní hranice* množiny A (vzhledem ke kongruenci K), když jest kongruentní s každým prvkem v A a když s ním jest kongruentní každý prvek v Γ, který má tuto vlastnost. Jinými slovy, když platí vztahy $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ a to pro všechny prvky $\alpha \in A$ a pro všechny prvky $\beta \in \Gamma$ hovící vztahu $\alpha \leqslant \beta$. Podle této definice jest tedy horní hranice množiny A charakterisována tím, že jest prvkem v průniku horních tříd jednotlivých prvků množiny A a jeho horní třída tento průnik obsahuje. Horní hranici množiny A označujeme obvykle symbolem $[A]$, anebo, máme-li prvky množiny A označeny $\alpha, \beta, \ldots$, symbolem $[\alpha\beta\ldots]$. Všimněme si, že pro $\alpha \in \Gamma$ platí $[\alpha] = \alpha$.

Především snadno zjistíme, že *horní třída horní hranice množiny A jest průnikem horních tříd jednotlivých prvků množiny A*. Vskutku, řekli jsme již, že horní hranice množiny A, $[A]$, jest prvkem v průniku horních tříd jednotlivých prvků množiny A a jeho horní třída tento průnik obsahuje. Avšak z první vlastnosti plyne, že horní třída prvku $[A]$ leží v průniku horních tříd jednotlivých prvků množiny A, neboť horní třída každého prvku v Γ obsahuje jako části horní třídy všech prvků, které v ní leží. Odtud a z druhé vlastnosti plyne naše tvrzení.

Dále vidíme, že *horní hranice množiny A může býti nejvýše jedna*. Neboť jsou-li $\varphi, \psi \in \Gamma$ horní hranice množiny A, pak podle předcházejících výsledků jejich horní třídy splývají a tedy $\varphi = \psi$.

Nechť nyní $S_1 = \{a_1, b_1, \ldots\}$, $S_2 = \{a_2, b_2, \ldots\}$ značí libovolné systémy podmnožin v A, které oba množinu A pokrývají. Ukážeme, že *platí rovnost*

$$[[a_1]\,[b_1]\ldots] = [[a_2]\,[b_2]\ldots],$$

existují-li všechny horní hranice vyskytující se v tomto vzorci. Vskutku, předpokládejme, že ony horní hranice existují. Protože systém S_1 (S_2) pokrývá množinu A, jest průnik průniků horních tříd všech prvků množiny A ležících vždy v jednom prvku systému S_1 (S_2) průnikem horních tříd všech prvků množiny A. Průnik průniků horních tříd všech prvků množiny A ležících vždy v jednom prvku systému S_1 jest tedy roven průniku průniků horních tříd všech prvků množiny A ležících vždy v jednom prvku systému S_2. Avšak první průnik jest horní třídou prvku $[[a_1][b_1]\dots]$ a druhý jest horní třídou prvku $[[a_2][b_2]\dots]$. Z rovnosti obou průniků plyne tedy rovnost horních tříd prvků na obou stranách hořejší rovnice a tedy i rovnost těchto prvků.

Všimněme si tohoto zvláštního případu: *Pro každý systém podmnožin v A, $\{a, b, \dots\}$, který množinu A pokrývá, platí rovnost*

$$[A] = [[a][b]\dots],$$

existují-li všechny tyto horní hranice. Dále si všimněme, že *pro všechny prvky $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ platí rovnost*

$$[[\alpha\beta]\gamma] = [\alpha[\beta\gamma]],$$

jestliže existují všechny horní hranice vyskytující se v tomto vzorci.

Pokud jde o *dolní* třídu prvku $[A]$ jest situace tato: Při popisu vlastností kongruencí jsme viděli, že dolní třída každého prvku ležícího v horní třídě libovolného prvku $\beta \in \Gamma$ obsahuje dolní třídu prvku β. Odtud plyne, že dolní třída každého prvku ležícího v průniku horních tříd jednotlivých prvků množiny A obsahuje dolní třídy všech těchto prvků a tedy také jejich součet. Naopak, když dolní třída některého prvku $\beta \in \Gamma$ obsahuje součet dolních tříd všech prvků množiny A, pak každý prvek $\alpha \in A$ jest v dolní třídě prvku β a tedy prvek β jest v průniku horních tříd jednotlivých prvků množiny A, t. j. v horní třídě prvku $[A]$. Z těchto poznámek plyne, že *dolní třída prvku $[A]$ obsahuje součet dolních tříd všech prvků množiny A a ze všech dolních tříd prvků v Γ, které mají tuto vlastnost jest nejmenší,* v tom smyslu, že jest částí dolní třídy každého prvku v Γ, která obsahuje onen součet. Současně vidíme, že dolní třída prvku $[A]$ jest součtem dolních tříd jednotlivých prvků množiny A tehdy a jen tehdy, když horní třída každého prvku v této dolní třídě jest incidentní s množinou A.

Podobně jako horní hranici definujeme dolní hranici množiny A: Prvek $\psi \in \Gamma$ se nazývá *dolní hranice* množiny A (vzhledem ke kongruenci K), když s ním jest kongruentní každý prvek v A a když jest kongruentní s každým prvkem v Γ, který má tuto vlastnost. Jinak řečeno, když platí vztahy $\beta \leqslant \psi \leqslant \alpha$, a to pro všechny prvky $\alpha \varepsilon A$ a pro všechny prvky $\beta \varepsilon \Gamma$ hovící vztahu $\beta \leqslant \alpha$. Podle této definice jest tedy dolní hranice množiny A charakterisována tím, že jest prvkem v průniku dolních tříd jednotlivých prvků množiny A a jeho dolní třída tento průnik obsahuje. Dolní hranici množiny A označujeme obvykle symbolem (A), anebo, máme-li prvky množiny A označeny $\alpha, \beta, \ldots$, symbolem $(\alpha \beta \ldots)$. Všimněme si, že pro $\alpha \varepsilon \Gamma$ platí $(\alpha) = \alpha$.

Porovnáme-li definice horní a dolní hranice, vidíme, že horní (dolní) hranice množiny A vzhledem ke K jest dolní (horní) hranicí téže množiny A vzhledem ke K^{-1}. Odtud plyne, že pro dolní hranici množiny A platí věty obdobné těm, které jsme odvodili pro horní hranici. *Dolní třída dolní hranice množiny A jest* tedy *průnikem dolních tříd jednotlivých prvků množiny A a může býti nejvýše jedna.* Dále vidíme, že *pro každé dva systémy podmnožin v A, které množinu A pokrývají, $S_1 = \{a_1, b_1, \ldots\}$, $S_2 = \{a_2, b_2, \ldots\}$, platí rovnost*

$$((a_1)(b_1)\ldots) = ((a_2)(b_2)\ldots),$$

existují-li všechny tyto prvky. Odtud zejména plyne, že *pro každý systém podmnožin v A, $\{a, b, \ldots\}$, který množinu A pokrývá, platí*

$$(A) = ((a)(b)\ldots),$$

a dále máme pro $\alpha, \beta, \gamma \varepsilon \Gamma$, rovnost

$$((\alpha\beta)\gamma) = (\alpha(\beta\gamma)),$$

jestliže existují všechny dolní hranice vyskytující se v těchto vzorcích. Také si všimněme, že *horní třída prvku (A) obsahuje součet horních tříd všech prvků množiny A a ze všech horních tříd prvků v Γ, které mají tuto vlastnost, jest nejmenší,* v tom smyslu, že jest částí horní třídy každého prvku v Γ, která obsahuje onen součet. Horní třída prvku (A) jest součtem horních tříd prvků množiny A, když a jen když dolní třída každého prvku ležícího v této horní třídě jest incidentní s množinou A.

Mezi horní a dolní hranicí množiny A jsou ovšem jisté vztahy. Především platí vztah

$$(A) \leqslant [A],$$

neboť prvek (A) jest v dolní třídě každého prvku $\alpha \varepsilon A$ a prvek $[A]$ v horní, a tedy horní třída prvku (A) obsahuje prvek $[A]$.

Nechť dále B značí libovolnou neprázdnou část množiny A, takže $B \subset A$. *Platí rovnosti*

$$([A]\,[B]) = [B], \qquad [(A)\,(B)] = (B),$$

jestliže existují všechny horní a dolní hranice vyskytující se v těchto vzorcích. Stačí ovšem, abychom dokázali na př. první rovnost. Protože

$B \subset A$, jest průnik horních tříd všech prvků množiny A obsažen v průniku horních tříd všech prvků množiny B. Existují-li tedy prvky $[A]$, $[B]$, leží prvek $[A]$ v horní třídě prvku $[B]$ a tedy dolní třída prvku $[A]$ obsahuje dolní třídu prvku $[B]$. Průnik dolních tříd prvků $[A]$, $[B]$ jest tedy dolní třída prvku $[B]$ a současně jest dolní třídou prvku $([A]\,[B])$, v případě, že tento prvek existuje. Odtud plyne první rovnost.

Všimněme si tohoto zvláštního případu: *Pro všechny prvky* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *platí rovnosti*

$$(\alpha\,[\alpha\beta]) = \alpha, \quad [\alpha\,(\alpha\beta)] = \alpha,$$

jestliže existují příslušné prvky.

6. Majorantní a minorantní množiny. Nechť jest dána antisymetrická kongruence na Γ, K. Nechť $A, B \subset \Gamma$ značí libovolné neprázdné podmnožiny.

Množina A (B) se nazývá *majorantní* (*minorantní*) vzhledem k B (A) v kongruenci K, stručněji: majorantní (minorantní) vzhledem k B (A), když každý prvek v A jest kongruentní s některým prvkem v B a když současně s každým prvkem v B jest kongruentní některý prvek v A; jinými slovy, když dolní třída každého prvku v A jest incidentní s B a horní třída každého prvku v B s A.

Nechť množina A jest majorantní vzhledem k B.

Platí vztahy

$$[A] \geqslant [B],$$
$$(A) \geqslant (B),$$

existují-li obě horní nebo dolní hranice. Vskutku, ke každému prvku $\beta \in B$ existuje podle předpokladu prvek $\alpha \in A$ takový, že $\beta \leqslant \alpha$. Existuje-li však prvek $[A]$, máme $\alpha \leqslant [A]$ a tedy platí $\beta \leqslant [A]$; odtud plyne $[B] \leqslant [A]$, jestliže existuje prvek $[B]$. Podobně existuje ke každému prvku $\alpha \in A$ prvek $\beta \in B$ takový, že $\alpha \geqslant \beta$. Existuje-li prvek (B), máme $\beta \geqslant (B)$ a tedy platí $\alpha \geqslant (B)$; odtud plyne $(A) \geqslant (B)$, jestliže existuje prvek (A).

P o z n á m k a. V pojmu majorantních a minorantních množin není obsažen předpoklad, že kongruence K jest antisymetrická, takže se tento pojem může rozšířiti na všechny kongruence. Nezdá se však, že by toto zobecnění v celé šíři mělo význam, protože na př. v případě kongruence symetrické jest zřejmé, že je-li množina A majorantní vzhledem k B, pak jest současně minorantní. Naproti tomu má pojem majorantních a minorantních množin v případě kongruencí antisymetrických pro naše další úvahy značný význam.

7. Svazy. Nechť jest dána antisymetrická kongruence na Γ, K. Každá jednobodová podmnožina $\{\alpha\} \subset \Gamma$, kde tedy $\alpha \in \Gamma$, má ovšem horní i dolní hranici (vzhledem ke K), které obě jsou rovny α. Další případ, který však již není obecný, jest ten, že i každá dvoubodová podmnožina v Γ má horní i dolní hranici. Je-li tomu tak, pak se Γ nazývá *svaz vzhledem ke K*, stručněji: *svaz*. Nejzvláštnější případ jest ten, že *každá* neprázdná podmnožina v Γ má horní a dolní hranici a pak se Γ nazývá *úplný svaz vzhledem ke K*, kratčeji: *úplný svaz*.

Když tedy Γ jest úplný svaz, pak ke každé neprázdné podmnožině $A \subset \Gamma$ jsou přiřazeny jisté dva prvky v Γ, a to horní hranice $[A]$ a dolní hranice (A) množiny A. Přitom platí tyto vztahy, jak jsme viděli v odst. 5:

$$
\begin{array}{ll}
[\alpha] = \alpha, & (\alpha) = \alpha, \\
[[a_1][b_1]\ldots] = [[a_2][b_2]\ldots], & ((a_1)(b_1)\ldots) = ((a_2)(b_2)\ldots), \\
(\alpha\,[\alpha\beta]) = \alpha, & [\alpha\,(\alpha\beta)] = \alpha,
\end{array} \tag{1}
$$

a to pro všechny prvky $\alpha, \beta \in \Gamma$ a každé dva systémy podmnožin v A, $\{a_1, b_1, \ldots\}$, $\{a_2, b_2, \ldots\}$, které množinu A pokrývají.

Když Γ jest svaz (ne nutně úplný), platí tytéž výsledky, avšak pro každou neprázdnou a nejvýše dvoubodovou podmnožinu $A \subset \Gamma$, takže pro $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ jest

$$
\begin{array}{ll}
[\alpha] = \alpha, & (\alpha) = \alpha, \\
[\alpha\,[\beta\gamma]] = [[\alpha\beta]\,\gamma], & (\alpha\,(\beta\gamma)) = ((\alpha\beta)\,\gamma), \\
(\alpha\,[\alpha\beta]) = \alpha, & [\alpha\,(\alpha\beta)] = \alpha.
\end{array} \tag{2}
$$

Nechť nyní naopak Γ značí libovolnou neprázdnou množinu a předpokládejme, že ke každé neprázdné podmnožině $A \subset \Gamma$ jsou nějakými pravidly přiřazeny dva prvky v Γ, které označíme $[A]$ a (A) a to tak, že jsou splněny rovnosti (1), opět pro všechny prvky $\alpha, \beta \in \Gamma$ a každé dva systémy podmnožin v A, $\{a_1, b_1, \ldots\}$, $\{a_2, b_2, \ldots\}$, které množinu A pokrývají. Přitom ovšem kvůli stručnosti píšeme na př. $[\alpha\beta]$ místo $[\{\alpha, \beta\}]$, takže $[\alpha\beta]$ a $[\beta\alpha]$ značí týž prvek.

Ukážeme, že *můžeme definovati antisymetrickou kongruenci na Γ, K, vzhledem k níž jest Γ úplným svazem a $[A]$ a (A) jsou horní a dolní hranice množiny A.* Za tím účelem definujeme kongruenci na Γ, K, tím, že pro $\alpha, \beta \in \Gamma$ jest $(\alpha, \beta) \in K$, když a jen když $[\alpha\beta] = \beta$; přitom symbolem $[\alpha\alpha]$ rozumíme prvek $[\alpha]$. Především tedy máme $(\alpha, \alpha) \in K$ a dále vidíme, že když (α, β), $(\beta, \gamma) \in K$, pak také $(\alpha, \gamma) \in K$, neboť z rovností $[\alpha\beta] = \beta$, $[\beta\gamma] = \gamma$ plyne $[\alpha\gamma] = [\alpha\,[\beta\gamma]] = [[\alpha\beta]\,\gamma] = [\beta\gamma] = \gamma$, podle druhé rovnosti (1). A konečně ze vztahů (α, β), $(\beta, \alpha) \in K$ plyne

$\alpha = \beta$, neboť z rovností $[\alpha\beta] = \beta$, $[\beta\alpha] = \alpha$ plyne $\alpha = \beta$. Tím jest ukázáno, že K jest skutečně antisymetrickou kongruencí na Γ. Všimněme si, že z rovnosti $[\alpha\beta] = \beta$ plyne $(\alpha\beta) = \alpha$ a naopak, jak vidíme z posledních vzorců v obou sloupcích rovnic (1). Můžeme tedy kongruenci K definovati také tím, že pro $\alpha, \beta \in \Gamma$ jest $(\alpha, \beta) \in K$, když a jen když $(\alpha\beta) = \alpha$. Množina všech prvků $\beta \in \Gamma$ takových, že $[\alpha\beta] = \beta$ $((\alpha\beta) = \alpha)$, jest tedy horní třída prvku $\alpha \in \Gamma$ v kongruenci K.

Nechť nyní $A \subset \Gamma$ značí libovolnou neprázdnou podmnožinu. Pak pro $\alpha \in A$ jest $\alpha \leqslant [A]$, neboť systém podmnožin v $A: \{\{\alpha\}, A\}$ pokrývá A a tedy platí $[\alpha[A]] = [A]$, podle druhé rovnosti (1). Nechť dále pro některý prvek $\beta \in \Gamma$ a každý prvek $\alpha \in A$ platí vztah $\alpha \leqslant \beta$, t. j. $[\alpha\beta] = \beta$. V množině $A \vee \{\beta\}$ [3]) máme jednak systém podmnožin $\{A, \{\beta\}\}$ a jednak systém dvoubodových podmnožin $\{\alpha, \beta\}$, kde $\alpha \in A$, a oba tyto systémy onu množinu pokrývají. Platí tedy $[[A]\beta] = \beta$, t. j. $[A] \leqslant \beta$, podle druhé rovnosti (1), neboť prvky $[\alpha, \beta]$ jsou vesměs rovny prvku β a $[\beta] = \beta$. Tím jest ukázáno, že $[A]$ jest horní hranicí množiny A vzhledem ke kongruenci K. Obdobnými úsudky, opírajíce se o druhou rovnost v druhém sloupci (1), odvodíme, že (A) jest dolní hranicí množiny A vzhledem ke kongruenci K. Skutečně jest tedy Γ úplným svazem vzhledem k naší kongruenci K a $[A]$ a (A) jsou horní a dolní hranice množiny A.

Když ke každé neprázdné a nejvýše dvoubodové podmnožině $A \subset \Gamma$ jsou nějakými pravidly přiřazeny dva prvky v Γ, které označíme $[A]$ a (A), a to tak, že jsou splněny vztahy (2) pro všechny prvky $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, pak můžeme definovati antisymetrickou kongruenci na Γ, K, vzhledem k níž jest Γ svazem a $[A]$ a (A) jsou horní a dolní hranice množiny A. Důkaz tohoto tvrzení jest obsažen v předcházejícím důkazu a obdržíme jej, když předcházející důkaz aplikujeme na podmnožinu $A \subset \Gamma$ nejvýše dvoubodovou.

8. Svazové deformace. Nechť Γ (Γ^*) značí libovolnou neprázdnou množinu a K (K^*) libovolnou antisymetrickou kongruenci na Γ (Γ^*). Nechť dále $\boldsymbol{d}$ značí nějaké zobrazení množiny Γ *na* Γ^*. Zobrazení $\boldsymbol{d}$ přiřazuje ke každému prvku $\alpha \in \Gamma$ jistý prvek $\boldsymbol{d}\alpha \in \Gamma^*$, *obraz* prvku α v zobrazení $\boldsymbol{d}$, a každý prvek v Γ^* jest obrazem některého prvku v Γ. Ke každé neprázdné podmnožině $A \subset \Gamma$ patří jistá neprázdná podmnožina $\boldsymbol{d}A \subset \Gamma^*$, skládající se z obrazů v $\boldsymbol{d}$ jednotlivých prvků množiny A.

---

[3]) $\vee$ jest součtové znaménko pro množiny, takže $A \vee \{\beta\}$ značí součet množin A, $\{\beta\}$.

Zobrazení d se nazývá *svazový homomorfismus* nebo kratčeji: *svazová deformace*, když má tuto vlastnost: Když nějaká podmnožina $A \subset \Gamma$ má horní hranici (vzhledem ke K), $[A]$, pak její obraz v d jest horní hranicí (vzhledem ke K^*) množiny dA, tedy $d[A] = [dA]$; a když A má dolní hranici (vzhledem ke K), (A), pak její obraz, $d(A)$, jest dolní hranicí (vzhledem ke K^*) množiny dA, tedy $d(A) = (dA)$. *Prostá* svazová deformace množiny Γ na Γ^*, v níž tedy různé prvky v Γ mají vždycky různé obrazy v Γ^*, nazývá se *svazový isomorfismus.*

II. Základní vlastnosti rozkladů v množině.

9. Definice. Nechť Γ opět značí libovolnou neprázdnou množinu. *Rozkladem* v Γ rozumíme každý neprázdný systém neprázdných podmnožin v Γ, z nichž každé dvě jsou disjunktní. Když nějaký rozklad v Γ množinu Γ pokrývá, t. j. když každý prvek v Γ leží v některém prvku rozkladu, pak pravíme, že onen rozklad jest či leží *na* množině Γ, nebo že jest rozkladem množiny Γ. Příkladem rozkladů množiny Γ jsou t. zv. *největší* a *nejmenší* rozklad množiny Γ. První, který označujeme G_{max}, se skládá z jediného prvku Γ, druhý, G_{min}, se skládá z jednobodových množin $\{a\}$, kde $a \in \Gamma$.

10. Obal a průsek rozkladu s množinou. Nechť A značí libovolný rozklad a B libovolnou podmnožinu v Γ.

Množina všech prvků $a \in A$ incidentních s B jest jistá podmnožina v A; nazýváme ji *obal* podmnožiny B v rozkladu A a označujeme symbolem $B \sqsubset A$ nebo $A \sqsupset B$. $B \sqsubset A$ může ovšem býti prázdná množina a tento případ nastane, když a jen když každý prvek rozkladu A a množina B jsou disjunktní, nebo, což jest totéž, když a jen když $\mathbf{s}A \cap B = \emptyset$[4]). Jinak jest ovšem $B \sqsubset A$ rozkladem v Γ a dokonce v $\mathbf{s}A$.

Další pojem vztahující se na rozklad A a podmnožinu B jest pojem průseku. *Průsek* rozkladu A s podmnožinou B nebo podmnožiny B s rozkladem A, jest množina neprázdných průniků jednotlivých prvků v A s množinou B; označujeme jej symbolem $A \sqcap B$ nebo $B \sqcap A$. Také průsek $A \sqcap B$ může býti prázdná množina a jest zřejmé, že tento případ nastane tehdy a jen tehdy, když každý prvek rozkladu A a množina B jsou disjunktní, nebo když $\mathbf{s}A \cap B = 0$. Jinak jest ovšem $A \sqcap B$ rozkladem v Γ a dokonce v B.

---

[4]) Značí-li E systém libovolných množin, pak symbol $\mathbf{s}E$ ($\mathbf{p}E$) značí součet (průnik) všech množin, které jsou prvky systému E.

11. Zákryt a zjemnění rozkladu. Nechť A, B, C značí libovolné rozklady v Γ. Když každý prvek rozkladu B jest částí některého prvku rozkladu A, pravíme, že A (B) jest *zákryt* (*zjemnění*) rozkladu B (A), nebo, že rozklad A (B) *jest* či *leží na* (*pod*) rozkladu (rozkladem) B (A). Píšeme pak $A \geqslant B$ nebo $B \leqslant A$. Na příklad jest největší rozklad na Γ zákryt rozkladu A a nejmenší rozklad na $\mathsf{s}A$ jest zjemnění rozkladu A. Když platí $A \geqslant B$ aniž by bylo $A = B$, pak pravíme, že A (B) jest *vlastní* zákryt (zjemnění) rozkladu B (A) a tento vztah zdůrazňujeme symbolem $A > B$ nebo $B < A$. Z těchto definic vidíme, že když A (B) jest zákryt (zjemnění) rozkladu B (A), pak B (A) jest zjemnění (zákryt) rozkladu A (B).

Když platí $A \geqslant B$, pak sice každý prvek rozkladu B jest částí některého prvku rozkladu A, ale rozklad A může obsahovati prvky, v nichž neleží žádný prvek rozkladu B. Když takových prvků není, když tedy každý prvek rozkladu A obsahuje jako část některý prvek rozkladu B, pravíme, že rozklad A (B) jest *normální* zákryt (zjemnění) rozkladu B (A); když dokonce každý prvek rozkladu A jest součtem některých prvků rozkladu B, nazýváme rozklad A (B) *ryzí* zákryt (zjemnění) rozkladu B (A). Snadno zjistíme, že když A, B jsou rozklady *na* Γ a $A \geqslant B$, pak nutně rozklad A (B) jest ryzí zákryt (zjemnění) rozkladu B (A).

Z definice významu znaménka $\geqslant$ vidíme, že platí tyto vztahy:

1. $A \geqslant A$ (reflexivnost),
2. když $A \geqslant B$, $B \geqslant C$, pak $A \geqslant C$ (transitivnost),
3. když $A \geqslant B$, $B \geqslant A$, pak $A = B$ (antisymetrie).

Odtud vidíme, že vztah $\geqslant$ definuje v každém neprázdném systému rozkladů v množině Γ, $\mathbf{A}$, částečné uspořádání a tedy na něm určuje jistou antisymetrickou kongruenci. Tato kongruence, kterou nazveme *přirozená*, skládá se z prvků (B, A), kde A značí jednotlivé prvky v $\mathbf{A}$ a B zjemnění prvku A, která jsou v systému $\mathbf{A}$ obsažena. Symbol $A \geqslant B$ vyjadřuje tedy jednak, že rozklad A jest zákrytem rozkladu B a současně, že rozklad A jest kongruentní s rozkladem B v přirozené kongruenci. S ohledem na tento druhý význam znaménka $\geqslant$ zvolili jsme výše totéž znaménko k označení zákrytu a zjemnění.

12. Zákryt a zjemnění systému rozkladů. Nechť $\mathbf{A}$ značí libovolný neprázdný systém rozkladů v množině Γ.

Zákrytem (*zjemněním*) systému $\mathbf{A}$ rozumíme každý rozklad v Γ, který jest zákrytem (zjemněním) každého prvku v $\mathbf{A}$. Máme-li prvky systému $\mathcal{A}$ označeny $A, B, C, \ldots$, nazýváme zákryt (zjemnění) systému $\mathcal{A}$ také *společným zákrytem* (*zjemněním*) *rozkladů* $A, B, C, \ldots$ Na př. jest největší rozklad na Γ zákrytem systému $\mathcal{A}$ a leží-li některý prvek $\alpha \in \Gamma$ v některém prvku každého rozkladu patřícího do systému $\mathcal{A}$, jest jednobodový rozklad $\{\alpha\}$ zjemněním systému $\mathcal{A}$.

Důležitý pokrok v theorii rozkladů v množině jest dán pojmy nejmenšího zákrytu a největšího zjemnění systému $\mathcal{A}$.

13. Nejmenší zákryt systému $\mathcal{A}$ jest rozklad v Γ, který jest definován následující konstrukcí.

Nechť $a, b \in \mathrm{s}\mathcal{A}$ značí libovolné prvky. Podle našeho označení značí symbol $\mathrm{s}\mathcal{A}$ součet rozkladů v Γ, které jsou prvky systému $\mathcal{A}$, takže $\mathrm{s}\mathcal{A}$ jest systém podmnožin v Γ, které jsou prvky jednotlivých rozkladů v Γ, z nichž se skládá systém $\mathcal{A}$. Konečnou posloupnost podmnožin v Γ:

$$a_1, \ldots, a_\alpha$$

nazveme řetězec v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ od a do b, když všechny její členy jsou prvky v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ a zejména $a_1 = a$, $a_\alpha = b$ a když každé dva sousední členy jsou incidentní. Část kartézského čtverce $\mathrm{s}\mathcal{A} \times$ skládající se ze všech uspořádaných dvojic (a, b) takových, že existuje řetězec v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ od a do b, jest zřejmě symetrická kongruence. Tedy existuje rozklad na $\mathrm{s}\mathcal{A}$, R, takový, že pro každé dva prvky v $\mathrm{s}\mathcal{A}$, které jsou v témže prvku rozkladu R, existuje řetězec v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ od jednoho k druhému, kdežto pro žádné dva prvky v $\mathrm{s}\mathcal{A}$, které nejsou v témže prvku rozkladu R, neexistuje. Systém všech podmnožin v Γ, které jsou součty všech prvků systému $\mathrm{s}\mathcal{A}$ ležících vždy v témže prvku rozkladu R, jest rozklad v Γ a právě tento rozklad jest nejmenší zákryt systému $\mathcal{A}$.

Nejmenší zákryt systému $\mathcal{A}$ označujeme symbolem $[\mathcal{A}]$, nebo, máme-li prvky systému $\mathcal{A}$ označeny $A, B, C, \ldots$, symbolem $[ABC\ldots]$.

Všimněme si zejména jednoduchého případu, že systém $\mathcal{A}$ se skládá ze dvou rozkladů A, C, které se vyznačují tím, že *každý prvek v A jest incidentní právě s jedním prvkem v C. Pak prvky v $[AC]$ obdržíme, když utvoříme součet vždy jednoho prvku v C a všech prvků v A s ním incidentních.* Ukážeme, že každý prvek v $[AC]$ jest součtem jistého prvku v C a všech prvků v A, které jsou s ním incidentní. Tím bude naše tvrzení dokázáno, protože také naopak, každý prvek $c \in C$ jest částí jistého prvku rozkladu $[AC]$ a tento prvek rozkladu $[AC]$ jest pak součtem prvku c a všech prvků v A s ním incidentních. Nuže, nechť $u \in [AC]$ značí libovolný prvek. Podle definice rozkladu $[AC]$ existuje jistý prvek $a \in A \vee C$ takový, že prvek u jest součtem všech prvků v $A \vee C$, které se dají spojiti řetězcem v $A \vee C$ s prvkem a. Je-li $a \in A$, pak podle předpokladu jest prvek a incidentní právě s jedním prvkem $c \in C$ a tedy prvek u jest součtem všech prvků v $A \vee C$, které se dají spojiti řetězcem v $A \vee C$ s prvkem c. Můžeme tedy předpokládati, že $a \in C$ (neboť v případě $a \in A$ vezmeme místo a prvek c, o němž právě byla řeč). Nyní stačí zjistiti, že každý prvek $b \in A \vee C$ se dá spojiti řetězcem v $A \vee C$ s prvkem a tehdy a jen tehdy, když je incidentní s a, t. j. když b jest v A a jest incidentní s a nebo $b = a$. Nechť tedy $b \in A \vee C$ značí libovolný prvek. Když b jest incidentní s a, pak se dá spojiti řetězcem v $A \vee C$ s prvkem a, totiž řetězcem a, b. Nechť tedy naopak existuje řetězec v $A \vee C$ od a do b:

$$a_1, \ldots, a_\alpha,$$

takže $a_1, \ldots, a_\alpha$ jsou prvky v $A \vee C$, $a_1 = a$, $a_\alpha = b$, a každé dva sousední prvky jsou incidentní. Prvek a_1 jest ovšem incidentní s prvkem a, protože je mu roven. Jestliže pro některé $(1 \leqslant)\ \beta\ (\leqslant \alpha - 1)$ jsou prvky $a_1, \ldots, a_\beta$ incidentní s prvkem a, pak totéž platí o prvku $a_{\beta+1}$. Neboť je-li $a_{\beta+1} \in A$, pak prvek $a_{\beta+1}$ jest roven prvku a_β, a tedy jest incidentní s a, jestliže $a_\beta \in A$; jestliže však $a_\beta \in C$, pak prvek a_β jest roven prvku a, protože jest s ním incidentní a tedy prvek $a_{\beta+1}$ jest incidentní s a, jakožto soused prvku a v hořejším řetězci! Je-li však $a_{\beta+1} \in C$, pak $a_{\beta+1} = a$, takže ovšem prvek $a_{\beta+1}$ jest incidentní s a; to jest zřejmé, jestliže $a_\beta \in C$, takže $a_\beta = a$, a v případě $a_\beta \in A$ jest to správné proto, že prvek a_β, který podle předpokladu jest incidentní s prvkem a, jest incidentní právě s jedním prvkem v C. Tím jest zjištěno, že prvek b jest incidentní s prvkem a a důkaz jest proveden. Všimněme si, že *platí-li kromě hořejších předpokladů vztah* $\mathbf{s}C \subset \mathbf{s}A$, *pak prvky v* $[AC]$ *obdržíme, když utvoříme součty všech prvků v* A *incidentních vždy s jedním prvkem v* C, protože pak každý prvek v C jest částí součtu všech prvků v A, které jsou s ním incidentní. *Mimo to pak platí rovnost* $\mathbf{s}C \sqcap [AC] = C$. Neboť každý prvek $c \in C$ jest částí jistého prvku $a \in [AC]$, který není incidentní se žádným jiným prvkem v C, takže máme $c = c \cap a = \mathbf{s}C \cap a$ a tedy $C \subset \mathbf{s}C \sqcap [AC]$; dále jest každý prvek množiny $\mathbf{s}C \sqcap [AC]$ tvaru $\mathbf{s}C \cap a$, kde $a \in [AC]$ značí vhodný prvek, který obsahuje jistý prvek $c \in C$, avšak není incidentní se žádným jiným prvkem v C, takže máme $\mathbf{s}C \cap a = c \cap a = c$ a tedy $\mathbf{s}C \sqcap [AC] \subset C$. — Všimněme si, že smysl hořejší rovnosti jest ten, že průnik každého prvku rozkladu $[AC]$ s množinou $\mathbf{s}C$ jest jistý prvek v C a každý prvek v C jest takovým průnikem.

Nyní ukážeme, že *nejmenší zákryt systému $\mathcal{A}$ jest horní hranicí systému $\mathcal{A}$ vzhledem k přirozené kongruenci*, čili jinými slovy, že jest zákrytem každého rozkladu, který jest prvkem systému $\mathcal{A}$ a zjemněním každého zákrytu tohoto systému. Právě pro tuto vlastnost nazvali jsme rozklad $[\mathcal{A}]$ nejmenším zákrytem systému $\mathcal{A}$. Nuže, každý prvek libovolného rozkladu $A \in \mathcal{A}$ jest prvkem některého prvku $r \in R$ a tedy jest částí onoho prvku rozkladu $[\mathcal{A}]$, který jest součtem prvků systému $\mathrm{s}\mathcal{A}$ ležících v r. Tím jest zjištěno, že $[\mathcal{A}]$ jest zákryt každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$. Nechť nyní B značí libovolný zákryt systému $\mathcal{A}$. Chceme ukázati, že B jest zákrytem rozkladu $[\mathcal{A}]$. Za tím účelem uvažujme o libovolném prvku $u \in [\mathcal{A}]$. Podle definice rozkladu $[\mathcal{A}]$ existuje prvek $a \in A$ jistého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ takový, že u jest součtem všech prvků v $\mathrm{s}\mathcal{A}$, které se dají spojiti řetězcem v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ s prvkem a. Přitom jest ovšem $a \subset u$. Nechť $x \in \mathrm{s}\mathcal{A}$ značí libovolný prvek ležící v u, tedy $x \subset u$, takže existuje řetězec v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ od a do x:

$$a_1, \ldots, a_\alpha \qquad (a_1 = a,\ a_\alpha = x).$$

Protože B jest zákryt systému $\mathcal{A}$, existuje prvek $b \in B$ obsahující prvek a, takže $a \subset b$. Jsou-li pro některé $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha - 1$ prvky $a_1, \ldots, a_\beta$ částmi prvku b, pak totéž platí o prvku $a_{\beta+1}$, protože pak prvek $a_{\beta+1}$ jest incidentní s prvkem b, neboť jest incidentní s prvkem a_β, a tedy jest částí prvku b, protože rozklad B jest zákrytem systému $\mathcal{A}$. Odtud plyne $x \subset b$ a tedy $u \subset b$ a důkaz jest ukončen.

14. Největší zjemnění systému $\mathcal{A}$. Především zavedeme několik pomocných pojmů.

Libovolný výběr v systému $\mathcal{A}$, t. j. tedy podmnožina v $\mathrm{s}\mathcal{A}$ obsahující z každého rozkladu, který jest prvkem systému $\mathcal{A}$, právě jeden prvek, nazveme *trs v $\mathcal{A}$*, stručněji *trs*, když jeho průnik není prázdný. Průnik všech prvků trsu jest *střed trsu*. Značí-li tedy V trs, jest $\mathrm{p}V$ jeho střed (viz pozn. [4]). Součet středů všech trsů v systému $\mathcal{A}$ jest *střed systému $\mathcal{A}$*. Podle těchto definic se tedy může státi, že v systému $\mathcal{A}$ žádný trs neexistuje a pak ovšem střed systému $\mathcal{A}$ jest prázdný. V tom případě pravíme, že systém $\mathcal{A}$ nemá středu. Na př. když se systém $\mathcal{A}$ skládá ze dvou rozkladů $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, při čemž podmnožiny $b, c \subset \Gamma$ jsou incidentní, kdežto podmnožiny $a, c;\ a, d;\ b, d \subset \Gamma$ každé z těchto dvojic disjunktní, existuje v systému $\mathcal{A}$ jediný trs $\{b, c\}$ a v případě $c = b$ trs $\{b\}$, jehož středem a současně středem systému $\mathcal{A}$ jest množina $b \cap c$ nebo b. Když naproti tomu systém $\mathcal{A}$ se skládá ze dvou rozkladů, skládajících se vždy z jednoho prvku a a b, při čemž podmnožiny a, $b \subset \Gamma$ jsou disjunktní, pak v systému $\mathcal{A}$ žádný trs neexistuje a systém $\mathcal{A}$ nemá středu. Všimněme si, že střed systému $\mathcal{A}$, s, jest vždycky částí součtu všech prvků každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$, tedy $s \subset \mathbf{s}\mathcal{A}$, protože každý prvek v s jest ve středu jistého trsu a tedy v jistém prvku rozkladu $\mathcal{A}$.

Největším zjemněním systému $\mathcal{A}$ rozumíme systém středů všech trsů v systému $\mathcal{A}$, za předpokladu, že tento systém není prázdný. V případě, že prázdný jest, pravíme, že systém $\mathcal{A}$ nemá největšího zjemnění, nebo že největší zjemnění systému $\mathcal{A}$ neexistuje. Kdežto tedy nejmenší zákryt existuje, ať systém $\mathcal{A}$ jest (neprázdný) jakýkoli, jest situace jiná pro největší zjemnění, které existuje jenom ve zvláštních případech. Zejména má systém $\mathcal{A}$ největší zjemnění, když se skládá z rozkladů *na* Γ, protože pak každý prvek $a \in \Gamma$ leží právě v jednom prvku každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ a množina těchto prvků jest trs, jehož střed obsahuje prvek a. Zřejmě jest největší zjemnění každého systému $\mathcal{A}$ rozklad v Γ a ovšem leží na středu systému $\mathcal{A}$, protože dva trsy v $\mathcal{A}$ jsou identické, když jejich středy jsou incidentní.

Největší zjemnění systému $\mathcal{A}$ označujeme symbolem $(\mathcal{A})$, nebo, máme-li prvky systému $\mathcal{A}$ označeny $A, B, C, \ldots$, symbolem $(ABC\ldots)$.

Nyní ukážeme, že *největší zjemnění systému $\mathcal{A}$ jest dolní hranicí systému $\mathcal{A}$ vzhledem k přirozené kongruenci*, čili, jinak řečeno, že jest zjemněním každého rozkladu, který jest prvkem systému $\mathcal{A}$, a zákrytem každého zjemnění tohoto systému. Právě pro tuto vlastnost jsme nazvali rozklad $(\mathcal{A})$ největším zjemněním systému $\mathcal{A}$. Nuže, protože každý prvek rozkladu $(\mathcal{A})$ jest středem jistého trsu v $\mathcal{A}$, jest částí některého prvku každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$, a tedy $(\mathcal{A})$ jest zjemněním každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$. Nechť nyní B značí libovolné zjemnění systému $\mathcal{A}$. Chceme ukázati, že B jest zjemněním rozkladu $(\mathcal{A})$. Podle definice jest každý prvek $b \in B$ částí některého prvku a každého rozkladu $A \subset \mathcal{A}$ a ovšem vždy jenom jednoho prvku téhož rozkladu, neboť dva různé prvky každého rozkladu jsou disjunktní. Množina všech těchto prvků a jest tedy výběr v $\mathcal{A}$ a dokonce trs v $\mathcal{A}$, neboť průnik jejích prvků, v, není prázdný, poněvadž $b \subset v$. Avšak $v \in (\mathcal{A})$ a tím jest důkaz proveden.

15. Majorantní a minorantní systémy rozkladů. Nechť $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou neprázdné systémy rozkladů v Γ.

Systém $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) se nazývá *majorantní* (*minorantní*) *vzhledem k* $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$), když má tuto vlastnost v přirozené kongruenci, t. j. tedy, když každý prvek v A jest zákrytem některého prvku v B a každý prvek v B jest zjemněním některého prvku v A. Píšeme pak $A \geqslant B$ nebo $B \leqslant A$. Symbol $A \geqslant B$ má tedy tento smysl: Ke každému rozkladu $A \in A$ existuje alespoň jeden rozklad $B \in B$, pro nějž platí $A \geqslant B$, a ke každému rozkladu $B \in B$ alespoň jeden rozklad $A \in A$, pro nějž také platí $B \leqslant A$. Když dokonce každý prvek v A jest normálním (ryzím) zákrytem některého prvku v B a rovněž každý prvek v B normálním (ryzím) zjemněním některého prvku v A, nazýváme systém A *normální* (*ryzí*) majorantní vzhledem k B a systém B normální (ryzí) minorantní vzhledem k A. Jest zřejmé, že ryzí systémy jsou zvláštními případy systémů normálních. Na př. jest systém skládající se z jediného největšího rozkladu na Γ, G_{max}, normální majorantní vzhledem ke každému neprázdnému systému rozkladů v Γ a jest ryzí vzhledem ke každému neprázdnému systému rozkladů *na* Γ.

Nechť systém A jest majorantní vzhledem k B.

Především ukážeme, že *střed každého trsu v B jest částí středu jistého trsu v A.* Vskutku, uvažujme o libovolném trsu v B a označme jeho střed s. V každém rozkladu $A \in A$ existuje právě jeden prvek $a \in A$, který obsahuje střed s. Neboť z předpokladu $A \geqslant B$ plyne, že v systému B existuje alespoň jedno zjemnění rozkladu A, B; jeden prvek $b \in B$ jest v našem trsu o středu s, takže platí $b \supset s$, a jest částí jistého (a ovšem jediného) prvku $a \in A$, t. j. $a \supset b$, neboť $A \geqslant B$. Odtud pak plyne $a \supset s$. Množina prvků v $\mathbf{s}A$ obsahujících střed s jest tedy trs v A, jehož střed obsahuje s.

Tím jest zjištěno, že *když existuje největší zjemnění systému B, pak totéž platí o systému A a jest $(A) \geqslant (B)$.* Druhá část tohoto výsledku jest ovšem důsledkem obecnější věty (odst. 6). Ostatně podotkněme, že podle téže věty *vždycky platí vztah* $[A] \geqslant [B]$, protože oba rozklady vždycky existují.

I když systém A jest normální, pak mohou v něm existovati trsy, jejichž středy nejsou incidentní se středem žádného trsu v B.

Příklad. Nechť $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ a nechť A značí systém rozkladů v Γ skládajících se z rozkladů A_1, A_2 a B systém skládající se z rozkladů B_1, B_2, při čemž

A_1 má jediný prvek $\{\alpha, \beta\}$, B_1 má jediný prvek $\{\beta\}$,
A_2 „ „ „ $\{\alpha, \gamma\}$, B_2 „ „ „ $\{\gamma\}$.

Zřejmě jest systém A normální majorantní vzhledem k B, v systému A jest trs o středu $\{\alpha\}$, kdežto v systému B není trsů.

Z tohoto výsledku vidíme, že *je-li systém $\mathcal{A}$ normální, nemusí býti rozklad* $(\mathcal{A})$ *normálním zákrytem rozkladu* $(\mathcal{B})$.

Naproti tomu však platí, že *je-li systém $\mathcal{A}$ ryzí, pak rozklad* $(\mathcal{A})$ *jest ryzím zákrytem rozkladu* $(\mathcal{B})$. Vskutku, předpokládejme, že systém $\mathcal{A}$ jest ryzí a všimněme si libovolného prvku $u \in (\mathcal{A})$. Máme ukázati, že každý prvek $a \in u$ jest ve středu některého trsu v $\mathcal{B}$. Prvek u jest středem jistého trsu v $\mathcal{A}$, jehož libovolný prvek označíme a, takže a jest prvkem jistého rozkladu $A \in \mathcal{A}$. Protože systém $\mathcal{A}$ jest ryzí, existuje alespoň jeden rozklad $B \in \mathcal{B}$, takový, že prvek a jest součtem některých prvků rozkladu B, takže jeden z těchto prvků, b, obsahuje prvek a. Nyní stačí ukázati, že množina všech prvků b, tímto způsobem přiřazených k jednotlivým prvkům našeho trsu se středem u, jest výběr a tedy, protože platí $a \in b$, trs v $\mathcal{B}$. V opačném případě existuje rozklad $B \in \mathcal{B}$, jehož žádný prvek neobsahuje a. Protože systém $\mathcal{A}$ jest ryzí, existuje zákryt $A \in \mathcal{A}$ rozkladu B, jehož každý prvek jest součtem některých prvků v B. Avšak jeden prvek $a' \in A$ obsahuje a a tudíž to platí také o jistém prvku rozkladu B ležícím v a', a máme spor.

16. Trsové systémy rozkladů. Nechť opět $\mathcal{A}$ značí neprázdný systém rozkladů v Γ.

Systém $\mathcal{A}$ nazýváme *trsový*, když každý prvek každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$, t. j. každý prvek v $\mathsf{s}\mathcal{A}$, jest prvkem alespoň jednoho trsu v $\mathcal{A}$. Když tedy systém $\mathcal{A}$ jest trsový, pak každý prvek každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ obsahuje střed alespoň jednoho trsu v $\mathcal{A}$ a jest tedy incidentní se středem systému $\mathcal{A}$. Dále vidíme, že každý trsový systém má největší zjemnění, které jest ovšem rozkladem jeho středu. Příkladem trsového systému jest každý neprázdný systém rozkladů *na* Γ; středem takového systému jest ovšem celá množina Γ. Když zejména každý prvek každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ jest právě jenom v jednom trsu v $\mathcal{A}$, pak systém $\mathcal{A}$ nazýváme *spřažený*. Spřažené systémy jsou tedy zvláštními případy systémů trsových. Jednoduchým příkladem spřaženého systému jest systém skládající se ze dvou spřažených rozkladů v Γ, t. j. takových, že každý prvek jednoho jest incidentní právě s jedním prvkem druhého.

Když systém $\mathcal{A}$ jest trsový, pak průsek každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ se středem s systému $\mathcal{A}$, $A \sqcap s$, jest rozkladem na s, neboť každý prvek v A jest incidentní se středem s a tedy má s ním neprázdný průnik, který jest prvkem průseku $A \sqcap s$, a každý prvek v s jest ve středu jistého trsu a tedy v průniku $a \cap s \in A \sqcap s$, kde $a \in A$ značí prvek onoho trsu. *Ostatně jest $A \sqcap s$ ryzí zákryt rozkladu* (A), neboť každý jeho prvek jest průnikem $a \cap s$, kde a značí jistý prvek v A a tedy jest součtem středů všech trsů, které obsahují prvek a.

Jednoduchá vlastnost systémů spřažených jest ta, že *každé dva rozklady A, $B \in \mathcal{A}$ libovolného spřaženého systému $\mathcal{A}$ jsou ekvivalentní množiny,* při čemž prosté zobrazení jednoho rozkladu na druhý jest dáno incidencí prvků. Vskutku, nechť $\mathcal{A}$ značí libovolný spřažený systém rozkladů v Γ a A, $B \in \mathcal{A}$ libovolné prvky. Pak každý prvek $a \in A$ jest prvkem právě jednoho trsu a tento obsahuje jediný prvek $b \in B$. Prvky a, b jsou ovšem incidentní, protože obsahují střed onoho trsu. Když ke každému prvku $a \in A$ přiřadíme příslušný prvek $b \in B$, obdržíme prosté zobrazení rozkladu A na rozklad B a tím jest důkaz proveden.

Nechť nyní systém $\mathcal{A}$ jest trsový.

Na příkladě ukážeme, že *majorantní systémy rozkladů vzhledem k $\mathcal{A}$ nemusí býti trsové.*

Příklad. Nechť $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ a nechť P značí systém rozkladů v Γ skládající se z rozkladů R_1, R_2 a $\mathcal{A}$ systém skládající se z rozkladů A_1, A_2, při čemž

R_1 má prvky $\{\alpha, \beta\}$, $\{\gamma\}$; $\quad A_1$ má jediný prvek $\{\alpha, \beta\}$;
R_2 má jediný prvek $\{\beta\}$; $\quad A_2$ „ „ „ $\{\beta\}$.

Zřejmě jest systém $\mathcal{A}$ trsový a P jest majorantní vzhledem k $\mathcal{A}$; avšak systém P není trsový, neboť prvek $\{\gamma\} \in R_1$ není v žádném trsu v P.

Naproti tomu však platí, že *každý majorantní systém normální vzhledem k $\mathcal{A}$ jest opět trsový.* Vskutku, nechť P značí libovolný normální majorantní systém vzhledem k $\mathcal{A}$. Zvolme libovolný prvek $r \in \mathbf{s}P$. Protože systém P jest normální, existuje alespoň jeden prvek $a \in \mathbf{s}\mathcal{A}$, pro nějž platí $r \supset a$. Protože systém $\mathcal{A}$ jest trsový, jest a alespoň v jednom trsu v $\mathcal{A}$ a podle výsledku v odst. 15, jest střed tohoto trsu ve středu jistého trsu v P. Tento trs obsahuje ovšem prvek r, protože $r \supset a$, a tvrzení jest dokázáno.

Nyní ukážeme, že *existují ryzí majorantní systémy vzhledem k $\mathcal{A}$, které jsou spřažené.*

Nuže, průsek každého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ se středem s systému $\mathcal{A}$, $A \sqcap s$, jest rozkladem na s. Nechť Π značí systém průseků $A \sqcap s$ jednotlivých prvků $A \in \mathcal{A}$ se středem s, takže Π jest neprázdný systém rozkladů na s, a nechť U značí libovolný rozklad na s, který jest zákrytem systému Π, tedy na př. rozklad $[\Pi]$. Pak systém P, skládající se ze všech rozkladů $[UA]$, kde $A \in \mathbf{A}$, jest ryzí majorantní systém vzhledem k $\mathbf{A}$ a jest spřažený.

Vskutku, každý prvek v libovolném rozkladu $A \in \mathbf{A}$ jest incidentní právě s jedním prvkem v U, totiž s oním, který obsahuje jeho průnik se středem s, a kromě toho platí $(s =) \mathsf{s} U \subset \mathsf{s} A$. Rozklad $[UA]$ se tedy skládá z prvků, které jsou součty vždy některých prvků v A, a to všech prvků incidentních vždy s jedním prvkem v U (odst. 13). Odtud plyne, že P jest ryzí majorantní systém vzhledem k $\mathbf{A}$ a protože systém $\mathbf{A}$ jest trsový, platí totéž o systému P (viz výše). Zbývá tedy ukázati, že systém P jest spřažený. Za tím účelem si především všimněme, že průnik každého prvku v $\mathsf{s} P$ se středem s jest jistý prvek v U a každý prvek v U jest takovým průnikem (odst. 13). Nuže, nechť $r \in \mathsf{s} P$ značí libovolný prvek; jeho průnik se středem s označme u, takže $u \in U$. Jeden trs, v němž prvek r leží, jest zřejmý, totiž trs skládající se ze všech prvků v $\mathsf{s}P$, jejichž průnik se středem s jest u. Střed tohoto trsu, v, obsahuje tedy množinu u, t. j. $v \supset u$. Avšak střed každého trsu v P, obsahujícího r jako prvek, jest součtem středů některých trsů v $\mathbf{A}$ (odst. 15) a tedy jest částí množiny u. Odtud zejména plyne rovnost $v = u$ a dále vidíme, že každý trs v P, v němž prvek r leží, jest náš trs se středem u, a tím jest věta dokázána. Současně také vychází, že *rozklad U jest systémem středů všech trsů v P a tedy $U = (P)$.*

17. Trsové systémy grup tříd. Předcházející úvahy budeme nyní aplikovati na grupy tříd. Pole každé grupy tříd v libovolné grupě $\mathfrak{G}$, t. j. systém podmnožin v $\mathfrak{G}$, které jsou prvky grupy tříd, jest ovšem rozklad v $\mathfrak{G}$. Abychom se mohli stručněji vyjadřovati, přenášíme na grupy tříd názvy, které platí pro jejich pole. Na př. mluvíme o výběru nebo trsu v systému grup tříd v tom smyslu, že jde o výběr nebo trs v systému polí jednotlivých grup tříd, a podobně o trsovém systému grup tříd, o majorantním systému grup tříd vzhledem k jinému systému, atd.

Nuže, nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolnou grupu.

Nechť jest v grupě $\mathfrak{G}$ dán libovolný neprázdný systém podgrup $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, a v nich invariantní podgrupy $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$, takže $\mathfrak{a}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ v $\mathfrak{B}$, atd., čili stručněji: $\mathfrak{a} \Subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \Subset \mathfrak{B}, \ldots$. Pak máme v $\mathfrak{G}$ grupy tříd $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}, \mathfrak{B}/\mathfrak{b}, \ldots$ a systém těchto grup tříd není ovšem nutně trsový.

Nechť $\mathfrak{S}$ značí podgrupu v $\mathfrak{G}$, která jest průnikem všech podgrup $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, takže

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \ldots .$$

Pak podgrupa $\mathfrak{a}$ jest invariantní v $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$, podgrupa $\mathfrak{b}$ v $\mathfrak{S}\mathfrak{b}$, atd., a tedy máme v $\mathfrak{G}$ grupy tříd

$$\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{a},\ \mathfrak{S}\mathfrak{b}/\mathfrak{b}, \ldots \qquad (1)$$

Snadno ukážeme, že tento systém jest trsový. Vskutku, každý prvek na př. grupy tříd $\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ jest tvaru $\sigma\alpha\mathfrak{a}$, kde $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\alpha \in \mathfrak{a}$, a tedy obsahuje prvek σ. Množiny $(\sigma\alpha\mathfrak{a} =)\,\sigma\mathfrak{a}$, $\sigma\mathfrak{b}, \ldots$ jsou zřejmě výběrem v systému (1) a tedy trsem, protože všechny obsahují prvek σ. Tím jest zjištěno, že systém (1) jest trsový.

Co jest středem tohoto systému? Předně si všimněme, že každý trs v systému (1) se skládá z množin tvaru $\sigma\mathfrak{a}$, $\sigma\mathfrak{b}, \ldots$, kde σ značí vhodný prvek v $\mathfrak{S}$. Neboť zřejmě se každý takový trs skládá z podmnožin tvaru $\sigma'\mathfrak{a}$, $\sigma''\mathfrak{b}, \ldots$, kde σ', $\sigma'', \ldots$ značí vhodné prvky v $\mathfrak{S}$. Tyto množiny, tvoříce trs, mají společný jistý prvek $\sigma \in \mathfrak{G}$ a tedy jsou tytéž jako množiny $\sigma\mathfrak{a}$, $\sigma\mathfrak{b}, \ldots$; ze vztahů $\sigma'\mathfrak{a} \subset \mathfrak{A}$, $\sigma''\mathfrak{b} \subset \mathfrak{B}, \ldots$ pak plyne $\sigma \in \mathfrak{S}\,(= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \ldots)$. Odtud vidíme, že střed každého trsu v systému (1) jest tvaru $\sigma\mathfrak{a} \cap \sigma\mathfrak{b} \cap \ldots = \sigma(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots)$, kde σ značí jistý prvek v $\mathfrak{S}$, takže jest prvkem grupy tříd $\mathfrak{S}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots)$. Současně jest zřejmé, že naopak, každý prvek této grupy tříd jest středem jistého trsu v systému (1). Vychází tedy, že středem systému (1) jest podgrupa $\mathfrak{S}$.

Aplikujíce úvahy z předešlého odstavce, sestrojíme nyní ryzí majorantní systém grup tříd vzhledem k systému (1), který jest spřažený.

Průseky grup tříd systému (1) s jeho středem $\mathfrak{S}$ jsou

$$\mathfrak{S}/(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a}),\ \mathfrak{S}/(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}), \ldots$$

a každý jejich společný zákryt jest $\mathfrak{S}/\mathfrak{u}$, kde $\mathfrak{u}$ značí nějakou invariantní podgrupu v $\mathfrak{S}$, která leží na podgrupě $(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}) \ldots$, tedy

$$\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{u} \supset (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}) \ldots.$$

Nejmenší společný zákryt grupy tříd $\mathfrak{S}/\mathfrak{u}$ a na př. grupy $\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ jest $\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{u}\mathfrak{a}$, neboť každý jeho prvek jest součtem všech prvků v $\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$, které jsou incidentní vždy s jedním prvkem v $\mathfrak{S}/\mathfrak{u}$, a tedy jest tvaru $\sigma\mathfrak{u}\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{u}\mathfrak{a}$; přitom ovšem σ značí některý prvek v $\mathfrak{S}$. Vychází tedy, že systém grup tříd

$$\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{u}\mathfrak{a},\ \mathfrak{S}\mathfrak{b}/\mathfrak{u}\mathfrak{b}, \ldots \qquad (2)$$

jest ryzí majorantní systém vzhledem k systému grup tříd (1) a jest spřažený. *Každé dvě grupy tříd systému (2) jsou tedy ekvivalentní* (později ukážeme, že isomorfní) *množiny, při čemž prosté zobrazení jedné na druhou* (isomorfismus) *jest dáno incidencí prvků.*

III. Přidružené rozklady.

18. Definice. Nechť A, B značí libovolné neprázdné množiny a nechť $\bar{A}$ jest nějaký rozklad v A a $\bar{B}$ nějaký rozklad v B.

Prvky kartézského součinu $\bar{A} \times \bar{B}$ jsou uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$. Když každou uspořádanou dvojici (a, b) nahradíme kartézským součinem $a \times b$, obdržíme neprázdný systém podmnožin v $A \times B$. Jest to *rozklad* v $A \times B$. Neboť mají-li dva prvky tohoto systému, $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$, společný prvek $(\alpha, \beta) \in A \times B$, pak jest $\alpha \in a_1 \cap a_2$, $\beta \in b_1 \cap b_2$ a tedy $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, takže prvky $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$ splývají. Tento rozklad v $A \times B$ nazýváme *přidružený* ke kartézskému součinu $\bar{A} \times \bar{B}$, nebo stručněji: *socius* $\bar{A} \times \bar{B}$ a značíme jej soc $\bar{A} \times \bar{B}$.

Pro náš účel jest důležitý zvláštní případ $\bar{B} = \bar{A}$: Ke každému rozkladu v A, $\bar{A}$, jest jednoznačně přiřazen jistý rozklad v $A \times$, totiž rozklad soc $\bar{A} \times \bar{A}$, který obdržíme, když utvoříme všechny uspořádané dvojice prvků v $\bar{A}$ a pak z každé dvojice, (a, b), kartézský součin $a \times b$. Rozklad soc $\bar{A} \times \bar{A}$ nazýváme kratčeji: přidružený k rozkladu $\bar{A}$, nebo socius rozkladu $\bar{A}$ a označujeme jej soc $\bar{A}$.

19. Kartézské zobrazení. Nechť opět Γ značí libovolnou neprázdnou množinu a nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné rozklady v Γ.

Zobrazení, které ke každému rozkladu v Γ přiřazuje jeho socius, nazveme *kartézské zobrazení*. Je-li A libovolná neprázdná podmnožina v Γ, pak kartézské zobrazení přiřazuje k rozkladu $\{A\}$ v Γ, skládajícímu se z jediného prvku A, rozklad soc $\{A\} = \{A \times\}$ v $\Gamma \times$, který se skládá z jediného prvku $A \times$. To vyjadřujeme tím, že kartézské zobrazení přiřazuje k podmnožině A podmnožinu $A \times$. Symbolem soc A značíme někdy kartézský čtverec $A \times$, takže zejména máme $\Gamma \times =$ soc Γ. Všimněme si, že je-li rozklad $\bar{A}$ *na* množině Γ, pak rozklad soc $\bar{A}$ jest *na* soc Γ.

Kartézské zobrazení jest prosté. Vskutku, předpokládejme, že soc $\bar{A} =$ soc $\bar{B}$. Pak ke každému prvku $p \in$ soc $\bar{A}$ existují prvky $a_1, a_2 \in \bar{A}$, $b_1, b_2 \in \bar{B}$ takové, že $p = a_1 \times a_2 = b_1 \times b_2$. Každý prvek $(\alpha, \beta) \in a_1 \times a_2$ jest tedy v $b_1 \times b_2$ a odtud plyne $a_1 \subset b_1$, $a_2 \subset b_2$; podobně odvodíme $b_1 \subset a_1$, $b_2 \subset a_2$, takže máme $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Zvolíme-li zejména libovolný prvek $a \in \bar{A}$, jest $a \times a \in$ soc $\bar{A}$ a existují prvky $b_1, b_2 \in \bar{B}$, pro něž platí $a \times a = b_1 \times b_2$; z předcházející úvahy pak plyne $a = b_1 = b_2$, takže máme $a \in \bar{B}$. Tím jest zjištěno, že platí $\bar{A} \subset \bar{B}$ a ovšem současně také $\bar{B} \subset \bar{A}$ a vychází $\bar{A} = \bar{B}$.

Dále ukážeme, že *kartézské zobrazení zachovává zákryt, normální zákryt a ryzí.* Podrobněji řečeno, rozklad A jest zjemněním (normálním, ryzím) rozkladu B tehdy a jen tehdy, když rozklad soc A jest zjemněním (normálním, ryzím) rozkladu soc B. Vskutku, nejprve předpokládejme, že rozklad A jest zjemněním rozkladu B, tedy $A \leqslant B$. Každý prvek rozkladu soc A jest tvaru $a_1 \times a_2$, kde $a_1, a_2 \in A$; z předpokladu plyne, že existují prvky $b_1, b_2 \in B$ takové, že $a_1 \subset b_1$, $a_2 \subset b_2$, takže máme $a_1 \times a_2 \subset b_1 \times b_2 \in$ soc B. Tím jest zjištěno, že platí soc $A \leqslant$ soc B. Když A jest normálním zjemněním rozkladu B, pak ke každému prvku $b_1 \times b_2 \in$ soc B existují prvky $a_1, a_2 \in A$, pro něž platí $a_1 \subset b_1$, $a_2 \subset b_2$; máme tedy $a_1 \times a_2 \subset b_1 \times b_2$ a vidíme, že prvek $a_1 \times a_2 \in$ soc A jest částí prvku $b_1 \times b_2 \in$ soc B a tedy rozklad soc A jest normálním zjemněním rozkladu soc B. Když A jest dokonce ryzím zjemněním rozkladu B, jsou prvky b_1, b_2 součty jistých prvků rozkladu A, tedy $b_1 \times b_2$ jest součtem jistých prvků rozkladu soc A a vychází, že rozklad soc A jest ryzím zjemněním rozkladu soc B. Za druhé předpokládejme, že rozklad soc A jest zjemněním rozkladu soc B, tedy soc $A \leqslant$ soc B. Pak pro $a \in A$ jest $a \times a \in$ soc A a z předpokladu plyne, že existují prvky $b_1, b_2 \in B$ takové, že $a \times a \subset b_1 \times b_2$; odtud vidíme, že jest $a \subset b_1 = b_2$. Tím jest zjištěno, že platí $A \leqslant B$. Když rozklad soc A jest normálním zjemněním rozkladu soc B, pak ke každému prvku $b \in B$ existují prvky $a_1, a_2 \in A$ takové, že $a_1 \times a_2 \subset b \times b$, takže $a_1, a_2 \subset b$; odtud vidíme, že rozklad A jest normálním zjemněním rozkladu B. Když rozklad soc A jest dokonce ryzím zjemněním rozkladu soc B, pak $b \times b$ jest součtem některých prvků rozkladu soc A, na př. $a_1 \times a_2$, $a'_1 \times a'_2, \ldots$, tedy b jest součtem prvků $a_1, a'_1, \ldots \in A$ a vidíme, že rozklad A jest ryzím zjemněním rozkladu B.

20. Přidružené systémy rozkladů. Nechť $\mathcal{A}$ značí libovolný neprázdný systém rozkladů v Γ.

Množinu obrazů v kartézském zobrazení jednotlivých prvků systému $\mathcal{A}$, t. j. tedy množinu přidružených rozkladů k prvkům v $\mathcal{A}$, nazveme systém *přidružený* k $\mathcal{A}$, nebo stručněji: socius $\mathcal{A}$ a označíme soc $\mathcal{A}$. soc $\mathcal{A}$ jest tedy neprázdný systém rozkladů v soc Γ.

21. Systém soc $\mathcal{A}$ má nejmenší zákryt, [soc $\mathcal{A}$], který jest ovšem rozkladem v $\Gamma \times$. Ukážeme, že *tento nejmenší zákryt jest zjemněním rozkladu přidruženého k nejmenšímu zákrytu systému* $\mathcal{A}$, tedy

$$[\text{soc}\, \mathcal{A}] \leqslant \text{soc}\, [\mathcal{A}]. \qquad (1)$$

Za tím účelem uvažujme o libovolném prvku $p \in [\text{soc}\, \mathcal{A}]$, takže

p jest součtem některých prvků v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$. Nechť $q_1 \in \mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ jest libovolný prvek obsažený v p, tedy $q_1 \subset p$. Podle definice rozkladu $[\mathrm{soc}\,A]$ jest p součtem všech prvků $q \in \mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$, pro něž existuje řetězec v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ od q_1 do q. Nechť

$$q_1, \ldots, q_\gamma$$

značí takový řetězec, takže $q = q_\gamma$ a každé dva sousední prvky q_δ, $q_{\delta+1}$ jsou incidentní. Podle definice rozkladu $\mathrm{soc}\,A$ jest každý prvek q_δ kartézský součin $a_\delta \times b_\delta$, kde a_δ, b_δ jsou prvky některého rozkladu $A_\delta \in A$. Z toho, že jsou incidentní prvky q_δ, $q_{\delta+1}$, plyne, že jsou incidentní prvky a_δ, $a_{\delta+1}$ a také prvky b_δ, $b_{\delta+1}$. Odtud vidíme, že $a_1, \ldots, a_\gamma$ a $b_1, \ldots, b_\gamma$ jsou řetězce v $\mathbf{s}\,A$, první od a_1 do a_γ a druhý od b_1 do b_γ. Označme u onen prvek rozkladu $[A]$, který obsahuje a_1, a v onen, který obsahuje b_1; pak jest $a_\gamma \subset u$, $b_\gamma \subset v$. Odtud plyne $(q =)\ a_\gamma \times b_\gamma \subset u \times v \in \mathrm{soc}\,[A]$ a tedy také $p \subset u \times v$, čímž jest důkaz proveden.

Ve vztahu (1) obecně neplatí znaménko $=$, jak ukazuje tento jednoduchý příklad:

Nechť se systém A skládá ze dvou rozkladů A, B, a rozklad A má jediný prvek a, rozklad B jediný prvek b, při čemž prvky a, b jsou disjunktní. Pak se systém $\mathrm{soc}\,A$ skládá ze dvou rozkladů, z nichž $\mathrm{soc}\,A$ má jediný prvek $a \times a$ a $\mathrm{soc}\,B$ jediný prvek $b \times b$. Protože prvky a, b jsou disjunktní, jsou $a \times a$, $b \times b$ disjunktní a tedy rozklad $[\mathrm{soc}\,A]$ se skládá ze dvou prvků $a \times a$, $b \times b$. Naproti tomu rozklad $\mathrm{soc}\,[A]$ se skládá ze čtyř prvků $a \times a$, $a \times b$, $b \times a$, $b \times b$, neboť rozklad $[A]$ jest $\{a, b\}$. Vidíme tedy, že *kartézské zobrazení vždycky nezachovává nejmenší zákryt systému* A.

Jakým podmínkám musí vyhovovati systém A, aby kartézské zobrazení zachovalo jeho nejmenší zákryt, t. j. aby ve vztahu (1) platila rovnost? Jinými slovy: Jakým podmínkám musí vyhovovati systém A, aby platil vztah

$$[\mathrm{soc}\,A] \geqslant \mathrm{soc}\,[A]? \tag{2}$$

Především poznamenejme, že každý prvek rozkladu $[\mathrm{soc}\,A]$ jest součtem některých prvků v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ a každý prvek této množiny jest tvaru $a \times b$, kde a, b jsou prvky jistého rozkladu v A (kvůli stručnosti říkáme někdy „rozklad v A“ místo „rozklad, který jest prvkem systému A“). Ke každému prvku $(\alpha, \beta) \in \Gamma\times$, který leží v některém prvku rozkladu $[\mathrm{soc}\,A]$, existují tedy prvky a, b jistého rozkladu v A, takové, že $\alpha \in a$, $\beta \in b$.

Nuže, předpokládejme, že platí vztah (2). Zvolme libovolné prvky $\alpha, \beta \in \Gamma$, ležící v některých prvcích $u, v \in [A]$, tedy $\alpha \in u$, $\beta \in v$. Pak jest ovšem $(\alpha, \beta) \in u \times v \in \mathrm{soc}[A]$ a protože platí vztah (2), existují, podle předcházející poznámky prvky a, b jistého rozkladu v A, takové, že $\alpha \in a$, $\beta \in b$. Každé dva prvky $\alpha, \beta \in \Gamma$, ležící v některých prvcích $u, v \in [A]$ leží tedy v jistých prvcích a, b *téhož* rozkladu v A.

Nechť nyní $\xi \in u$, $\eta \in v$. Pak tedy existují prvky x, y jistého rozkladu v A takové, že $\xi \in x$, $\eta \in y$. Dále jest $x \times y$ prvkem v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ a ovšem jest $x \times y \subset u \times v \subset [\mathrm{soc}\,A]$ $(= \mathrm{soc}\,[A])$. Protože také $a \times b$ jest prvkem v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ a jest částí prvku $u \times v$, existuje řetězec v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ od $a \times b$ do $x \times y$ a tedy existují řetězce v $\mathbf{s}A$

$$(a =)\, a_1, \ldots, a_\gamma (= x); \qquad (b =)\, b_1, \ldots, b_\gamma (= y),$$

při čemž stejnolehlé členy obou řetězců, t. j. členy se stejnými indexy, jsou prvky vždy téhož rozkladu v A. Vidíme tedy, že *platí-li vztah* (2), *pak ke každým prvkům* $\alpha, \xi \in \Gamma$ *ležícím v některém prvku* $v \in [A]$ *a k dalším prvkům* $\beta, \eta \in \Gamma$ *ležícím v některém prvku* $v \in [A]$ *existují řetězce v* $\mathbf{s}A$ *spojující prvky* α, ξ *a* β, η, *které se vyznačují tím, že mají stejnou délku a jejich stejnolehlé členy jsou prvky vždy téhož rozkladu v* A. Přitom ovšem tím, že řetězec spojuje dva prvky v Γ, rozumíme, že jeden z těch prvků jest v prvním a druhý v posledním členu řetězce.

Nyní ukážeme, že *tato podmínka k platnosti vztahu* (2) *také stačí.* Předpokládejme, že jest splněna. Nechť $u \times v$ jest libovolný prvek v $\mathrm{soc}\,[A]$, takže $u, v \in [A]$. Zvolme libovolné prvky $\alpha \in u$, $\beta \in v$. Z předpokladu plyne, že existují prvky a, b jistého rozkladu $A \in A$ takové, že $\alpha \in a$, $\beta \in b$. Pak $a \times b \in \mathrm{soc}\,A$ a tedy existuje jistý prvek $p \in [\mathrm{soc}\,A]$, jehož částí $a \times b$ jest. Důkaz bude proveden, zjistíme-li, že platí $u \times v \subset p$. Za tím účelem uvažujme o libovolném prvku $(\xi, \eta) \in u \times v$, takže $\xi \in u$, $\eta \in v$. Protože α, ξ leží v témže prvku $u \in [A]$ a podobně β, η v témže prvku $v \in [A]$, plyne z předpokladu, že existují řetězce v $\mathbf{s}A$ spojující prvky α, ξ a β, η, které jsou tvaru

$$(a =)\, a_1, \ldots, a_\gamma, \qquad (b =)\, b_1, \ldots, b_\gamma,$$

při čemž stejnolehlé členy jsou prvky vždy téhož rozkladu v A. Avšak

$$(a \times b =)\, a_1 \times b_1, \ldots, a_\gamma \times b_\gamma$$

jest řetězec v $\mathbf{s}\,\mathrm{soc}\,A$ od $a \times b$ do $a_\gamma \times b_\gamma$, takže $a_\gamma \times b_\gamma \subset p$. Platí tedy $(\xi, \eta) \in a_\gamma \times b_\gamma \subset p$ a tedy také $u \times v \subset p$.

Důležitý případ, kdy jest splněna předcházející podmínka a kdy tedy platí vztah (2) jest ten, že A jest systém rozkladů *na* Γ. Vskutku, předpokládejme, že A jest systém rozkladů na Γ. Nechť prvky $\alpha, \xi \in \Gamma$

leží v témže prvku rozkladu $[\dot{A}]$ a podobně prvky β, $\eta \in \Gamma$. Pak tedy existují řetězce v $\mathbf{s}A$:

$$a_1, \ldots, a_\gamma,$$
$$b_1, \ldots, b_\delta,$$

z nichž první spojuje prvky α, ξ a druhý prvky β, η. Protože prvky α, ξ, β, η leží v jistých prvcích každého rozkladu v A (neboť jde o rozklady *na* Γ), můžeme předpokládati, že a_1, b_1 a a_γ, b_γ jsou prvky vždy téhož rozkladu v A. Dále můžeme předpokládati, že oba řetězce mají stejnou délku, tedy $\delta = \gamma$, neboť je-li na př. $\delta < \gamma$, prodloužíme druhý řetězec tím, že na jeho konci přidáme $\gamma - \delta$ členů vesměs rovných prvku b_δ. První pár stejnolehlých členů v našich řetězcích se již tedy skládá z prvků téhož rozkladu v A. Je-li b_2 prvkem téhož rozkladu jako a_2, položíme $b'_2 = b_2$; jinak rozumíme symbolem b'_2 některý prvek onoho rozkladu, jehož prvkem jest a_2, který jest incidentní s $b_1 \cap b_2$. Pak

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\gamma,$$
$$b_1, b'_2, b_2, \ldots, b_\gamma$$

jsou řetězce v $\mathbf{s}A$ od a_1 do a_γ a od b_1 do b_γ, při čemž první dva páry stejnolehlých členů se skládají z prvků vždy téhož rozkladu v A. Je-li a_3 prvkem téhož rozkladu jako b_2, položíme $a'_2 = a_3$; jinak rozumíme symbolem a'_2 některý prvek onoho rozkladu, jehož prvkem jest b_2, který jest incidentní s $a_2 \cap a_3$. Pak v řetězcích

$$a_1, a_2, a'_2, a_3, \ldots, a_\gamma,$$
$$b_1, b'_2, b_2, b_3, \ldots, b_\gamma$$

první tři páry stejnolehlých členů se skládají z prvků vždy téhož rozkladu v A. Pokračujíce tímto způsobem, definujeme řetězce

$$a_1, a_2, a'_2, a_3, \ldots, a_{\gamma-1}, a'_{\gamma-1}, a_\gamma,$$
$$b_1, b'_2, b_2, b'_3, \ldots, b'_{\gamma-1}, b_{\gamma-1}, b_\gamma$$

od a_1 do a_γ a od b_1 do b_γ, tedy spojující prvky α, ξ a β, η, při čemž oba prvky každého páru stejnolehlých členů patří vždy do téhož rozkladu v A. Tím jest zjištěno, že *pro každý neprázdný systém rozkladů na* Γ, A, *platí rovnost* $[soc\, A] = soc\, [A]$, čili že *kartézské zobrazení zachovává nejmenší zákryt každého neprázdného systému rozkladů na* Γ.

Další případ, kdy ve vztahu (1) platí rovnost jest tento: Máme systém skládající se ze dvou rozkladů A, C takových, že každý prvek v A jest incidentní právě s jedním prvkem v C a mimo to platí $\mathbf{s}C \subset \mathbf{s}A$. Vskutku, podle výsledku v odst. 13, jest pak každý prvek v $[A]$ součtem všech prvků v A, které jsou incidentní s jistým prvkem v C. Jsou-li tedy α, $\xi \in \Gamma$ (β, $\eta \in \Gamma$) libovolné prvky ležící v některém prvku

$u \in [\mathcal{A}]$ ($v \in [\mathcal{A}]$), existují prvky $a, x \in \mathcal{A}$ ($b, y \in \mathcal{A}$) takové, že $\alpha \in a$, $\xi \in x$; $\beta \in b$, $\eta \in y$ a vyznačují se tím, že jsou incidentní s jistým prvkem $c \in C$ ($d \in C$). Zřejmě jsou a, c, x; b, d, y řetězce v $\mathbf{s}\mathcal{A}$ spojující prvky α, ξ a β, η a tyto řetězce mají stejnou délku a jejich stejnolehlé členy jsou prvky vždy téhož rozkladu v $\mathcal{A}$. Skutečně tedy platí rovnost $[\text{soc}\,\mathcal{A}] = \text{soc}\,[\mathcal{A}]$.

22. Podobné úvahy se připínají k pojmu největšího zjemnění systému soc $\mathcal{A}$. Jaký jest vztah mezi největším zjemněním systému soc $\mathcal{A}$, (soc $\mathcal{A}$), a rozkladem přidruženým k největšímu zjemnění systému $\mathcal{A}$, soc $(\mathcal{A})$, v případě že tyto rozklady existují?

Uvažujme především o libovolném výběru v systému soc $\mathcal{A}$, V! Nechť v_1 (v_2) jest systém všech podmnožin v Γ, které jsou prvními (druhými) činiteli některého prvku výběru V. Pak v_1, v_2 *jsou výběry v systému* $\mathcal{A}$. Ukažme to na př. o systému v_1! Nechť $A \in \mathcal{A}$ jest libovolný prvek. Pak soc $A \in$ soc $\mathcal{A}$ a tedy ve výběru V jest právě jeden prvek $a_1 \times a_2 \in$ soc A. Podle definice systému v_1 jest v něm obsažena jako prvek množina $a_1 \in A$. Tedy v_1 obsahuje z každého rozkladu systému $\mathcal{A}$ alespoň jeden prvek. Obsahuje-li z některého rozkladu $A \in \mathcal{A}$ dva různé prvky a_1, a'_1, pak jsou ve výběru V dva různé prvky $a_1 \times a_2$, $a'_1 \times a'_2$, které patří do téhož rozkladu soc $A \in$ soc $\mathcal{A}$, ale to odporuje tomu, že V jest výběr v systému soc $\mathcal{A}$.

Kvůli stručnosti říkáme, že výběr V jest *kartézsky složen* z výběrů v_1, v_2 (v tomto pořádku), nebo kratčeji, že jest *složen* z výběrů v_1, v_2; výběr v_1 (v_2) nazýváme *první (druhá) kartézská složka* výběru V, kratčeji: *první (druhá) složka* výběru V. Tyto složky jsou ovšem výběrem V jednoznačně určeny.

Nechť naopak v_1, v_2 značí libovolné výběry v systému $\mathcal{A}$. Pak *existuje právě jeden výběr v systému soc* $\mathcal{A}$, V, *takový, že* v_1 (v_2) *jest jeho první (druhou) složkou.* Vskutku, nechť $a_1 \in v_1$ značí libovolný prvek. Nechť $A, A', \ldots$ jsou všechny rozklady v systému $\mathcal{A}$, které obsahují a_1 jako prvek, a nechť $a_2, a'_2, \ldots$ jsou prvky ve výběru v_2, které jsou v některém z těchto rozkladů, takže $\{a_2, a'_2, \ldots\} = v_2 \cap (A \vee A' \vee \ldots)$. Pak $a_1 \times a_2$, $a_1 \times a'_2, \ldots$ jsou prvky v $\mathbf{s}$ soc $\mathcal{A}$. Součet všech množin $\{a_1 \times a_2, a_1 \times a'_2, \ldots\}$ patřících k jednotlivým prvkům $a_1 \in v_1$ jest podmnožinou v $\mathbf{s}$ soc $\mathcal{A}$; označíme ji V. Nuže, V jest výběr v systému soc $\mathcal{A}$ a v_1 (v_2) jest jeho první (druhá) kartézská složka. Vskutku, nechť soc $A \in$ soc $\mathcal{A}$ značí libovolný prvek. Pak jest $A \in \mathcal{A}$ a ve výběru v_1 (v_2) jest právě jeden prvek a_1 (a_2) patřící do A, takže $a_1 \times a_2 \in V$. V obsahuje tedy z každého rozkladu v soc $\mathcal{A}$ alespoň jeden prvek. Obsahuje-li z některého rozkladu soc A e soc $\mathcal{A}$ dva různé prvky $a_1 \times a_2$, $b_1 \times b_2$, pak jsou buď množiny a_1, b_1 nebo a_2, b_2 různé; to není možné, neboť na př. množiny a_1, b_1 jsou prvky výběru v_1 a téhož rozkladu A e $\mathcal{A}$. V jest tedy výběrem v systému soc $\mathcal{A}$. Každý prvek ve výběru v_1 (v_2) jest prvním (druhým) činitelem jistého prvku výběru V a první (druhý) činitel každého prvku ve V jest prvkem ve v_1 (v_2). Výběr V má tedy první kartézskou složku v_1 a druhou v_2.

Nechť nyní V značí libovolný výběr v systému soc $\mathcal{A}$ a v_1 (v_2) jeho první (druhou) kartézskou složku.

Ukážeme, že *V jest trsem tehdy a jen tehdy, když v_1 i v_2 jsou trsy a je-li trsem, pak jeho střed jest kartézským součinem středu trsu v_1 se středem trsu v_2*, t. j.

$$\mathbf{p}V = \mathbf{p}v_1 \times \mathbf{p}v_2. \tag{1}$$

Vskutku, nejprve předpokládejme, že V jest trs a nechť (α, β) značí libovolný prvek v jeho středu, takže α, β jsou jisté prvky v Γ. Každý prvek ve výběru v_1 (v_2), a_1 (a_2), jest prvním (druhým) činitelem jistého prvku výběru V a tento prvek obsahuje (α, β), takže máme $\alpha \in a_1$, ($\beta \in a_2$). Odtud plyne $\alpha \in \mathbf{p}v_1$ ($\beta \in \mathbf{p}v_2$) a dále $(\alpha, \beta) \in \mathbf{p}v_1 \times \mathbf{p}v_2$. Vidíme tedy, že v_1 i v_2 jsou trsy a že platí vztah $\mathbf{p}V \subset \mathbf{p}v_1 \times \mathbf{p}v_2$. Za druhé předpokládejme, že v_1 i v_2 jsou trsy a nechť α, β značí libovolné prvky v jejich středech, tedy $\alpha \in \mathbf{p}v_1$, $\beta \in \mathbf{p}v_2$. Každý prvek ve výběru V jest tvaru $a_1 \times a_2$, kde a_1 (a_2) značí jistý prvek výběru v_1 (v_2), který obsahuje α (β), takže máme $(\alpha, \beta) \in a_1 \times a_2$. Odtud plyne $(\alpha, \beta) \in \mathbf{p}V$. Současně ovšem platí $(\alpha, \beta) \in \mathbf{p}v_1 \times \mathbf{p}v_2$. Vidíme tedy, že V jest trs a že platí vztah $\mathbf{p}v_1 \times \mathbf{p}v_2 \subset \mathbf{p}V$, čímž jest důkaz ukončen.

Nyní můžeme přistoupiti k vyšetření vztahů mezi největším zjemněním systému soc $\mathcal{A}$, (soc $\mathcal{A}$), a rozkladem přidruženým k největšímu zjemnění systému $\mathcal{A}$, soc ($\mathcal{A}$), v případě, že tyto rozklady existují. Ukážeme, že *obě zjemnění ($\mathcal{A}$), (soc $\mathcal{A}$) existují současně, t. j. existuje-li jedno, existuje i druhé, a pak platí rovnost*

$$(\text{soc}\,\mathcal{A}) = \text{soc}\,(\mathcal{A}). \tag{2}$$

Stručněji řečeno, *největší zjemnění systému rozkladů se kartézským zobrazením zachovává*, čili jest vůči němu invariantní.

Vskutku, nejprve předpokládejme, že existuje rozklad ($\mathcal{A}$). Zvolíme-li dva libovolné prvky v systému ($\mathcal{A}$), jsou to středy jistých trsů v $\mathcal{A}$, které označíme v_1, v_2, takže ony prvky jsou $\mathbf{p}v_1$, $\mathbf{p}v_2$. Podle hořejší úvahy existuje trs v systému soc $\mathcal{A}$, V, jehož první kartézskou složkou jest v_1 a druhou v_2 a $\mathbf{p}V$ jest prvkem v (soc $\mathcal{A}$). Tím jest zjištěno, že existuje největší zjemnění systému soc A, (soc A). Ze vztahu (1) pak plyne soc $(A) \subset$ (soc A). Za druhé předpokládejme, že existuje rozklad (soc A). Zvolíme-li v něm libovolný prvek, jest středem jistého trsu v soc A, který označíme V, takže zvolený prvek jest pV. Podle hořejší úvahy existují trsy v systému A, v_1, v_2, takové, že v_1 jest první a v_2 druhou kartézskou složkou trsu V a ovšem jsou pv_1, pv_2 prvky v (A). Tím jest zjištěno, že existuje největší zjemnění systému A, (A). Ze vztahu (1) pak plyne (soc $A) \subset$ soc (A) a důkaz jest ukončen.

Z této věty plynou některé důsledky. Především *kartézské zobrazení zachovává střed každého systému A*, t. j. střed systému soc A jest kartézským čtvercem středu systému A, když ovšem existuje. Stručněji řečeno, platí rovnost

$$\mathbf{s}\,(\operatorname{soc} A) = \operatorname{soc}\,\mathbf{s}\,(A).$$

Neboť každý prvek rozkladu (soc A) jest kartézským součinem vhodných prvků rozkladu (A), jak plyne ze vzorce (2), takže mezi levou a pravou stranou této rovnosti platí vztah $\subset$; naopak jest kartézský součin každých dvou prvků rozkladu (A) prvkem rozkladu (soc A), jak rovněž plyne ze vzorce (2) a tedy mezi levou a pravou stranou oné rovnosti platí současně vztah $\supset$.

Dále plyne z naší věty, že *kartézské zobrazení zachovává průsek každé podmnožiny v Γ s libovolným rozkladem v Γ*, pokud není prázdný; jinak řečeno, platí rovnost

$$\operatorname{soc}(B \sqcap A) = \operatorname{soc} B \sqcap \operatorname{soc} A,$$

a to pro každou podmnožinu $B \subset \Gamma$ a libovolný rozklad A, když $B \cap \mathbf{s} A \neq \emptyset$. To plyne z toho, že neprázdný průsek $B \sqcap A$ jest největším zjemněním systému dvou rozkladů, z nichž jedním jest rozklad $\{B\}$, skládající se z jediného prvku B, a druhým A.

Konečně si všimněme, že *v případě rozkladů na množině Γ jest kartézské zobrazení svazovým isomorfismem.*

23. Nyní ukážeme, že i ostatní pojmy studované v kap. II. jsou vůči kartézskému zobrazení invariantní.

Především *kartézské zobrazení zachovává majorantní event. normální nebo ryzí systémy rozkladů v Γ*, takže pro každé dva neprázdné systémy rozkladů v Γ, A, B, vztahy $A \geqslant B$ a soc $A \geqslant$ soc B platí současně.

Vskutku, nechť A, B značí libovolné neprázdné systémy rozkladů v Γ.

Nejprve předpokládejme, že systém A jest majorantní (normální, ryzí) vzhledem k B, tedy $A \geqslant B$. Nechť soc A jest libovolný rozklad v soc $\mathcal{A}$, takže $A \,\mathrm{e}\, \mathcal{A}$. Z předpokladu plyne, že existuje alespoň jeden rozklad $B \,\mathrm{e}\, \mathbf{B}$, který jest zjemněním (normálním, ryzím) rozkladu A. Protože kartézské zobrazení zachovává zákryt (normální, ryzí), jest rozklad soc B zjemněním (normálním, ryzím) rozkladu soc A. Podobně se přesvědčíme, že ke každému rozkladu soc $B \,\mathrm{e}\,$ soc $\mathbf{B}$ existuje alespoň jeden rozklad soc $A \,\mathrm{e}\,$ soc $\mathcal{A}$, který jest zákrytem (normálním, ryzím) rozkladu soc B. Tím jest zjištěno, že systém soc $\mathcal{A}$ jest majorantní (normální, ryzí) vzhledem k soc $\mathbf{B}$. Za druhé předpokládejme, že systém soc $\mathcal{A}$ jest majorantní (normální, ryzí) vzhledem k soc $\mathbf{B}$. Když v předcházející úvaze vyměníme ròli rozkladů soc A, soc B s rozklady A, B, obdržíme, že systém $\mathcal{A}$ jest majorantní (normální, ryzí) vzhledem k $\mathbf{B}$.

Dále *zachovává kartézské zobrazení trsové a spřažené systémy rozkladů*, takže systémy $\mathcal{A}$ a soc $\mathcal{A}$ jsou trsové nebo spřažené současně.

Vskutku, nejprve předpokládejme, že systém $\mathcal{A}$ jest trsový. Nech p značí libovolný prvek v systému s soc $\mathcal{A}$ a a_1 (a_2) jeho prvního (druhého) činitele, takže a_1, a_2 jsou prvky téhož rozkladu v $\mathcal{A}$ a $p = a_1 \times a_2$. Z předpokladu plyne, že existuje trs v_1 (v_2) v systému $\mathcal{A}$, který obsahuje a_1 (a_2) jako prvek, takže $a_1 \,\mathrm{e}\, v_1$ ($a_2 \,\mathrm{e}\, v_2$). Podle vět v odst. 22 existuje trs v systému soc $\mathcal{A}$, V, jehož první kartézskou složkou jest v_1 a druhou v_2. Protože prvky a_1, a_2 leží v témže rozkladu v $\mathcal{A}$ a $a_1 \,\mathrm{e}\, v_1$, $a_2 \,\mathrm{e}\, v_2$, máme $p \,\mathrm{e}\, V$ a tím je zjištěno, že systém soc $\mathcal{A}$ jest trsový. Když systém $\mathcal{A}$ jest dokonce spřažený, jsou prvkem p trsy v_1, v_2 a tedy i trs V jednoznačně určeny a odtud plyne, že i systém soc $\mathcal{A}$ jest spřažený. Za druhé předpokládejme, že systém soc $\mathcal{A}$ jest trsový. Nechť $a \,\mathrm{e}\, \mathrm{s}\mathcal{A}$ značí libovolný prvek. Z předpokladu plyne, že existuje trs v soc $\mathcal{A}$, V, který obsahuje prvek $a \times a$. První kartézská složka trsu V, v_1, jest, podle vět v odst. 22, trsem v systému $\mathcal{A}$ a ovšem prochází prvkem a. Systém $\mathcal{A}$ jest tedy trsový. Předpokládejme dále, že systém soc $\mathcal{A}$ jest spřažený. Připusťme, že některým prvkem $a \,\mathrm{e}\, \mathrm{s}\mathcal{A}$ procházejí dva různé trsy v, v', které jsou v systému $\mathcal{A}$. Z toho, že tyto trsy jsou různé, plyne, že na př. v trsu v jest alespoň jeden prvek $b \,\mathrm{e}\, \mathrm{s}\mathcal{A}$, který není v trsu v'. b jest prvkem jistého rozkladu $B \,\mathrm{e}\, \mathcal{A}$ a trs v' obsahuje právě jeden prvek b', který jest prvkem rozkladu B. Jest $b' \neq b$, neboť jinak by prvek b byl prvkem trsu v', což jest vyloučeno. Tedy platí také $b' \times b' \neq b \times b$. Nechť V (V') jest onen trs v systému soc $\mathcal{A}$, jehož první i druhou kartézskou složkou jest v (v'). Trs V obsahuje ovšem prvky $a \times a$, $b \times b$ a trs V' prvky $a \times a$, $b' \times b'$, takže prvkem $a \times a \,\mathrm{e}\,$ soc $\mathcal{A}$ procházejí trsy V, V'. Tyto trsy jsou různé, neboť oba prvky $b \times b$, $b' \times b'$ téhož rozkladu soc $B \,\mathrm{e}\,$ soc $\mathcal{A}$ jsou různé a tedy nemohou býti v témže trsu v systému soc A. Vychází tedy, že systém soc A není spřažený, což jest proti předpokladu a důkaz jest ukončen.

V odst. 16 jsme ukázali, že ke každému trsovému systému rozkladů existují ryzí majorantní spřažené systémy a uvedli jsme konstrukci těchto majorantních systémů. Nyní můžeme tento výsledek doplniti tím, že *tato konstrukce jest invariantní vzhledem ke kartézskému zobrazení.*

Vskutku, nechť A značí libovolný trsový systém rozkladů v Γ. Jeho obraz v kartézském zobrazení (stručněji: obraz), soc A, jest trsový (viz výše). V dalším užíváme v konstrukci spřažených ryzích majorantních systémů vzhledem k systému A téhož označení jako v odst. 16, tedy A, s, Π, U, P, a v konstrukci spřažených ryzích majorantních systémů vzhledem k systému soc A ($\equiv A'$) téhož označení čárkovaného, tedy A', s', Π', U', P'. Máme ukázati, že obrazy rozkladů nebo systémů rozkladů nečárkovaných jsou rozklady nebo systémy rozkladů označené stejnými písmenami čárkovanými. Nuže, máme:

$$\begin{array}{lll} \text{soc } A = A' & \text{podle definice;} \\ \text{soc } s = s' & \text{(odst. 22);} \\ \text{soc } \Pi = \Pi' & \text{(odst. 22);} \\ \text{soc } U = U' & \text{(odst. 19);} \\ \text{soc } [\Pi] = [\Pi'] & \text{(odst. 21);} \\ \text{soc } P = P' & \text{(konec odst. 21)} \end{array}$$

a tím jest důkaz proveden.

THÉORIE DES DÉCOMPOSITIONS DANS UN ENSEMBLE.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉSUMÉ.

1. Une décomposition dans un ensemble Γ est, par définition, un système non vide et disjoint de sousensembles non vides de Γ. Une décomposition dans Γ qui recouvre l'ensemble Γ tout entier s'appelle décomposition *sur* Γ ou bien décomposition *de* Γ. L'idée fondamentale de la théorie ici développée est de subordonner la théorie des décompositions à la théorie générale des lattices. Cela s'effectue de manière qu'on définit, pour chaque système non vide de décompositions dans Γ, $\mathcal{A}$, un ordre partiel ainsi que deux décompositions dans Γ, $[\mathcal{A}]$ et $(\mathcal{A})$, représentant la borne supérieure et inférieure du systéme $\mathcal{A}$ par rapport à l'ordre partiel en question. J'appelle ces deux décomposition *le plus petit recouvrement* et *le plus grand raffinement* du système $\mathcal{A}$. Quoique cette subordination de la théorie des décompositions à la théorie des lattices détermine en grandes lignes le caractère de notre théorie, elle ne la peut nullement épuiser; en effet, la théorie générale des lattices réalisée par des décompositions dans un ensemble, fait intervenir les décompositions comme des éléments de lattices, laissant entièrement à côté les relations existant entre les éléments des différentes décompositions.

2. Soient A, B décompositions dans Γ. Si tout élément de B est un sousensemble d'un élément de A, la décomposition A (B) est appelée *recouvrement (raffinement)* de B (A), c'est ce qu'on exprime par le symbole $A \geqslant B$. A cette notion de base se rattachent d'autres notions qui concernent le cas ou tout élément de A contient au moins un élément de B ou bien, plus particulièrement, ou il est la somme d'éléments de B; on dit alors que, A (B) est un recouvrement (raffinement) *normal* ou bien *pur* de A (B). Le symbole $\geqslant$ définit un ordre partiel dans tout système non vide de décompositions dans Γ.

3. Soit $\mathcal{A}$ un système non vide de décompositions dans Γ. Nous définissons une décomposition dite *le plus petit recouvrement* du système $\mathcal{A}$, $[\mathcal{A}]$, de la manière suivante: Pour deux éléments quelconques $a, b \in \mathbf{s}\mathcal{A}$[1]) nous appelons chaîne de a à b dans $\mathbf{s}\mathcal{A}$ une suite finie

[1]) Si E désigne un système d'ensembles, les symboles $\mathbf{s}E$ et $\mathbf{p}E$ désignent la somme et l'intersection des ensembles qui sont les éléments de E.

d'éléments de $\mathbf{s}A$ dont le premier élément est a et le dernier b et qui jouit de la propriété que, deux éléments voisins quelconques de la suite sont incidents, c'est à dire qu'ils ont des éléments de l'ensemble Γ en commun. L'ensemble $\mathbf{s}A$ se divise alors en classes telles que, pour deux éléments quelconques de $\mathbf{s}A$ situés dans la même classe il existe une chaîne dans $\mathbf{s}A$ d'un élément à l'autre tandis que pour deux éléments situés dans des classes différentes il n'en existe pas. On obtient la décomposition $[A]$ èn réunissant par sommation tous les éléments de $\mathbf{s}A$ qui sont dans la même classe.

Pour definir le plus grand raffinement du système A, (A), on procède de la manière suivante: Un système d'éléments de $\mathbf{s}A$, Y, qui contient précisément un élément de chaque décomposition-élément de A s'appelle *faisceau* dans $\mathbf{s}A$, si l'ensemble $\mathbf{p}Y$ n'est pas vide; $\mathbf{p}Y$ s'appelle alors le *centre* du faisceau Y. Il est clair qu'il y a de systèmes A pour lesquels aucun faisceau dans $\mathbf{s}A$ n'existe. *Le plus grand raffinement* du système A, (A), est, par définition, l'ensemble de centres de tous les faisceaux dans $\mathbf{s}A$, pourvu que cet ensemble n'est pas vide. Dans le cas contraire on dit que le système A n'a pas de plus grand raffinement. On démontre facilement que, le plus grand raffinement (A) existe toujours s'il s'agit de décompositions *sur* Γ.

4. Soient A, B des systèmes non vides de décompositions dans Γ. Le système A (B) est dit *majeur (mineur)* par rapport à B (A) si à tout élément de A il existe un raffinement élément de B et à tout élément de B un recouvrement élément de A. S'il s'agit toujours d'un raffinement ou recouvrement normal (pur), le système A s'appelle majeur normal (pur) par rapport à B et de même le système B est mineur normal (pur) par rapport à A.

5. Soit A un système non vide de décompositions dans Γ. Si par tout élément de $\mathbf{s}A$ il passe au moins un faisceau dans $\mathbf{s}A$ on dit que le système A est *à faisceaux*; s'il en passe précisément un, le système A est dit *couplé*. Dans ce dernier cas tous les décompositions-éléments de A sont des ensembles équivalents.

Au sujet de systèmes à faisceaux on démontre le théorème suivant:

Étant donné un système à faisceaux, A, on peut construire des systèmes majeurs purs par rapport à A qui sont couplés.

En appliquant la construction aux décompositions de groupes engendrées par des sousgroupes invariants on trouve le théorème suivant:

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe. Considérons un système non vide de sousgroupes dans $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... et un autre système $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... tel que, $\mathfrak{a}$ est invariant *dans* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{B}$, *etc. Soit* $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \ldots$ *le groupe-intersection de tous les groupes* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ *et* $\mathfrak{u}$ *un sousgroupe invariant dans* $\mathfrak{S}$ *qui contient le groupe* $(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{a})(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}) \ldots$ *Dans ces conditions les groupes du système*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{a}/\mathfrak{u}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{S}\mathfrak{b}/\mathfrak{u}\mathfrak{b}, \ldots$$

sont mutuellement équivalents (nous montrerons plus tard qu'il s'agit du isomorphisme), *la correspondance biunivoque entre les éléments de deux groupes étant donnée de manière que, deux éléments correspondants quelconques sont incidents.*

6. A, B étant des ensembles non vides quelconques, nous désignons par $A \times B$ le produit cartésien de l'ensemble A avec B, c'est à dire 'ensemble de tous les couples ordonnées (α, β) telles que $\alpha \in A$, $\beta \in B$.

Considérons le carré cartésien $\Gamma \times \Gamma$. Soit A une décomposition dans Γ. Nous définissons une décomposition dans $\Gamma \times \Gamma$, nommée *associée à* A de la manière suivante: Les éléments de la nouvelle décomposition sont les produits cartésiens $a \times b$ formés des différents éléments (a, b) du carré cartésien $A \times A$. Nous désignons la décomposition associée à A par le symbole soc A.

La correspondance appellée *cartésienne*, qui fait correspondre à toute décomposition dans Γ, A, la décomposition soc A est biunivoque. Par rapport à cette correspondance les notions de recouvrement, raffinement, de recouvrement ou raffinement normal ou pur sont invariantes. De même la correspondance cartésienne conserve tous les autres notions considérées plus haut à l'exception du plus petit recouvrement d'un système de décompositions qui n'est invariant que dans de cas particuliers p. ex. s'il s'agit de décompositions *sur* Γ. En particulier la construction déjà mentionnée qui conduit d'un système de décompositions à faisceaux à un système majeur pur et couplé est invariante par rapport à la correspondance cartésienne.