Otakar Borůvka

Sur les matrices singulières

C. R. Acad. Sci. Paris t. 203, 1936, 600-602

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500046

ALGÈBRE. — *Sur les matrices singulières.* Note de M. **Ottokar Borůvka**.

1. Nous considérons des matrices carrées dont les éléments sont des nombres dans un corps donné K. Si X désigne une matrice d'ordre n, la $j^{\text{ième}}$ matrice associée (compound) à X, qui est, on le sait, formée des différents mineurs d'ordre $(1 \leqq) j (\leqq n)$ de la matrice X, sera désignée par ${}_jX$. Pour deux matrices X, Y du même ordre on a la relation bien connue suivante

$$(1) \qquad {}_j(XY) = {}_jX \,.\, {}_jY.$$

2. Considérons une matrice X d'ordre n. Il résulte de la formule (1) que les rangs des différentes matrices de la suite $X, X^2, X^3, \ldots$ forment une suite non croissante. Il existe par conséquent, dans cette suite, une matrice X^α telle que toutes les matrices $X^\alpha, X^{\alpha+1}, \ldots$ ont le même rang j, tandis que celles qui précèdent X^α, s'il y en a, sont de rangs supérieurs à j. Nous disons que la matrice X est de genre $n-j$ et nous appelons le nombre α l'*indice* de la matrice X. Avec ces définitions une matrice régulière est de genre 0 et son indice est 1; une matrice d'ordre n qui est nulle ou nilpotente (¹) est de genre n.

3. En appliquant la formule (1) on démontre le lemme suivant :

Lemme. — *Pour qu'une matrice* X *d'ordre n soit de genre $n-j$* $(0 \leqq j \leqq n)$, *il faut et il suffit que la matrice* ${}_{j+1}X$ *soit nulle ou nilpotente* $(0 \leqq j \leqq n-1)$ *et la matrice* ${}_jX$ *ne jouisse d'aucune de ces particularités.*

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème I. — *Pour qu'une matrice* X *d'ordre n soit de genre $n-j$* $(0 \leqq j \leqq n)$, *il faut et il suffit que précisément $n-j$ racines de son équation caractéristique soient nulles.*

Supposons, en effet, que la matrice X d'ordre n soit de genre $n-j$ $(0 \leqq j \leqq n)$. Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les racines de son équation caracté-

(¹) Une matrice X, non nulle, s'appelle *nilpotente* si $X^m = 0$ pour un nombre naturel m convenable.

ristique. D'après un théorème bien connu, les racines de l'équation caractéristique de la matrice ${}_{j\ 1}\mathrm{X}$ $(0 \leqq j < n - 1)$ sont les produits $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{j\ 1}}$, formés des différentes combinaisons des $x\, j + 1$ à $j + 1$. La matrice ${}_{j+1}\mathrm{X}$ étant nulle ou nilpotente, d'après le lemme, tous les produits en question sont égaux à zéro. Par conséquent, parmi les racines x, il y en a $n - j$ au moins qui sont nulles. S'il y en a $n - j + 1$ qui sont nulles, tous les produits analogues aux précédents, $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}$ s'annulent. Il en résulte que la matrice ${}_{j}\mathrm{X}$ est nulle ou nilpotente, ce qui est contraire au lemme. La seconde partie du théorème se démontre par des raisonnements analogues aux précédents.

Pour toute matrice d'ordre n et de genre $n - j$, on démontre que le rang de la matrice X est inférieur d'une unité au moins au rang r de la matrice X, lorsque $r > j$. Il en résulte une borne supérieure suivante pour l'indice α de la matrice X : $\alpha \_ 2^{n\ \ j+1}$.

4. Nous désignons par $\Psi(x) (= x^m + a_1 x^{m\ 1} + \ldots)$ le polynome fondamental d'une matrice X d'ordre n. Ce polynome est, on le sait, le polynome dans K d'ordre minimum tel que $\Psi(\mathrm{X}) = 0$. Tous les polynomes dont il est question dans la suite sont supposés être dans K. Toute racine x_i d'un diviseur irréductible $d(x)$ du polynome $\Psi(x)$ est une racine de l'équation caractéristique de la matrice X et elle figure dans cette équation avec une certaine multiplicité m_i. Pour la commodité du langage nous appelons *multiplicité* du polynome $d(x)$ le nombre Σm_i, où la sommation correspond aux différentes racines du polynome $d(x)$.

Nous désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les racines de l'équation caractéristique de la matrice X. Pour tout polynome $\mathrm{Q}(x)$ les racines de l'équation caractéristique de la matrice $\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ sont les valeurs

$$\mathrm{Q}(x_1), \quad \ldots, \quad \mathrm{Q}(x_n). \tag{2}$$

Par conséquent, d'après le théorème I, le genre de la matrice $\mathrm{Q}(x)$ est égal au nombre de zéros figurant parmi ces valeurs.

Théorème II. — *Pour que le polynome fondamental d'une matrice* X *soit réductible dans* K, *il faut et il suffit qu'il existe dans* K *des polynomes en* X, *non nuls, de genre* $\geqq 1$.

Supposons, en effet, que, le polynome $\Psi(x)$ soit réductible dans K de sorte qu'il contienne un facteur $d(x)$ irréductible dans K. Comme toute racine du polynome $\Psi(x)$ figure parmi les nombres $x_1, \ldots, x_n$, au moins une des valeurs (2), où l'on écrit d au lieu de Q, est nulle. Par conséquent le polynome $d(\mathrm{X})$ est de genre > 1 et il n'est pas nul, car $d(x)$ est de degré inférieur à celui de $\Psi(x)$. Supposons, en second lieu, qu'il existe dans K un polynome Q(X) non nul et de genre >1. Q(X) n'étant pas nul, on peut supposer que le polynome $Q(x)$ est de degré inférieur à celui de $\Psi(x)$. L'hypothèse concernant le genre de Q(X) entraîne que, parmi les valeurs (2), il en figure une ou plusieurs nulles. Si $Q(x)$ n'est pas irréductible dans K, il contient un facteur irréductible qui s'annule pour au moins une des racines $x_1, \ldots, x_n$. Il existe par conséquent un polynome $d(x)$ irréductible dans K, dont le degré est inférieur à celui de $\Psi(x)$, et qui s'annule pour au moins une des racines $x_1, \ldots, x_n$. Or, toute racine en question est une racine du polynome fondamental $\Psi(x)$; par conséquent $\Psi(x)$ contient $d(x)$ comme facteur.

Nous énonçons enfin, sans démonstration, le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit* $Q(x)$ *un polynome dans* K *tel que le genre* g *du polynome* Q(X) *soit* >1. *Il existe alors des diviseurs irréductibles* $d_1, d_2, \ldots, d_s$ *du polynome* $\Psi(x)$ *qui sont diviseurs du polynome* $Q(x)$:

$$Q \quad q.d_1^{k_1} d_2^{k_2} \ldots d_s^{k_s};$$

dans cette formule les k *désignent des nombres naturels convenables et* q *un polynome ne s'annulant pour aucune des racines du polynome* $\Psi(x)$. *Le genre* g *est la somme des multiplicités des différents diviseurs* d_i.

5. Les résultats précédents sont à la base de nombreuses considérations concernant les rangs des grandeurs d'une algèbre abstraite associative quelconque.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 203, p. 600, séance du 5 octobre 1936.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
105505-36 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.