Otakar Borůvka

Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. III

Spisy přír. fak. MU, č. 214, 1935, 23 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500042

RECHERCHES SUR LA COURBURE DES SURFACES DANS DES ESPACES A n DIMENSIONS A COURBURE CONSTANTE. III.

3. Préliminaires concernant une représentation de l'espace K_r sur l'espace euclidien réel à $2r$ dimensions.

12. Dans la suite nous désignons par S_{2r} l'espace euclidien réel à $2r$ dimensions. Nous supposons que, les coordonnées homogènes de l'hyperplan à l'infini de l'espace S_{2r} sont toutes nulles sauf la première qui est différente de zéro et que, la forme quadratique fondamentale de l'espace S_{2r} est $(x^1)^2 + \ldots + (x^{2r})^2$.

Faisons la représentation habituelle de l'espace K_r sur l'espace S_{2r} de manière que, l'image d'un point A (vecteur $\boldsymbol{a}$) quelconque de l'espace K_r, aux coordonnéses non-homogènes $A^1 = \mathcal{A}^1 + i\mathcal{A}^2, \ldots, A^r = \mathcal{A}^{2r-1} + i\mathcal{A}^{2r}$ (aux composantes $a^1 = \alpha^1 + i\alpha^2, \ldots, a^r = \alpha^{2r-1} + i\alpha^{2r}$), les $\mathcal{A}$, α étant réels, soit dans l'espace S_{2r} le point (le vecteur) dont les coordonnées non-homogènes (composantes) sont $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^{2r}$ $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{2r})$.

Nous allons indiquer quelques propriétés de la représentation en question. Pour cela nous la désignérons par $\mathfrak{R}$ et nous introduisons les deux espaces linéaires à $r-1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue de l'espace S_{2r}

$$(\mathfrak{J}) \quad \begin{matrix} x^1 + ix^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{2r-1} + ix^{2r} = 0, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x^1 - ix^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{2r-1} - ix^{2r} = 0, \end{matrix} \quad (\bar{\mathfrak{J}})$$

qui se présenterons en relation avec $\mathfrak{R}$. Nous appellerons ces deux espaces *espaces absolus* de la représentation $\mathfrak{R}$.

La représentation $\mathfrak{R}$ définit une correspondance biunivoque entre les points des deux espaces et aussi une correspondance biunivoque entre les vecteurs des deux espaces. L'image d'un système linéaire de vecteurs à un paramètre $l\boldsymbol{a}$ $(l = \lambda_1 + i\lambda_2)$ est un système linéaire de vecteurs à deux paramètres réels λ_1, λ_2 aux composantes $\lambda_1\alpha^{2k-1} - \lambda_2\alpha^{2k}$, $\lambda_1\alpha^{2k} + \lambda_2\alpha^{2k-1}$, $k = 1, \ldots, r$. On voit que, ce système à deux paramètres est le système linéaire de vecteurs ayant pour base les images, dans la représentation $\mathfrak{R}$, des deux vecteurs $\boldsymbol{a}$, $i\boldsymbol{a}$. Les images en question sont linéairement indépendantes. Il en résulte que, l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, d'un point à l'infini de l'espace K_r est une droite à l'infini de l'espace S_{2r}. On vérifie facilement qu'une telle droite, prolongée dans le domaine complexe, coupe les deux espaces absolus $\mathfrak{J}$, $\bar{\mathfrak{J}}$ de la représentation $\mathfrak{R}$ et inversement, si une droite à l'infini de l'espace S_{2r}, prolongée dans le domaine complexe, coupe les deux espaces en question, elle est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, précisément d'un point à l'infini de l'espace K_r. L'espace de points à l'infini de l'espace K_r se trouve donc représenté, par $\mathfrak{R}$, biunivoquement, à la congruence de droites de l'espace S_{2r}, lesquelles, prolongées dans le domaine complexe, coupent les deux espaces absolus de la représentation $\mathfrak{R}$ (*congruence absolue*). Il est facile de voir que, par tout point à l'infini de l'espace S_{2r} il passe précisément une droite de la congruence absolue.

13. Soient $\boldsymbol{a}_k$, $k=1,\ldots,m$, des vecteurs de l'espace K_r, linéairement indépendants. On voit facilement que, les $2\,m$ vecteurs de l'espace S_{2r}, qui correspondent, dans la représentation $\mathfrak{R}$, aux vecteurs $\boldsymbol{a}_k$ et $i\boldsymbol{a}_k$ sont linéairement indépendants. Il en résulte que, aux m points à l'infini de l'espace K_r, déterminés par les vecteurs $\boldsymbol{a}_k$, correspondent, dans la représentation $\mathfrak{R}$, m droites de la congruence absolue indépendantes c'est à dire appartenent à un espace linéaire $\mathfrak{S}_{2m-1}$ à $2\,m-1$ dimensions. Désignons par $\mathfrak{K}_{m-1}$ l'espace linéaire à $m-1$ dimensions contenant les m points à l'infini en question de l'espace K_r. A tout point à l'infini situé dans l'espace $\mathfrak{K}_{m-1}$ correspond, dans la représentation $\mathfrak{R}$, une droite de la congruence absolue, située dans l'espace $\mathfrak{S}_{2m-1}$. En effet, tout point à l'infini situé dans l'espace $\mathfrak{K}_{m-1}$ peut être déterminé par un vecteur tel que

$$\boldsymbol{b}=l^1\,\boldsymbol{a}_1+\ldots+l^m\,\boldsymbol{a}_m.$$

Posons, pour $j,\ k=1,\ldots,m$, $b^k=\beta^{2k-1}+i\beta^{2k}$, $a_j{}^k=\alpha_j{}^{2k-1}+i\alpha_j{}^{2k}$, $l^k=\lambda^{2k-1}+i\lambda^{2k}$, les α, β, λ étant réels. La formule précédente entraîne

$$\begin{aligned}\beta^{2k-1}&=\lambda^1\,\alpha_1{}^{2k-1}-\lambda^2\,\alpha_1{}^{2k}+\ldots+\lambda^{2m-1}\,\alpha_m{}^{2k-1}-\lambda^{2m}\,\alpha_m{}^{2k},\\ \beta^{2k}&=\lambda^1\,\alpha_1{}^{2k}+\lambda^2\,\alpha_1{}^{2k-1}+\ldots+\lambda^{2m-1}\,\alpha_m{}^{2k}+\lambda^{2m}\,\alpha_m{}^{2k-1}.\end{aligned}$$

On en voit que, les deux vecteurs de l'espace S_{2r} qui sont les images, dans la représentation $\mathfrak{R}$, des vecteurs $\boldsymbol{b}$, $i\boldsymbol{b}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs-images de $\boldsymbol{a}_j$ et $i\boldsymbol{a}_j$ et cela suffit pour la démonstration. On constante aussi facilement que, par tout point de l'espace $\mathfrak{S}_{2m-1}$ il passe précisément une droite de la congruence absolue située dans l'espace $\mathfrak{S}_{2m-1}$ et cette droite correspond, dans la représentation $\mathfrak{R}$ à un point à l'infini de l'espace K_r, situé dans l'espace $\mathfrak{K}_{m-1}$. Au sujet de l'espace $\mathfrak{S}_{2m-1}$ nous disons qu'il est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, de l'espace $\mathfrak{K}_{m-1}$. Remarquons que, inversement, si un espace linéaire $\mathfrak{S}_{2m-1}$ à $2\,m-1$ dimensions, situé dans l'hyperplan à l'infini de l'espace S_{2r}, jouit de la propriété que, par tout son point il passe précisément une droite de la congruence absolue située dans l'espace $\mathfrak{S}_{2m-1}$, cet espace est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, d'un espace linéaire $\mathfrak{K}_{m-1}$ à m dimensions situé dans l'hyperplan à l'infini de l'espace K_r.

Soit A un point quelconque dans l'espace K_r et considérons un espace linéaire K_m à m dimensions $(1\leq m\leq r)$ passant par A. Cet espace coupe l'hyperplan à l'infini dans un espace linéaire $\mathfrak{K}_{m-1}$ à $m-1$ dimensions. Soit S_{2m} l'espace linéaire à $2m$ dimensions contenant l'image A du point A et l'espace linéaire $\mathfrak{S}_{2m-1}$ qui est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, de l'espace $\mathfrak{K}_{m-1}$. En reprenant la notation de tout à l'heure on voit qu'à tout point B de l'espace K_m correspond, dans la représentation $\mathfrak{R}$, un point B de l'espace S_{2r} défini par les formules telles que

$$B^{2k-1} = A^{2k-1} + \lambda^1 \alpha_1^{2k-1} - \lambda^2 \alpha_1^{2k} + \dots + \lambda^{2m-1} \alpha_m^{2k-1} - \lambda^{2m} \alpha_m^{2k},$$
$$B^{2k} = A^{2k} + \lambda^1 \alpha_1^{2k} + \lambda^2 \alpha_1^{2k-1} + \dots + \lambda^{2m-1} \alpha_m^{2k} + \lambda^{2m} \alpha_m^{2k-1},$$
$$(k = 1, \dots, r).$$

Ces formules montrent que, les deux espaces K_m et S_{2m} se correspondent, en ce qui concerne les points, biunivoquement. En ce qui concerne les points à l'infini de l'espace K_m, ces points à l'infini correspondent, naturellement, d'une manière biunivoque, aux droites de la congruence absolue situées dans l'espace S_{2m}. Au sujet de l'espace S_{2m} nous disons qu'il est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, de l'espace K_m. Remarquons que, inversement, si un espace linéaire S_{2m} à $2m$ dimensions plongé dans l'espace S_{2r} et passant par un point A, jouit de la propriété que, par toute droite passant par A et contenue dans l'espace S_{2m} il passe précisément un plan situé dans l'espace S_{2m} et contenant une droite de la congruence absolue, cet espace est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, d'un espace linéaire K_m à m dimensions.

14. Terminons ces préliminaires par les remarques suivantes. La représentation $\mathfrak{R}$ est isométrique. Les deux espaces absolus de la représentation $\mathfrak{R}$ n'ont pas été définis intrinsèquement du point de vue de la géométrie euclidienne réelle. Ils représentent plutôt, de ce point de vue, deux espaces linéaires à r dimensions complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue de l'espace S_{2r} quelconques. Autrement dit, étant donné deux espaces linéaires à r dimensions complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue de l'espace S_{2r}, il existe une substitution orthogonale réelle qui fait déplacer les deux espaces aux deux espaces absolus de la représentation $\mathfrak{R}$. Remarquons aussi que, le groupe à $(r+1)^2-1$ paramètres de déplacements euclidiens dans S_{2r}, qui est associé, par la représentation $\mathfrak{R}$, au groupe total de déplacements de l'espace K_r, est le sousgroupe du groupe total de l'espace S_{2r} à $r(2r+1)$ paramètres, caractérisé par la propriété de conserver les deux espaces absolus.

4. Surfaces caractéristiques des courbes analytiques.

15. Il s'agit, dans la suite, des surfaces de l'espace S_{2r} (c'est à dire des surfaces plongées dans l'espace S_{2r} et appartenant à cet espace) qui jouissent de la propriété locale que toutes les indicatrices de courbure normale sont des circonférences centrées au point correspondant de la surface.

Considérons une (pièce d'une) surface de l'espace S_{2r} jouissant de

2

cette propriété. Soit M un point quelconque de la surface et désignons par $R_1 R_2 \ldots R_k$ (>0), $k=1,\ldots,r-1$, les rayons des différentes indicatrices de courbure normale au point M. D'après les formules[7] I; (49), (50) on peut faire correspondre au point M un repère formé de $2r$ vecteurs unitaires rectangulaires $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r}$ dont les composantes vérifient les équations différentielles de la forme suivante

$$
\begin{aligned}
dM &= \tfrac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)(e_1 + ie_2) + \tfrac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)(e_1 - ie_2);\\
d(e_{2k-1} + ie_{2k}) &= -R_{k-1}(\omega_1 + i\omega_2)(e_{2k-3} + ie_{2k-2}) -\\
&\quad - i\omega_{2k-1,\,2k}(e_{2k-1} + ie_{2k}) + R_k(\omega_1 - i\omega_2)(e_{2k+1} + ie_{2k+2}),\\
d(e_{2k-1} - ie_{2k}) &= -R_{k-1}(\omega_1 - i\omega_2)(e_{2k-3} - ie_{2k-2}) +\\
&\quad + i\omega_{2k-1,\,2k}(e_{2k-1} - ie_{2k}) + R_k(\omega_1 + i\omega_2)(e_{2k+1} - ie_{2k+2}),\\
&(k=1,\ldots,r;\ R_0 = R_r = 0),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

les ω étant des formes pfaffiennes en deux variables indépendantes. D'après les formules I; (4), (51) ces formes vérifient les relations quadratiques suivantes

$$
\begin{aligned}
&(\omega_1 + i\omega_2)' = \pm i[(\omega_1 \pm i\omega_2)\,\omega_{12}];\\
&\omega'_{2k-1,\,2k} = i(R_k^{\,2} - R_{k-1}^2)[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_1 - i\omega_2)];\\
&[(\omega_1 + i\omega_2)(\frac{dR_k}{R_k} - i\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,\,2k} - \omega_{2k+1,\,2k+2}})] = 0;\\
&[(\omega_1 - i\omega_2)(\frac{dR_k}{R_k} + i\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,\,2k} - \omega_{2k+1,\,2k+2}})] = 0,\\
&\qquad (k=1,\ldots,r;\ R_0 = R_r = 0),
\end{aligned}
\tag{41}
$$

les formules qui résultent des deux dernières relations pour $k=r$ étant à supprimer. Remarquons que, tout repère de cette sorte est tel que, le plan $(M; \boldsymbol{e}_{2k-1}, \boldsymbol{e}_{2k})$ coïncide, pour $k=1$, avec le plan tangent et pour $k>1$ avec le $k-1$-ième plan principal de la surface au point M. L'espace linéaire à $2j$ dimensions $(M; \boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{2j})$ coïncide avec l'espace osculateur d'ordre j de la surface au point M, $j=1,\ldots,r$. Pour la commodité du language nous appelons, dans la suite, le plan tangent d'une surface quelconque, en un point M de la surface, le 0-ième espace principal de la surface au point M.

En comparant les formules (41) avec (17) on voit que, pour toute surface de l'espace S_{2r} jouissant de la propriété considérée, on peut choisir les variables indépendantes x, y suivant les formules

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= (R_1^{\,r-1} R_2^{\,r-2} \ldots R_{r-1})^{-\frac{2}{r(r+1)}}\,dx;\\
\omega_2 &= (R_1^{\,r-1} R_2^{\,r-2} \ldots R_{r-1})^{-\frac{2}{r(r+1)}}\,dy;
\end{aligned}
\tag{42}
$$

---

[7]) V. la remarque [2]).

$$\omega_{12} + \omega_{34} + \dots + \omega_{2r-1,\,2r} = 0;$$

$$\omega_{12} + \omega_{2k-1,\,2k} - \omega_{2k+1,\,2k+2} = \frac{\partial \log R_k}{\partial y}\, dx - \frac{\partial \log R_k}{\partial x}\, dy. \tag{42}$$

$$(k = 1, \dots, r-1).$$

Avec ce choix des variables indépendantes les fonctions R_k satisfont au système d'équations différentielles partielles (34).

16. Nous aurons à considérer, dans la suite, des relations d'incidence entre des espaces linéaires réels et des espaces linéaires complexes. Etant donné d'une part un espace linéaire réel S, plongé dans l'espace S_{2r}, défini par exemple par une formule telle que

$$X = M + x^1 e_1 + \dots + x^m e_m,$$

les x^k étant des variables réelles indépendantes, et d'autre part un espace linéaire complexe I, nous disons que, les deux espaces S et I se coupent si, l'espace S, prolongé dans le domaine complexe par des valeurs complexes des variables x^k et l'espace I ont des points communs. Les espaces complexes que nous aurons à considérer serons du reste surtout des espaces linéaires à $r-1$ dimensions situés sur la quadrique absolue de l'espace S_{2r}.

17. Voici quelques propriétés de la surface et des repères considérés qui découlent facilement des formules écrites au n° 15.

a) *Toute courbe tracée sur la surface appartient à un espace linéaire à r dimensions au moins.*

En effet, les formules (40) entraînent pour $m = 1, \dots, r-1$, la relation suivante

$$\begin{aligned} d^{m+1} M = \dots + \tfrac{1}{2} R_1 R_2 \dots R_m \{&(\omega_1 - i\omega_2)^{m+1} (e_{2m+1} + i e_{2m+2}) + \\ &+ (\omega_1 + i\omega_2)^{m+1} (e_{2m+1} - i e_{2m+2})\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Si une conrbe M, tracée sur la surface, appartient à un espace à $m\ (< r)$ dimensions, une relation linéaire identique entre $dM, d^2M, \dots, d^{m+1}M$ a lieu et il n'y a pas de telle relation entre $dM, d^2M, \dots, d^m M$. On a donc d'après (43), $R_m = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) *Il existe deux espaces linéaires fixes à $r-1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue tels que, tout plan principal de la surface, en chaque point M de la surface, coupe l'un et l'autre d'entre eux.*

En effet, d'après les formules (40), il existe un espace linéaire fixe à $r-1$ dimensions qui contient les vecteurs $e_{2k-1} + i e_{2k}$, $k = 1, \dots, r$, quelque soit le point correspondant M de la surface. L'espace linéaire fixe à $r-1$ dimensions, complexe conjugué au précédent, contient alors les vecteurs $e_{2k-1} - i e_{2k}$, $k = 1, \dots, r$. Les vecteurs $e_{2k-1} + i e_{2k}$, $k = 1, \dots, r$, d'une part et les vecteurs $e_{2k-1} - i e_{2k}$, $k = 1, \dots, r$, d'autre part sont évidemment isotropes et orthogonaux deux à deux. Par conséquent, les deux espaces linéaires à $r-1$ dimensions en question se trouvent situés sur la quadrique absolue. Or, k signifiant un quelconque des nombres $1,\ldots,r$, les vecteurs $\boldsymbol{e}_{2k-1} \pm i\boldsymbol{e}_{2k}$ sont les deux vecteurs isotropes du $k-1$-ième plan principal de la surface au point M.

Il est facile de voir qu'il y a *précisément* deux espaces linéaires fixes à $r-1$ dimensions imaginaires conjugués et situés sur la quadrique absolue qui jouissent de la propriété en question. Nous appellerons *espaces absolus* de la surface considérée ces deux espaces linéaires privilégiés.

c) *Les espaces osculateurs d'ordre $r-1$ d'une courbe analytique quelconque, tracée sur la surface, n'ont pas des points communs avec les deux espaces absolus de la surface.*

En effet, imaginos une courbe M quelconque, tracée sur la surface. Il existe, d'après a), l'espace osculateur d'ordre $r-1$ de la courbe en tout point M de la courbe. Cet espace se trouve déterminé par les vecteurs $\boldsymbol{dM}, \boldsymbol{d^2M},\ldots,\boldsymbol{d^rM}$. Or, si l'on écrit, en se servant des formules (40), la matrice des composantes des vecteurs $\boldsymbol{dM}, \boldsymbol{d^2M},\ldots,\boldsymbol{d^rM}$; $\boldsymbol{e}_1+i\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r-1}+i\boldsymbol{e}_{2r}$, ces composantes étant prises par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{e}_1+i\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r-1}+i\boldsymbol{e}_{2r}$; $\boldsymbol{e}_1-i\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r-1}-i\boldsymbol{e}_{2r}$, on constate immédiatement que, la matrice en question est du rang $2r$ et cela démontre la proposition.

d) Envisageons un quelconque des deux espaces absolus de la surface et nommons — le I, l'autre $\bar{I}$. Pour $k=1,\ldots,r$, les vecteurs $\boldsymbol{e}_{2k-1}+i\boldsymbol{e}_{2k}$ se trouvent situés dans l'espace I ou bien dans l'espace $\bar{I}$. S'ils se trouvent situés dans l'espace I nous disons que le repère $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r}$ est *orienté*. Si les vecteurs en question sont situés dans l'espace I, les vecteurs $\boldsymbol{e}_{2k-1}-i\boldsymbol{e}_{2k}$ sont dans l'espace $\bar{I}$. Si l'on considère le nouveau repère, formé des vecteurs $\boldsymbol{e}'_{2k-1}=\boldsymbol{e}_{2k-1}, \boldsymbol{e}'_{2k}=-\boldsymbol{e}_{2k}$, ce repère vérifie encore les équations différentielles telles que (40) et il est orienté. Par conséquent, *il existe toujours des repères orientés $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r}$ vérifiant les équations différentielles telles que* (40). Evidemment, si un repère est orienté à la base du choix de l'espace I il n'est pas orienté à la base du choix de l'espace $\bar{I}$.

18. Nous allons compléter la théorème *b*) du n° précédent par le théorème suivant:

Pour qu'une surface de l'espace S_{2r} jouisse de la propriété que, en chaque point M de la surface, toutes les indicatrices de courbure normale soient des circonférences centrées au point M, il faut et il suffit que 1° tous les espaces principaux de la surface, au point M, soient des plans 2° il existe deux espaces linéaires fixes à $r-1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue tels que, tout plan principal de la surface, au point M, coupe l'un et l'autre d'entre eux.

Imaginons, en effet, une surface de l'espace S_{2r} jouissant des deux propriétés 1° et 2°. A chaque point M de la surface associons $2r$ vecteurs rectangulaires unitaires e_{2k-1}, e_{2k} $(k = 1, \ldots, r)$. Nous avons les formules telles que I; (1), (2), (3), (4) pour $c = 0, n = 2r$. Faisons, plus particulièrement, le choix des vecteurs e de manière que, pour $k = 1, \ldots, r$, les vecteurs e_{2k-1}, e_{2k} soient dans le $k - 1$-ième plan principal de la surface au point M. Ce choix entraîne des formules telles que I; (33), (34), (35) écrites avec $n = 2r, m = r - 1$. Différentions entre eux les deux espaces fixes à $r - 1$ dimensions, dont l'existence se trouve postulée par 2°, et nommons l'un d'eux I et l'autre $\bar{I}$. Pour $k = 1, \ldots, r$ les deux vecteurs $e_{2k-1} \pm ie_{2k}$ sont, évidemment, les deux vecteurs isotropes du $k - 1$-ième plan principal au point M. Par suite, d'après la propriété 2°, l'un d'entre eux se trouve contenu dans l'espace I, l'autre dans $\bar{I}$. En changeant au besoin l'orientation du vecteur e_{2k} on s'arrange que, le vecteur $e_{2k-1} + ie_{2k}$ est contenu dans l'espace I et le vecteur $e_{2k-1} - ie_{2k}$ dans l'espace $\bar{I}$. Or, l'espace I par exemple, étant fixe, on a une relation de la forme

$$d(e_{2k-1} + ie_{2k}) = \tilde{\omega}_{k1}(e_1 + ie_2) + \ldots + \tilde{\omega}_{kr}(e_{2r-1} + ie_{2r}),$$

les $\tilde{\omega}$ signifiant des formes différentielles complexes qui s'expriment au moyen des ω suivant les formules

$$\omega_{2k-1,2l-1} + i\omega_{2k,2l-1} = \tilde{\omega}_{kl};\ \omega_{2k-1,2l} + i\omega_{2k,2l} = i\tilde{\omega}_{kl},$$
$$(k, l = 1, \ldots, r).$$

En éliminant les $\tilde{\omega}$ et en écrivant les relations analogues complexes conjuguées on voit que les relations suivantes on lieu

$$\begin{aligned} &\omega_{2k-1,2l} + \omega_{2k,2l-1} = 0, \\ &\omega_{2k-1,2l-1} - \omega_{2k,2l} = 0. \qquad (k, l = 1, \ldots, r). \end{aligned} \tag{44}$$

Ces relations se réduisent, en vertu des formules I; (2), (35) aux suivantes

$$\begin{aligned} &\omega_{2k-1,2k+2} + \omega_{2k,2k+1} = 0, \\ &\omega_{2k-1,2k+1} - \omega_{2k,2k+2} = 0. \qquad (k = 1, \ldots, r-1). \end{aligned} \tag{45}$$

Cela étant, écrivons les relations I; (33) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &p_{k-\mu,2k-1,\mu}\,\omega_{2k-1,\alpha} + p_{k-\mu,2k,\mu}\,\omega_{2k,\alpha} = \\ &\quad = p_{k+1-\mu,\alpha,\mu}\,\omega_1 + p_{k-\mu,\alpha,\mu+1}\,\omega_2; \\ &(k = 1, \ldots, r-1;\ \mu = 0, \ldots, k;\ \alpha \geq 2k+1). \\ &p_{110} = 1; p_{120} = 0; p_{011} = 0; p_{021} = 1. \end{aligned} \tag{46}$$

Il en résulte pour $\alpha = 2k + 1, 2k + 2$, en vertu de (45)

$$\begin{aligned} &p_{k-\mu,2k-1,\mu}\,\omega_{2k-1,2k+1} + p_{k-\mu,2k,\mu}\,\omega_{2k,2k+1} = \\ &\quad = p_{k+1-\mu,2k+1,\mu}\,\omega_1 + p_{k-\mu,2k+1,\mu+1}\,\omega_2, \\ &p_{k-\mu,2k,\mu}\,\omega_{2k-1,2k+1} - p_{k-\mu,2k-1,\mu}\,\omega_{2k,2k+1} = \\ &\quad = p_{k+1-\mu,2k+2,\mu}\,\omega_1 + p_{k-\mu,2k+2,\mu+1}\,\omega_2, \end{aligned}$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&(p^2_{k-\mu,\,2k-1,\,\mu} + p^2_{k-\mu,\,2k,\,\mu})\,\omega_{2k-1,\,2k+1} = \\
&\quad = (p_{k-\mu,\,2k-1,\,\mu}\cdot p_{k+1-\mu,\,2k+1,\,\mu} + p_{k-\mu,\,2k,\,\mu}\cdot p_{k+1-\mu,\,2k+2,\,\mu})\,\omega_1 + \\
&\quad + (p_{k-\mu,\,2k-1,\,\mu}\cdot p_{k-\mu,\,2k+1,\,\mu+1} + p_{k-\mu,\,2k,\,\mu}\cdot p_{k-\mu,\,2k+2,\,\mu+1})\,\omega_2, \\
&(p^2_{k-\mu,\,2k-1,\,\mu} + p^2_{k-\mu,\,2k,\,\mu})\,\omega_{2k,\,2k+1} = \\
&\quad = (p_{k-\mu,\,2k,\,\mu}\cdot p_{k+1-\mu,\,2k+1,\,\mu} - p_{k-\mu,\,2k-1,\,\mu}\cdot p_{k+1-\mu,\,2k+2,\,\mu})\,\omega_1 + \\
&\quad + (p_{k-\mu,\,2k,\,\mu}\cdot p_{k-\mu,\,2k+1,\,\mu+1} - p_{k-\mu,\,2k-1,\,\mu}\cdot p_{k-\mu,\,2k+2,\,\mu+1})\,\omega_2. \\
&\qquad\qquad (k = 1, \ldots, r-1;\ \mu = 0, \ldots, k).
\end{aligned} \tag{47}
$$

Je dis que, ces formules entraînent les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
&p_{k+1-2\nu,\,2k+1,\,2\nu} = p_{k+1-\overline{2\nu+1},\,2k+2,\,2\nu+1} = (-1)^\nu p_{k+1,\,2k+1,\,0}, \\
&p_{k+1-2\nu,\,2k+2,\,2\nu} = -p_{k+1-\overline{2\nu+1},\,2k+1,\,2\nu+1} = (-1)^\nu p_{k+1,\,2k+2,\,0}, \\
&\qquad (k = 0, \ldots, r-1;\ \nu = 0, \ldots, [\tfrac{k+1}{2}]),
\end{aligned} \tag{48}
$$

les lettres p, dont le premier indice égale à -1 étant à supprimer. En effet, d'après (46), les relations en question sont exactes pour $k = 0$. Soit alors $1 \leqq j < r-1$ et supposons les relations (48) remplies pour $k = 0, \ldots, j-1$ et montrons qu'elles restent encore remplies pour $k = j$. Or, les relations (48) écrites pour $k = j-1$ sont

$$
\begin{aligned}
&p_{j-2\nu,\,2j-1,\,2\nu} = p_{j-\overline{2\nu+1},\,2j,\,2\nu+1} = (-1)^\nu p_{j,\,2j-1,\,0}, \\
&p_{j-2\nu,\,2j,\,2\nu} = -p_{j-\overline{2\nu+1},\,2j-1,\,2\nu+1} = (-1)^\nu p_{j,\,2j,\,0}, \\
&\qquad (\nu = 0, \ldots, [\tfrac{j}{2}]),
\end{aligned} \tag{49}
$$

les symboles p, dont le premier indice égale à -1 étant à supprimer. Il en résulte

$$
\begin{aligned}
p^2_{j-2\nu,\,2j-1,\,2\nu} + p^2_{j-2\nu,\,2j,\,2\nu} &= p^2_{j-\overline{2\nu+1},\,2j-1,\,2\nu+1} + p^2_{j-2\nu+1,\,2j,\,2\nu+1} \\
&= p^2_{j,\,2j-1,\,0} + p^2_{j,\,2j,\,0}
\end{aligned}
$$

et par conséquent

$$
p^2_{j-\mu,\,2j-1,\,\mu} + p^2_{j-\mu,\,2j,\,\mu} = p^2_{j,\,2j-1,\,0} + p^2_{j,\,2j,\,0}. \qquad (\mu = 0, \ldots, j).
$$

Cela étant, les formules (47) donnent ($\mu = 0, \ldots, j$)

$$
\begin{aligned}
&p_{j-\mu,\,2j-1,\,\mu}\cdot p_{j+1-\mu,\,2j+1,\,\mu} + p_{j-\mu,\,2j,\,\mu}\cdot p_{j+1-\mu,\,2j+2,\,\mu} = \\
&\quad = p_{j,\,2j-1,\,0}\cdot p_{j+1,\,2j+1,\,0} + p_{j,\,2j,\,0}\cdot p_{j+1,\,2j+2,\,0}, \\
&p_{j-\mu,\,2j,\,\mu}\cdot p_{j+1-\mu,\,2j+1,\,\mu} - p_{j-\mu,\,2j-1,\,\mu}\cdot p_{j+1-\mu,\,2j+2,\,\mu} = \\
&\quad = p_{j,\,2j,\,0}\cdot p_{j+1,\,2j+1,\,0} - p_{j,\,2j-1,\,0}\cdot p_{j+1,\,2j+1,\,0}, \\
&p_{j-\mu,\,2j-1,\,\mu}\cdot p_{j-\mu,\,2j+1,\,\mu+1} + p_{j-\mu,\,2j,\,\mu}\cdot p_{j-\mu,\,2j+2,\,\mu+1} = \\
&\quad = p_{j,\,2j-1,\,0}\cdot p_{j,\,2j+1,\,1} + p_{j,\,2j,\,0}\cdot p_{j,\,2j+2,\,1}, \\
&p_{j-\mu,\,2j,\,\mu}\cdot p_{j-\mu,\,2j+1,\,\mu+1} - p_{j-\mu,\,2j-1,\,\mu}\cdot p_{j-\mu,\,2j+2,\,\mu+1} = \\
&\quad = p_{j,\,2j,\,0}\cdot p_{j,\,2j+1,\,1} - p_{j,\,2j-1,\,0}\cdot p_{j,\,2j+2,\,1},
\end{aligned}
$$

et ces équations peuvent être condensées dans les suivantes ($\mu = 0, \ldots, j$)

$$\begin{aligned}
&(p_{j-\mu, 2j-1, \mu} + i p_{j-\mu, 2j, \mu})(p_{j+1-\mu, 2j+1, \mu} - i p_{j+1-\mu, 2j+2, \mu}) = \\
&\quad = (p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1, 2j+1, 0} - i p_{j+1, 2j+2, 0}), \\
&(p_{j-\mu, 2j-1, \mu} + i p_{j-\mu, 2j, \mu})(p_{j-\mu, 2j+1, \mu+1} - i p_{j-\mu, 2j+2, \mu+1}) = \\
&\quad = (p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j, 2j+1, 1} - i p_{j, 2j+2, 1}).
\end{aligned}$$

Ecrivons ces formules séparement pour $\mu = 2\nu$ et $\mu = 2\nu + 1$ et appliquons les formules (49). Nous trouvons

$$\begin{aligned}
&(p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1-2\nu, 2j+1, 2\nu} - i p_{j+1-2\nu, 2j+2, 2\nu}) = \\
&\quad = (-1)^\nu (p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1, 2j+1, 0} - i p_{j+1, 2j+2, 0}), \\
&(p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1-\overline{2\nu+1}, 2j+1, 2\nu+1} - i p_{j+1-\overline{2\nu+1}, 2j+2, 2\nu+1}) = \\
&\quad = (-1)^\nu (p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j, 2j+1, 1} - i p_{j, 2j+2, 1}), \qquad (50) \\
&i(p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1-\overline{2\nu+1}, 2j+1, 2\nu+1} - i p_{j+1-\overline{2\nu+1}, 2j+2, 2\nu+1}) = \\
&\quad = (-1)^\nu (p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1, 2j+1, 0} - i p_{j+1, 2j+2, 0}), \\
&i(p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j+1-\overline{2\nu+2}, 2j+1, 2\nu+2} - i p_{j+1-2\nu+2, 2j+2, 2\nu+2}) = \\
&\quad = (-1)^\nu (p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0})(p_{j, 2j+1, 1} - i p_{j, 2j+2, 1}) \\
&\qquad\qquad (\nu = 0, \ldots, [\tfrac{j}{2}]),
\end{aligned}$$

les lettres p dont le premier indice égale à -1 étant à supprimer Les deux membres de chacune de ces équations contiennet le facteur $p_{j, 2j-1, 0} + i p_{j, 2j, 0}$. Ce facteur est différent de zéro. Cela résulte, en effet, pour $j = 1$ immédiatement des formules (46). Pour $j > 1$ la proposition contraire entraîne, d'après (49),

$$p_{j-\mu, 2j-1, \mu} = p_{j-\mu, 2j, \mu} = 0 \qquad (\mu = 0, \ldots, j)$$

de sorte que, d'après les formules I; (34) l'indicatrice de courbure normale d'ordre $j-1$ de la surface au point M n'existe pas; cela est absurde, car $j - 1 \leqq r - 2$ et on a, au point M, d'après l'hypothèse, $r - 1$ plans principaux de la surface et alors les indicatrices de courbure normale d'ordres $\leq r - 1$ existent. Cela étant établi, les formules (50) donnent

$$\begin{aligned}
&p_{j+1-2\nu, 2j+1, 2\nu} = p_{j+1-2\nu+1, 2j+2, 2\nu+1} = (-1)^\nu p_{j+1, 2j+1, 0}, \\
&p_{j+1-\overline{2\nu+1}, 2j+2, 2\nu+1} = - p_{j+1-\overline{2\nu+2}, 2j+1, 2\nu+2} = (-1)^\nu p_{j, 2j+2, 1}, \\
&p_{j+1-2\nu, 2j+2, 2\nu} = - p_{j+1-\overline{2\nu+1}, 2j+1, 2\nu+1} = (-1)^\nu p_{j+1, 2j+2, 0}, \\
&p_{j+1-2\nu+1, 2j+1, 2\nu+1} = p_{j+1-2\nu+2, 2j+2, 2\nu+2} = (-1)^\nu p_{j, 2j+1, 1}, \\
&\qquad\qquad (\nu = 0, \ldots, [\tfrac{j}{2}]),
\end{aligned}$$

les lettres, p dont le premier indice égale à -1 étant à supprimer. Or, on voit sans peine que, ces dernières relations ne sont pas autres que les relations (48) écrites pour $k = j$. Les formules (48) se trouvent, par conséquent, établies.

En vertu des formules (48) on peut écrire les équations paramètriques de l'indicatrice de courbure normale d'ordre k $(=1,\dots,r-1)$, en chaque point M de la surface, d'après I; (34), sous la forme suivante

$$X_{2k+1} = p_{k+1,\,2k+1,\,0} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{k+1}{2\nu} \cos^{k+1-2\nu}\Theta \,.\, \sin^{2\nu}\Theta - $$
$$- p_{k+1\,\,2k+2,\,0} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{k+1}{2\nu+1} \cos^{k+1-\overline{2\nu+1}}\Theta \,.\, \sin^{2\nu+1}\Theta,$$

$$X_{2k+2} = p_{k+1,\,2k+2,\,0} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{k+1}{2\nu} \cos^{k+1-2\nu}\Theta \,.\, \sin^{2\nu}\Theta + $$
$$+ p_{k+1,\,2k+1,\,0} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{k+1}{2\nu+1} \cos^{k+1-\overline{2\nu+1}}\Theta \,.\, \sin^{2\nu+1}\Theta,$$

et ces équations ne sont pas autres que les suivantes

$$X_{2k+1} = p_{k+1,\,2k+1,\,0} \cos (k+1)\,\Theta - p_{k+1,\,2k+2,\,0} \sin (k+1)\,\Theta,$$
$$X_{2k+2} = p_{k+1,\,2k+2,\,0} \cos (k+1)\,\Theta + p_{k+1,\,2k+1,\,0} \sin (k+1)\,\Theta.$$

Il en résulte

$$X^2_{2k+1} + X^2_{2k+2} = p^2_{k+1,\,2k+1,\,0} + p^2_{k+1,\,2k+2,\,0}. \qquad (k-1,\dots,r-1).$$

Par conséquent, toutes les indicatrices de courbure normale, en chaque point M de la surface, sont des circonférences centrées au point M.

19. Toute surface plongée dans l'espace S_{2r} telle qu'avec un système de référence convenable, elle est l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$ (n° 12), d'une courbe analytique plongée dans l'espace K_r, sera appelée, dans la suite, *surface caractéristique* de la courbe analytique correspondante.

Cette définition des surfaces caractéristiques entraîne, évidemment, celle de surfaces de Riemann qui a été donnée par K. Kommerell dans un Mémorie classique[8]) pour les courbes analytiques *planes*. Les notions et raisonnements précédents nous mettent en possibilité d'étendre plusieurs résultats au sujet des surfaces de Riemann en question, dus à l'illustre géomètre ainsi qu'à d'autres auteurs ultérieurs, au cas d'un espace à nombre quelconque $r\,(\geq 2)$ de dimensions et de les compléter dans différentes directions. Evidemment, les équations de toute surface caractéristique d'une courbe analytique peuvent être mises sous la forme suivante

$$x^{2k-1} = U^k(x,y), \quad x^{2k} = V^k(x,y) \qquad (k=1,\dots,r)$$

les U^k, V^k étant des fonctions harmoniques associées, c'est à dire satisfaisant aux équations différentielles de Cauchy-Riemann

---

[8]) K. Kommerell, *Math. Ann.*, T. 60, 1905, p. 548.

$$\frac{\partial U^k}{\partial x} = \frac{\partial V^k}{\partial y}; \quad \frac{\partial U^k}{\partial y} = -\frac{\partial V^k}{\partial x}. \tag{51}$$

20. Parmi les surfaces caractéristiques les *plans* caractéristiques sont les plus élémentaires. Ils n'ont pas cependant aucun intérêt car, d'après la définition adoptée, tout plan dans l'espace S_{2r} est caractéristique. Il en est de même pour des figures plus compliquées consistant de plans, qui ne sont pas différentiées entre elles par la condition que les plans de la figure soient caractéristiques. Ainsi, par exemple, toute figure consistant de r plans mutuellement orthogonaux et passant par le même point de l'espace peut être déplacée de façon que, tout plan de la figure, dans la nouvelle position, satisfait aux équations telles que (51). En effet, considérons par exemple r plans orthogonaux passant par l'origine. Prenons dans chaque plan Π_k $(k \quad 1, \ldots, r)$ deux vecteurs unitaires et perpendiculaires $\boldsymbol{e}_{2k-1}$, $\boldsymbol{e}_{2k}$ fixes. Tout point X du plan Π_k est de la forme $X \quad x\boldsymbol{e}_{2k-1} + y\boldsymbol{e}_{2k}$. La transformation orthogonale

$$X'^1 \quad e_1 \,|\, X, \quad X'^2 \quad e_2 \,|\, X, \ldots, X'^{2r-1} = e_{2r-1} \,|\, X, \quad X'^{2r} = e_{2r} \,|\, X,$$

le symbole | signifiant le produit scalaire, fait déplacer le plan Π_k dans le suivant

$$X'^1 = X'^2 = \ldots = X'^{2k-2} = 0; \quad X'^{2k-1} = x, \quad X'^{2k} = y,$$
$$X'^{2k+1} - \ldots = X'^{2r} = 0,$$

et ces équations sont de la forme requise. La chose change d'aspect s'il s'agit de figures consistant de plus que r plans soit par exemple de variétés continues de plans. Pour qu'une variété de plans puisse être déplacée de façon que, tout plan de la variété, dans la nouvelle position, satisfasse aux équations telles que (51), il faut que tous les plans de la variété coupent deux espaces linéaires fixes à $r - 1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue. Car tout plan de la variété, dans la nouvelle position coupe les deux espaces absolus $\mathfrak{J}$, $\bar{\mathfrak{J}}$ de la représentation $\mathfrak{R}$ (nº 12). Inversement, si une variété de plans jouit de la propriété en question, elle peut être déplacée de façon que, tout plan de la variété, dans la nouvelle position, satisfait aux équations telles que (51). Il suffit, en effet, de déplacer la variété de manière à faire confondre les deux espaces linéaires fixes à $r - 1$ dimensions avec les deux espaces absolus $\mathfrak{J}$, $\bar{\mathfrak{J}}$ de la représentation $\mathfrak{R}$.

Appelons une variété de plans *caractéristique* si elle peut être déplacée de façon que, tout plan de la variété, dans la nouvelle position, satisfait aux équation telles que (51). Le théorème du nº 18 peut s'énoncer alors de la manière suivante:

Pour qu'une surface de l'espace S_{2r} jouisse de la propriété que, en chaque point M de la surface, toutes les indicatrices de courbure normale soient des circonférences centrées au point M, il faut et il suffit *que, les différentes variétés d'espaces principaux de la surface soient des variétés caractéristiques de plans.*

21. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Pour qu'une surface de l'espace S_{2r} soit une surface caractéristique d'une courbe analytique de l'espace K_r il faut et il suffit que, en chaque point M de la surface, toutes les indicatrices de courbure normale soient des circonférences centrées au point M.

Dans la représentation $\mathfrak{R}$ l'image de la $j-1$-ième normale $(1 \leq j \leq r)$ de toute courbe analytique de l'espace K_r, dans son point P quelconque, est le $j-1$-ième plan principal de la surface caractéristique correspondante au point M, M étant l'image du point P; l'image de l'espace osculateur d'ordre j de la courbe au point P est l'espace osculateur d'ordre j de la surface au point M. La j-ième $(1 < j \leq r-1)$ courbure scalaire de la courbe au point P étant R_j, le rayon de l'indicatrice de courbure normale d'ordre j de la surface au point M est $R_1 R_2, \ldots, R_j$.

Pour démontrer, considérons dans l'espace K_r une courbe analytique P quelconque, appartenant à cet espace et désignons encore par R_k $(k = 1, \ldots, r-1)$ ses courbures scalaires. Il existe r vecteurs rectangulaires unitaires $\boldsymbol{n}_k$ tels que, pour chaque point P de la courbe on a les formules (15). Posons, pour les coordonnées non-homogènes du point P et pour les composantes des vecteurs $\boldsymbol{n}_k$

$$P = U + iV, \quad n_k = u_k - iv_k, \qquad (k = 0, \ldots, r-1),$$

les U, V, u_k, v_k étant réels. Les coordonnées non-homogènes d'un point mobile M sur la surface caractéristique correspondante sont alors $U^1, V^1, \ldots, U^r, V^r$. L'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, de la k-ième normale de la courbe au point P, $k = 0, \ldots, r-1$, est le plan contenant les deux vecteurs linéairement indépendants $u_k^1, -v_k^1, \ldots, u_k^r, -v_k^r$ et $v_k^1, u_k^1, \ldots, v_k^r, u_k^r$; l'image de l'espace osculateur d'ordre $(1 \leq) j (< r)$ de la courbe, au point P, est l'espace linéaire à $2j$ dimensions contenant les $2j$ vecteurs linéairement indépendants, qui en résultent pour $k = 0, \ldots, j-1$.

D'après (15), les fonctions U, V, u_k, v_k satisfont au système suivant

$$\begin{aligned}
&dU = \omega^1 u_0 + \omega^2 v_0, \\
&du_k = -R_k \omega^1 u_{k-1} + R_k \omega^2 v_{k-1} + \tilde{\omega}^k v_k + R_{k+1} \omega^1 u_{k+1} + R_{k+1} \omega^2 v_{k+1}, \\
&dV = \omega^2 u_0 - \omega^1 v_0, \\
&dv_k = -R_k \omega^2 u_{k-1} - R_k \omega^1 v_{k-1} - \tilde{\omega}^k v_k - R_{k+1} \omega^2 u_{k+1} + R_{k+1} \omega^1 v_{k+1}, \\
&\qquad\qquad (k = 0, \ldots, r-1;\ R_0 = R_r = 0),
\end{aligned} \tag{52}$$

les formes pfaffiennes ω, $\tilde{\omega}$ vérifiant les relations (16), (17) et les lettres u, v dont l'indice égale à -1 ou r étant à supprimer.

Considérons d'autre part le système suivant

$$
\begin{aligned}
&dM = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \\
&de_{2k+1} = -R_k \omega^1 e_{2k-1} + R_k \omega^2 e_{2k} + \tilde{\omega}^k e_{2k+2} + R_{k+1} \omega^1 e_{2k+3} + \\
&\quad + R_{k+1} \omega^2 e_{2k+4}, \\
&de_{2k+2} = -R_k \omega^2 e_{2k-1} - R_k \omega^1 e_{2k} - \tilde{\omega}^k e_{2k+1} - R_{k+1} \omega^2 e_{2k+3} + \\
&\quad + R_{k+1} \omega^1 e_{2k+4},
\end{aligned}
\tag{53}
$$

les ω, $\tilde{\omega}$, R étant les mêmes que dans les formules précédentes et les lettres e dont l'indice surpasse $2r$ étant à supprimer. Ce système définit, d'après (40), une surface de l'espace S_{2r}, dont toutes les indicatrices de courbure normale sont des circonférences de rayons $R_1 R_2, \ldots, R_k$ ($k = 1, \ldots, r-1$), centrées au point correspondant M, et pour tout point M de la surface un repère $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2r}$. Ce repère est de sorte que, le plan $(M; \boldsymbol{e}_{2k+1}, \boldsymbol{e}_{2k+2})$, $k = 0, \ldots, r-1$, est le k-ième plan principal; l'espace linéaire $(M; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j})$, $j = 1, \ldots, r$, est l'espace osculateur d'ordre j de la surface au point M.

Or, d'après les formules écrites dans les deux premières et la dernière ligne de (52) on voit d'abord r intégrales indépendantes du systéme (53):

$$M^l = U^l, \ \ e_{2k+1}{}^l = u^l, \ \ e_{2k+2}{}^l = v_k{}^l. \qquad (l = 1, \ldots, r).$$

De plus, d'après les formules écrites dans les deux dernières et la seconde ligne (52) on voit d'autres intégrales indépendantes:

$$M^l = V^l, \ e_{2k+1}{}^l = -v_k{}^l, \ e_{2k+2}{}^l = u_k{}^l \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

et les $2r$ intégrales en question sont indépendantes, car les vecteurs $\boldsymbol{n}$ les sont. Nous trouvons ainsi un système fondamental d'intégrales du système (53) qui est formé des fonctions

$$
\begin{array}{ll}
(M) & U^1, \ V^1, \ldots, U^r, \ V^r; \\
(e_{2k+1}) & u_k{}^1, \ -v_k{}^1, \ldots, u_k{}^r, \ -v_k{}^r; \\
(e_{2k+2}) & v_k{}^1, \ u_k{}^1, \ldots, v_k{}^r, \ u_k{}^r.
\end{array}
\tag{54}
$$

Or, d'une part, comme nous l'avons déjà remarqué, les fonctions (M) sont les coordonnées non-homogènes d'un point mobile M sur la surface caractéristique, l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, de la courbe analytique considérée P; le plan $(M; \boldsymbol{e}_{2k+1}, \boldsymbol{e}_{2k+2})$, $k = 0, \ldots, r-1$, est l'image de la k-ième normale de la courbe au point P; l'espace linéaire à $2j$ dimensions $(M; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j})$, $1 \leqq j < r$, est l'image de l'espace osculateur d'ordre j de la courbe au point P. D'autre part, la surface, lieu du point M, jouit de la propriété que, en chaque son point M toutes les indicatrices de courbure normale sont des circonférences de rayons $R_1 R_2 \ldots R_k$, $k = 1, \ldots, r-1$, centrées au point M; le plan $(M; \boldsymbol{e}_{2k+1}, \boldsymbol{e}_{2k+2})$, $k = 0, \ldots, r-1$, est le k-ième plan principal de la surface au point M; l'espace linéaire $(M; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j})$, $1 \leq j < r$, est l'espace osculateur d'ordre j de la surface au point M.

Il ne reste qu'à démontrer que, toute surface de l'espace S_{2r}, qui jouit en ce qui concerne les indicatrices de courbure normale des propriétés énoncées dans le théorème, est une surface caractéristique d'une courbe analytique de l'espace K_r. — Considérons donc, dans S_{2r}, une surface appartenant à cet espace et jouissant des propriétés en question. Pour chaque point M de la surface il existe $2r$ vecteurs rectangulaires unitaires e tels, qu'on à les formules telles que (53), les formes ω, $\tilde{\omega}$ vérifiant les relations (16), (17). Formons avec les ω, $\tilde{\omega}$ et les fonctions R ainsi définies les équations (52) aux fonctions inconnues U, V, u, v. Le système de ces équations est complètement intégrable et, comme il est équivalent à un système de la forme (15), il possède un système fondamental d'intégrales U^l, V^l, u_k^l, v_k^l $(k = 0, \ldots, r-1; l = 1, \ldots, r)$ tel que, chaque fonction $U^l + iV^l$ est une fonction analytique $f^l(z)$ d'une variable complexe z et la courbe analytique $f^l(z)$ appartient à l'espace K_r. Le système de fonctions (54) formé avec les intégrales U^l, V^l, u_k^l, v_k^l en question est alors un système fondamental d'intégrales du système (15). On peut donc choisir dans l'espace S_{2r} un système fixe de référence de manière que la surface considérée soit l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, de la courbe analytique $f^l(z)$.

22. D'après le théorème du n° 18, M étant un point quelconque d'une surface caractéristique de l'espace S_{2r}, il passe, par M, r plans principaux correspondant de la surface qui coupent deux espaces linéaires fixes I, $\bar{I}$ à $r-1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue. Les r points d'intersection de ces plans avec un quelconque de ces deux espaces, soit I, sont évidemment indépendants et par conséquent ces points et le point M déterminent un espace linéaire complexe à r dimensions passant par I. Les deux espaces linéaires à r dimensions ainsi définis sont manifestement complexes conjugués et leur point d'intersection est précisément le point M. Il en résulte que, toute surface caractéristique de l'espace S_{2r} est le lieu des points d'intersection des espaces complexes conjugués à r dimensions appartenant à deux variétés complexes conjuguées d'espaces linéaires à r dimensions passant respectivement par les deux espaces I, $\bar{I}$ et dépendant analytiquement de deux variables réelles.

Nous allons préciser cette observation par le théorème suivant:

Pour qu'une surface de l'espace S_{2r} soit caractéristique il faut et il suffit qu'elle puisse être déplacée de manière que, dans la nouvelle position, la surface soit le lieu des points d'intersection des couples d'espaces linéaires à r dimensions, complexes conjugués et tels que les espaces de chaque couple appartiennent à deux variétés complexes conjugués d'espaces linéaires à r dimensions passant respectivement par les deux espaces absolus de la représentation $\mathfrak{R}$ et dépendant analytiquement d'une variable complexe z resp. $\bar{z}$.

Soit, en effet, $x; x^1, \ldots, x^{2r}$ un système de coordonnées homogènes dans l'espace S_{2r} tel que, les points resp. les points à l'infini de l'espace soient caractérisés par la valeur $x=1$ resp. $x=0$. Tout espace linéaire à r dimensions passant par l'espace absolu $\mathfrak{J}: x - x^1 + ix^2 = \ldots\ldots x^{2r-1} + ix^{2r} = 0$, par exemple, peut être ecrit sous la forme

$$\frac{x}{1} - \frac{x^1 + ix^2}{a_1} - \ldots\ldots = \frac{x^{2r-1} + ix^{2r}}{a_r},$$

les a étant des constantes convenables. Par suite, deux variétés quelconques complexes conjuguées d'espaces linéaires à r dimensions passant respectivement par les deux espaces absolus $\mathfrak{J}$, $\bar{\mathfrak{J}}$ de la représentation $\mathfrak{R}$ et dépendant analytiquement d'une variable complexe z resp. $\bar{z}$ peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\frac{x}{1} \quad \frac{x^1 + ix^2}{f^1(z)} = \ldots\ldots \quad \frac{x^{2r-1} + ix^{2r}}{f^r(z)},$$
$$\frac{x}{1} - \frac{x^1 - ix^2}{\bar{f}^1(z)} = \ldots\ldots = \frac{x^{2r-1} - ix^{2r}}{\bar{f}^r(\bar{z})},$$

les f et $\bar{f}$ étant des fonctions analytiques de la variables complexe z resp. $\bar{z}$. Deux espaces linéaires à r dimensions complexes conjugués appartenent à ces variétés sont déterminés par des valeurs particulières complexes conjuguées z et z et ils se coupent dans le point

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}\{f^1(z) + f^1(\bar{z})\},\; x^2 = \frac{1}{2i}\{f^1(z) - f^1(z)\}, \ldots\ldots, \\ x^{2r-1} &= \frac{1}{2}\{f^r(z) + f^r(\bar{z})\},\; x^{2r} = \frac{1}{2i}\{f^r(z) - f^r(\bar{z})\}. \end{aligned} \tag{55}$$

Il en résulte la proposition.

23. Les formules (55), si l'on y considère z et $\bar{z}$ comme variables indépendantes, prolongent la surface caractéristique correspondante dans le domaine complexe. La surface est douée alors de deux familles de courbes complexes privilégiées lesquelles on obtient en donnant à la variable z ou bien z des valeurs constantes. On voit immédiatement que les deux familles de courbes sont précisément les courbes minima de la surface. Considérons par exemple cette famille dont les courbes sont déterminées par différentes valeurs constantes de la variable z. On voit que, par tout point M de la surface il passe précisément une courbe de la famille considérée et cette courbe se trouve contenue dans un espace linéaire à r dimensions passant par l'espace absolu $\mathfrak{J}$. Comme la surface est supposée d'appartenir à l'espace S_{2r} la courbe en question appartient à l'espace en question. Les formules (55) mettent en évidence que, les deux familles de courbes forment un réseau conjugué de courbes et la suite de transformées laplaciennes de ce réseau dans un sens et dans l'autre se termine après la première transformation.

Nous trouvons ainsi le théorème suivant:

Toute surface caractéristique de l'espace S_{2r} peut être déplacée de manière que, dans la nouvelle position, les courbes minima de la surface prolongée dans le domaine complexe, sont des courbes analytiques situées et appartenantes à des espaces linéaires à r dimensions passant par les deux espaces absolus de la représentation $\mathfrak{R}$ et les courbes en question forment un réseau conjugué dont la suite de transformées laplaciennes dans un sens et l'autre se termine après la première transformation.

Ce théorème entraîne que, *toute surface caractéristique de l'espace S_{2r} est une surface minima*[9]).

24. Les considérations qui vont suivre sont conçues de manière à aboutir à une généralisation d'un théorème de M. Levi-Civita d'après lequel il passe, par une pièce d'une courbe analytique réelle quelconque, dans l'espace euclidien à quatre dimensions, précisément une surface, l'image, dans la représentation $\mathfrak{R}$, d'une courbe analytique plane. Les nos 25, 26 sont préliminaires dans cette direction mais, les résultats y contenus offrent, peut-être, aussi en eux mêmes de l'intérêt.

25. Considérons, dans l'espace S_{2r}, un point M quelconque et r vecteurs unitaires rectangulaires $\boldsymbol{n}_0, \ldots, \boldsymbol{n}_{r-1}$. Choisissons sur la quadrique absolue de l'espace S_{2r} deux espaces linéaires I, I à $r-1$ dimensions, complexes conjugués de manière qu'ils n'ont pas de points communs avec les droites isotropes de l'espace linéaire $(M; \boldsymbol{n}_0, \ldots, \boldsymbol{n}_{r-1})$.

Remarquons, au premier lieu, qu'il existe des espaces linéaires $I, \bar{I}$ jouissant des propriétés en question. En effet, si l'on choisit, ce qui est évidemment possible, r d'autres vecteurs unitaires $\boldsymbol{m}_k$ $(k=0, \ldots, r-1)$ rectangulaires entre eux et par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{n}_k$, les r points complexes à l'infini de l'espace S_{2r}, aux coordonnées homogènes $m_k^l + i n_k^l$ d'une part et celles $m_k^l - i n_k^l$ d'autre part $(l=1, \ldots, 2r)$ déterminent deux espaces linéaires I, I à $r-1$ dimensions jouissant des propriétés voulues.

Nous ferons usage du théorème suivant:

Il existe, dans l'espace S_{2r}, précisément un système de r plans $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$, passant par M, qui jouit des propriétés suivantes:

1° *les plans $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ sont orthogonaux deux à deux;*

2° *pour $k=1, \ldots, r$ le plan Π_k coupe les deux espaces I, I;*

3° *pour k $1, \ldots, r$, le vecteur $\boldsymbol{n}_{k-1}$ se trouve situé dans l'espace linéaire $(M; \Pi_1, \ldots, \Pi_k)$.*

Nous omettons la démonstration de ce théorème car elle s'effectue, sans aucune espèce de difficultés, par des considérations élémentaires.

Pour $k=1, \ldots, r$ choissons dans le plan Π_k deux vecteurs unitaires rectangulaires $\boldsymbol{e}_{2k-1}, \boldsymbol{e}_{2k}$ issus du point M. Envisageons un quelconque des deux espaces linéaires à $r-1$ dimensions et nommons — le I, l'autre

---

[9]) V. [3]) p. 66.

alors $\bar{I}$. Pour $k=1,\ldots,r$, les deux vecteurs $\boldsymbol{e}_{2k-1}\pm i\boldsymbol{e}_{2k}$ étant isotropes ils déterminent les deux points d'intersection à l'infini du plan Π_k avec les deux espaces $I, \bar{I}$. En changeant, au besoin, l'orientation du vecteur $\boldsymbol{e}_{2k}$ on s'arrange que, le point à l'infini déterminé par le vecteur $\boldsymbol{e}_{2k-1}+i\boldsymbol{e}_{k2}$ se trouve situé dans l'espace I et l'autre dans $\bar{I}$. Cela étant, les vecteurs $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r}$ constituent un repère qui sera appellé dans la suite, *repère naturel orienté*. Un tel repère dépend, évidemment, des données, $\boldsymbol{n}_0,\ldots,\boldsymbol{n}_{r-1}$ et du choix de l'espace I. Si l'on a choisi un repère naturel orienté tout autre repère naturel orienté s'en déduit, manifestement, par des transformations orthogonales telles que

$$\begin{aligned} e'_{2k-1} &= \cos\varphi_{k-1}\, e_{2k-1} + \sin\varphi_{k-1}\, e_{2k}, \\ e'_{2k} &= -\sin\varphi_{k-1}\, e_{2k-1} + \cos\varphi_{k-1}\, e_{2k}. \end{aligned} \tag{56}$$

26. Considérons dans l'espace S_{2r} une courbe analytique réelle appartenant à un espace linéaire à r dimensions au moins. Nous supposons que, tout point de la courbe est régulier c'est à dire que, pour tout point M de la courbe les vecteurs $M', M'', \ldots, M^{2r)}$ sont linéairement indépendants. Soit M_0 un point de la courbe et désignons par $\boldsymbol{n}_0,\ldots,\boldsymbol{n}_{r-1}$ les vecteurs unitaires rectangulaires étant la tangente et les premières normales successives, en nombre de $r-1$, de la courbe au point M_0. Choisissons sur la quadrique absolue de l'espace S_{2r} deux espaces linéaires fixes à $r-1$ dimensions I, I complexes conjugués de manière qu'ils n'ont pas des points communs avec les droites isotropes de l'espace osculateur d'ordre r de la courbe au point M_0. Cette condition d'inégalité se trouve alors remplie pour tout point M de la courbe suffisament voisin au point M_0. Nous ne considérons, dans la suite, qu'un tel voisinage.

Cela étant, associons à tout point M de la courbe un repère naturel orienté $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{2r}$ de manière à le faire dépendre de la tangente $\boldsymbol{n}_0$ et des premières normales successives $\boldsymbol{n}_1,\ldots,\boldsymbol{n}_{r-1}$ de la courbe au point M et des deux espaces fixes I, I. On a alors les formules telles que

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \ldots + \omega_{2r} e_{2r}, \\ de_k &— \omega_{k1} e_1 + \omega_{k2} e_2 + \ldots + \omega_{k\,2r} e_{2r}, \qquad (k=1,\ldots,2r) \end{aligned} \tag{57}$$

les ω étant des formes différentielles à une variable qui est le paramètre sur la courbe. Or, les vecteurs $\boldsymbol{e}$ étant unitaires et rectangulaires deux à deux, on a les relations suivantes entre les ω

$$\omega_{kl} + \omega_{lk} = 0. \qquad (k, l = 1,\ldots,2r) \tag{58}$$

L'hypothèse que, pour $k=1,\ldots,r$, le vecteur $\boldsymbol{e}_{2k-1}+i\boldsymbol{e}_{2r}$ se trouve situé dans l'espace I et le vecteur $\boldsymbol{e}_{2k-1}-i\boldsymbol{e}_{2k}$ dans $\bar{I}$, les deux espaces I, I étant fixes, entraîne les relations suivantes entre les ω

$$\omega_{2k\ \ 1,2l-1} \quad \omega_{2k,2l};\ \omega_{2k-1,2l} = -\,\omega_{2k,2l-1}, \qquad (k, l = 1,\ldots,r), \tag{59}$$

c'est ce qu'on démontre par un raisonnement analogue au celui qui a conduit aux formules (44). Enfin, l'hypothèse que, pour $k = 1, \ldots, r$, le vecteur $\boldsymbol{n}_{k-1}$ se trouve situé dans l'espace linéaire $(M;\ \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2k})$ s'exprime par les relations suivantes entre les ω

$$\begin{matrix} \omega_{2k-1,\,2k+3} = \ldots = \omega_{2k-1,\,2r} = 0, \\ \omega_{2k,\,2k+3} = \ldots = \omega_{2k,\,2r} \quad 0, \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, \ r-2; \\ \omega_{-1\,l} = 0; \ \omega_{0l} = \omega_l \end{pmatrix}. \tag{60}$$

En effet, le vecteur $\boldsymbol{dM}$ étant proportionel au vecteur $\boldsymbol{n}_0$, on voit que les formules (60) sont vraies pour $k = 0$. Soit alors $(0 <)\ j - 1 < r - 2$ et supposons qu'on a déjà démontré que, les relations (60) sont vraies pour $k = 0, \ldots, j-1$. Le vecteur $\boldsymbol{n}_{j-1}$ étant situé dans l'espace linéaire $(M;\ \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j})$ on a pour les composantes respectives, une relation de la forme

$$n_{j-1} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{2j-1} e_{2j-1} + \alpha_{2j} e_{2j}.$$

D'après l'hypothèse les deux espaces I, I n'ont pas des points communs avec les droites isotropes de l'espace linéaire $(M;\ \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_{r-1})$ c'est ce qui entraîne que, le vecteur $\boldsymbol{n}_{j-1}$ n'est pas situé dans l'espace linéaire $(M;\ \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j\ \ 2})$. Par conséquent, une au moins, des deux quantités $\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}$ est différente de zéro. En différentiant la formule précédente on trouve, en vertu des formules de Frenet et la supposition que, les relations (60) sont vraies pour $k \quad 0, \ldots, j-1$, une relation de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} n_j \quad \ldots + \alpha_{2j-1} \left\{\omega_{2j-1,\,2j+1} e_{2j+1} + \ldots + \omega_{2j-1,\,2r} e_{2r}\right\} + \\ + \alpha_{2j} \left\{\omega_{2j,\,2j+1} e_{2j+1} + \ldots + \omega_{2j,\,2r} e_{2r}\right\}, \end{aligned}$$

$\tilde{\omega}$ étant une forme différentielle non nulle à un paramètre et l'expression non écrite étant une combinaison linéaire de $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j}$. Comme le vecteur $\boldsymbol{n}_j$ se trouve contenu dans l'espace linéaire $(M;\ \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2j+2})$ on a

$$\begin{aligned} &\alpha_{2j-1}\, \omega_{2j-1,\,2l+3} + \alpha_{2j}\, \omega_{2j,\,2l+3} = 0, \\ &\alpha_{2j-1}\, \omega_{2j-1,\,2l+4} + \alpha_{2j}\, \omega_{2j,\,2l+4} = 0, \qquad (l = j, \ldots, r-2) \end{aligned}$$

et ces relations peuvent s'écrire, en vertu des formules (59)

$$\begin{aligned} \alpha_{2j-1}\, \omega_{2j-1,\,2l+3} + \alpha_{2j}\, \omega_{2j,\,2l+3} = 0, \\ -\alpha_{2j-1}\, \omega_{2j,\,2l+3} + \alpha_{2j}\, \omega_{2j-1,\,2l+3} - 0. \end{aligned}$$

Il en résulte les relations (60) pour $k = j$ car, une, au moins, des deux quantités $\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}$ est différente de zéro.

Cela étant établi on voit que les formules (57) sont les suivantes

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2; \qquad\qquad\qquad (k = 1, \ldots, r) \\ de_{2k-1} &= -\omega_{2k-3,\,2k-1} e_{2k-3} + \omega_{2k-3,\,2k} e_{2k-2} + \omega_{2k-1,\,2k} e_{2k} + \\ &\quad + \omega_{2k-1,\,2k+1} e_{2k+1} + \omega_{2k-1,\,2k+2} e_{2k+2}; \\ de_{2k} &= -\omega_{2k-3,\,2k} e_{2k-3} - \omega_{2k-3,\,2k-1} e_{2k-2} - \omega_{2k-1,\,2k} e_{2k-1} - \\ &\quad - \omega_{2k-1,\,2k+2} e_{2k+1} + \omega_{2k-1,\,2k+1} e_{2k+2} \end{aligned}$$

et elles peuvent s'écrire, évidemment, sous la forme suivante

$$
\begin{aligned}
&dM = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)(e_1 + ie_2) + \tfrac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)(e_1 - ie_2);\\
&d(e_{2k-1} + ie_{2k}) =\\
&= -(\omega_{2k-3,\,2k-1} + i\omega_{2k-3,\,2k})(e_{2k-3} + ie_{2k-2}) - i\omega_{2k-1,\,2k}(e_{2k-1} + ie_{2k}) +\\
&\quad + (\omega_{2k-1,\,2k+1} - i\omega_{2k-1,\,2k+2})(e_{2k+1} + ie_{2k+2});\\
&d(e_{2k-1} - ie_{2k}) =\\
&= -(\omega_{2k-3,\,2k-1} - i\omega_{2k-3,\,2k})(e_{2k-3} - ie_{2k-2}) + i\omega_{2k-1,\,2k}(e_{2k-1} - ie_{2k}) +\\
&\quad + (\omega_{2k-1,\,2k+1} + i\omega_{2k-1,\,2k+2})(e_{2k+1} - ie_{2k+2}). \qquad (k = 1, \ldots, r)
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Dans ces formules les lettres ω dont le premier indice est inférieur à 1 et de même celles dont le second indice surpasse r sont à supprimer. Comme les formes ω qui figurent dans ces formules sont des formes différentielles à une variable, il existe des quantités complexes conjuguées $\varrho_k, \bar{\varrho}_k$ $(k = 1, \ldots, r-1)$ déterminées, telles que les relations

$$
\begin{aligned}
\omega_{2k-1,\,2k+1} + i\omega_{2k-1,\,2k+2} &= \varrho_k(\omega_1 + i\omega_2),\\
\omega_{2k-1,\,2k+1} - i\omega_{2k-1,\,2k+2} &= \bar{\varrho}_k(\omega_1 - i\omega_2),
\end{aligned}
$$

ont lieu. Or, d'après ce qui a été dit au n° 25, le repère naturel considéré $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2r}$ n'est déterminé qu'à des transformations orthogonales de la forme (56) près. On peut donc remplacer les vecteurs $\boldsymbol{e}_{2k-1} \pm i\boldsymbol{e}_{2k}$ $(k = 1, \ldots, r)$ qui figurent dans les formules précédentes par d'autres vecteurs de la forme $e^{\mp i\varphi_{k-1}}(\boldsymbol{e}_{2k-1} + i\boldsymbol{e}_{2k})$, les signes supérieurs et inférieurs étant à prendre en même temps et l'on obtient encore des repères naturels orientés associés au point M. Posons $\varrho_k = P_k e^{i\Phi_k}$, $\bar{\varrho}_k = P_k e^{-i\Phi_k}$, $P_k \geq 0$. Après un remplacement de la forme considérée du repère on aura encore des formules telles que (61), les coefficients, dans ces nouvelles formules étant

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)e^{i\varphi_0}, \qquad \tfrac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)e^{\;\; i\varphi_0};\\
&- P_{k-1}e^{-i(\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2} - \varphi_0 - \Phi_{k-1})}(\omega_1 + i\omega_2)e^{\;\; i\varphi_0},\\
&- i(\omega_{2k-1,\,2k} + d\varphi_{k-1}),\\
&P_k e^{i(\varphi_k - \varphi_{k-1} - \varphi_0 - \Phi_k)}(\omega_1 - i\omega_2)e^{i\varphi_0};\\
&- P_{k-1}e^{i(\varphi_{k-1} \quad \varphi_{k-2} \quad \varphi_0 \quad \Phi_{k-1})}(\omega_1 - i\omega_2)e^{i\varphi_0},\\
&i(\omega_{2k-1,\,2k} + d\varphi_{k-1}),\\
&P_k e^{-i(\varphi_k - \varphi_{k-1} \quad \varphi_0 - \Phi_k)}(\omega_1 + i\omega_2)e^{-i\varphi_0}.
\end{aligned}
$$

Pour disposer convenablement des quantités φ posons

$$
\omega_{12} + \omega_{34} + \ldots + \omega_{2r-1,\,2r} - d\Phi_0,
$$

Φ_0 étant une fonction réelle d'une variable et elle n'est déterminée, évidemment, qu'à une constante additive près. On peut fixer, si l'on veut, cette constante par la condition que, la fonction Φ_0 s'annulle pour une valeur particulière x_0 du paramètre. Choisissons alors les quantités φ suivant les formules

$$\begin{aligned} &\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_{r-1} + \Phi_0 = 0, \\ &\varphi_0 + \varphi_{k-1} - \varphi_k \qquad\quad + \Phi_k = 0, \qquad (k = 1, \dots, r-1). \end{aligned}$$

Ce choix est évidemment possible d'une seule manière. Cela étant, la matrice de coefficients se réduit a la forme suivante

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2) & & \frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2) \\ -P_{k-1}(\omega_1 + i\omega_2) & -i\tilde{\omega}_{k-1} & P_k(\omega_1 + i\omega_2) \\ -P_{k-1}(\omega_1 - i\omega_2) & i\tilde{\omega}_{k-1} & P_k(\omega_1 + i\omega_2) \end{matrix}$$

les P étant des quantités non négatives et les formes $\tilde{\omega}$ étant liées par la relation

$$\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_{r-1} = 0.$$

Or, on voit immédiatement que, si une des quantités P_k $(k = 1, \dots, r-1)$ est identiquement nulle, la courbe considérée appartient à un espace linéaire à moins de r dimensions. On a, par conséquent, le résultat suivant:

Pour toute courbe analytique réelle M appartenant à un espace linéaire à r dimensions au moins, il existe, dès qu'on a choisit la variable indépendante x sur la courbe, précisément un système de fonctions analytiques réelles de x,

$$P_1 > 0, \dots, P_{r-1} > 0; \quad p_0, \dots, p_{r-1},$$

telles que la somme des fonctions p est nulle et qu'il y a des repères naturels orientés vérifiant les équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} &M' = a e_1 + b e_2, \\ &e'_{2k-1} = -P_{k-1}\, a e_{2k-3} + P_{k-1}\, b e_{2k-2} + p_{k-1}\, e_{2k} + P_k\, a e_{2k+1} + P_k\, b e_{2k+2} \\ &e'_{2k} = -P_{k-1}\, b e_{2k-3} - P_{k-1}\, a e_{2k-2} - p_{k-1}\, e_{2k-1} - P_k\, b e_{2k+1} + P_k\, a e_{2k+2}, \end{aligned} \tag{62}$$

a, b, étant des fonctions convenables de la variable indépendante x.

Remarque. Un changement de la variable indépendante sur la courbe laisse, évidemment, les fonctions P invariantes et il fait multiplier les fonctions a, b, p par le même facteur.

27. Etant donné, dans l'espace S_{2r}, une pièce d'une courbe analytique réelle appartenant à un espace linéaire à r dimensions au moins, et deux espaces linéaires fixes à $r-1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue tels que, les droites isotropes de l'espace osculateur d'ordre r de la courbe, dans un point quelconque de la courbe, n'ont pas des points communs avec eux, nous disons, pour la commodité du language que, les deux espaces linéaires en question sont en *position générale* par rapport à la courbe.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Etant donné, dans l'espace S_{2r}, une pièce d'une courbe analytique réelle appartenant à un espace linéaire à r dimensions au moins et deux espaces linéaires fixes à $r-1$ dimensions, complexes conjugués et situés sur la quadrique absolue, en position générale par rapport à la courbe, il existe précisément une surface caractéristique de l'espace S_{2r} qui passe par la courbe et dont tous les plans principaux coupent les deux espaces linéaires fixes en question.

Désignons, en effet, par C la courbe et par I, I les deux espaces linéaires. D'après le théorème du n° précédent il existe précisément un système de fonctions analytiques réelles, associées à la courbe

$$P_1 > 0, \ldots, P_{r-1} > 0; \quad p_0, \ldots, p_{r-1}$$

telles que la somme des fonctions p est nulle et qu'il y a des repères naturels orientés vérifiant les équations différentielles de la forme (62). Désignons par I celui des deux espaces I, $\bar{I}$ à la base duquel en considère l'orientation. Supposons qu'il existe des surfaces caractéristiques jouissant des propriétés voulues. Soit M une telle surface. D'après le raisonnement fait au n° 15, on peut faire correspondre, à tout point M de la surface un repère $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2r}$ vérifiant les équations différentielles de la forme (40). Tout repère de cette sorte est tel que, pour $k = 1, \ldots, r$, le plan $(M; \boldsymbol{e}_{2k-1}, \boldsymbol{e}_{2k})$ est le $k-1$-ième plan principal de la surface au point M et par suite, d'après l'hypothèse, il coupe les deux espaces linéaires I, $\bar{I}$. D'après le raisonnement fait au n° 17 d) on peut supposer que le repère en question est orienté à la base du choix de l'espace I. Pour avoir recours à des théorèmes classiques supposons choisi les variables indépendantes x, y sur la surface suivant les formules (42) de sorte que, les fonctions R_k satisfont au système d'équations partielles du second ordre (34). La surface M passant par la courbe C, les fonctions $M(x, y)$ se réduisent aux fonctions définissant la courbe, si l'on prend pour x, y des fonctions analytiques convenables du paramètre sur la courbe. Sans diminuer la généralité on peut supposer qu'en changeant, au besoin, ce paramètre on s'arrange que, les fonctions $M(x, y)$ se réduisent aux fonctions $C(x)$ définissant la courbe, si l'on substitue pour y une fonction analytique convenable $Y(x)$ de la variable indépendante x. Par la même substitution $y = Y(x)$ les composantes des vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2r}$ deviennent des fonctions de la seule variable x et ces vecteurs forment, évidemment, un repère naturel orienté, associé à la courbe, vérifiant les équations différentielles de la forme (62). On a donc, d'après le théorème du n° 26

$$[\log R_k] = \log P_k; \quad \left[\frac{\partial \log R_k}{\partial y} - Y' \frac{\partial \log R_k}{\partial x}\right] = p_0 + p_{k-1} - p_k, \qquad (63)$$
$$(k = 1, \ldots, r-1)$$

le symbole [ ] signifiant la fonction respective après la substitution $y = Y(x)$. Si $Y(x) = \text{Const.}$, on peut supposer $Y(x) = 0$ et on voit que les fonctions $\log R_k$ satisfont aux système d'équations partielles du second ordre (34) et elles se réduisent, pour $y = 0$, aux fonctions données $\log P_k$ et leurs dérivées partielles $\dfrac{\partial \log R_k}{\partial y}$ se réduisent aux fonctions $p_0 + p_{k-1} - p_k$. On se trouve donc, dans ce cas, dans les hypothèses d'un théorème classique[10]), d'après lequel il existe précisément un système de fonctions $\log R_k$ satisfaisant aux équations partielles (34) et vérifiant les conditions initiales (63) . Si $Y'(x) \neq 0$ on peut se placer encore dans les hypothèses du théorème en question. En effet, prennons pour nouvelles variables indépendantes les fonctions ξ, η définies par les formules

$$\xi = y + \int \frac{dx}{Y'(x)}; \quad \eta = y - Y(x). \tag{64}$$

Soit $x = X(\xi, \eta)$ la fonction x qui est définie par ces formules. Par la transformation de variables (64) les fonctions $\log R_k$ deviennent des fonctions des deux variables indépendantes ξ, η satisfaisant au système d'équations partielles du second ordre

$$(1 + Y'^2)\left(\frac{1}{Y'^2} \cdot \frac{\partial^2 \log R_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \log R_k}{\partial \eta^2}\right) - \frac{Y''}{Y'^2} \cdot \frac{\partial \log R_k}{\partial \xi} - Y'' \frac{\partial \log R_k}{\partial \eta} =$$

$$= 2\left(R_1^{r-1} R_2^{r-2} \ldots R_{r-1}\right)^{-\frac{4}{r(r+1)}} \left[- R_1^2 + R_{k-1}^2 - 2 R_k^2 + R_{k+1}^2\right],$$
$$(k = 1, \ldots, r-1;\ R_0 = R_r = 0).$$

Ces fonctions se réduisent pour $\eta = 0$ aux fonctions

$$\log R_k \{X(\xi, 0),\ Y[X(\xi, 0)]\} = \log P_k [X(\xi, 0)].$$

Or, on a, en vertu de la transformation (64),

$$\frac{\partial \log R_k}{\partial y} - Y' \frac{\partial \log R_k}{\partial x} = (1 + Y'^2) \frac{\partial \log R_k}{\partial \eta}$$

et par suite la fonction $\dfrac{\partial \log R_k}{\partial \eta}$ se réduit, pour $\eta = 0$, à la fonction

$$\frac{\partial \log R_k \{X(\xi, 0),\ Y[X(\xi, 0)]\}}{\partial \eta} =$$
$$= \frac{1}{1 + Y'^2[X(\xi, 0)]} \{p_0 [X(\xi, 0)] + p_{k-1} [X(\xi, 0)] - p_k [X(\xi, 0)]\},$$
$$(k = 1, \ldots, r-1).$$

---

[10]) V. p. ex. E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (2 ième éd. Paris, 1921, p. 19 ..

On se trouve donc dans les hypothèses du théorème cité. Par conséquent, dans ce cas $Y'(x) \neq 0$, il existe encore précisément un système de fonctions $\log R_k$ satisfaisant au système d'équations partielles (34) et vérifiant les conditions initiales (63). Il en résulte qu'il existe une surface caractéristique *au plus* satisfaisant aux conditions du théorème.

Pour voir qu'il y a une *au moins*, considérons la courbe $C(x)$ donnée. Considérons un repère naturel orienté $e_1, \ldots, e_{2r}$, associé à la courbe, vérifiant les équations différentielles de la forme (62), C étant écrit au lieu de M. Nous pouvons choisir le repère de façon que, pour $k = 1, \ldots, r$, le plan $(C; e_{2k-1}, e_{2k})$ coupe les deux espaces linéaires fixes I, $\bar{I}$. Soient P; a, b, p les fonctions correspondantes de la variable indépendante x. Evidemment, une au moins de fonctions a, b est différente de zéro. Supposons, par exemple, $a(x) \neq 0$. Posons

$$Y(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx. \tag{65}$$

Si l'on change la variable indépendante sur la courbe, les fonctions P restent invariantes et les fonctions a, b, p se multiplient par le même facteur. On peut donc supposer, qu'on a choisit la variable indépendante x sur la courbe de façon a avoir

$$[P_1^{r-1} P_2^{r-2} \ldots P_{r-1}]^{\frac{2}{r(r+1)}} = a. \tag{66}$$

Cela étant, d'après le raisonnement ci-dessus, il existe précisément un système de fonctions $\log R_k$ satisfaisant au système d'équations partielles (34) et vérifiant les conditions initiales telles que (63), le symbole [ ] se rattachant à la fonction $Y(x)$ définie par (65). Formons avec ces fonctions $\log R_k$ les formes $\omega_1, \omega_2, \omega_{2k-1,2k}$ suivant les formules (42) et ensuite le système d'équations partielles (40). Ce système est complètement intégrable et il se réduit, en vertu de (66), (65) et (63), pour $y = Y(x)$, au système correspondant (62). Il existe, par conséquent, un système fondamental d'intégrales du système en question, formé par l'intégrale banale 1; 0, ..., 0 et d'autres intégrales $M^l(x, y)$, $e_1^l(x, y)$; ..., $e_{2r}^l(x, y)$, $l = 1, \ldots, 2r$ telles que, ces intégrales se réduisent, pour $y = Y(x)$, aux fonctions $C^l(x)$ qui définissent la courbe et les fonctions $e_1^l, \ldots, e_{2r}^l$, qui définissent la repère naturel associé à la courbe. La surface $M(x, y)$ correspondante est caractéristique et elle remplie les conditions du théorème.
