Otakar Borůvka

Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions

C. R. Acad. Sci. Paris t. 193, 1931, 633-634

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500028

GÉOMÉTRIE. — *Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions.* Note [1] de M. O. Borůvka.

Dans l'espace euclidien à quatre dimensions j'appelle *hypercirconférences* (hces) les courbes dont les trois courbures scalaires sont constantes, non nulles. Ces courbes jouissent de propriétés géométriques intégrales simples qui rappellent les propriétés banales des circonférences.

Soit Γ une hce quelconque. On a en particulier les résultats suivants [2] :

1. En un point P quelconque de Γ, appelons *plan normal* (*tangent*) le plan déterminé par la première et la troisième normale (par la tangente et la seconde normale) de Γ au point P. Tous les plans normaux de Γ passent par un point fixe (le *centre* de l'hce), duquel tous les points de la courbe sont à la même distance. Étant donnés, sur Γ, deux points P, P′ en position générale, les plans normaux (tangents) de la courbe en P et P′ se coupent dans un seul point. Le plan normal de Γ, pris au milieu de l'arc $\widehat{PP'}$, contient le centre de la sécante $\overline{PP'}$ ainsi que le point d'intersection des deux plans tangents en P et P′. Les deux angles que fait une sécante arbitraire de Γ avec les plans tangents à ses extrémités sont égaux. Γ admet un groupe de ∞^1 déplacements en elle-même, consistant en rotations autour de deux plans orthogonaux fixes qui passent par le centre de l'hce (*plans axiaux* de l'hce). Les plans normaux aux différents points de Γ sont tous perpendiculaires aux plans axiaux.

2. En un point P quelconque de Γ, appelons directions axiales du plan normal les directions des deux droites d'intersection du plan normal au point P avec les plans axiaux de Γ. Appelons *surface associée* ($\mathcal{G}$) à Γ la surface réglée qui se trouve engendrée par les droites passant par les différents points de Γ de manière que la direction de la droite passant par un point P de Γ soit la direction axiale du plan normal de Γ en P, toujours parallèle à un des plans axiaux fixé une fois pour toutes. Il y a donc deux

---

[1] Séance du 12 octobre 1931.

[2] On trouvera les démonstrations ainsi que d'autres résultats à ce sujet dans un autre Recueil.

surfaces associées à Γ. Au sujet des surfaces en question, signalons les résultats suivants. Le groupe de déplacements de Γ en elle-même conserve la surface. Les trajectoires de ce groupe sur $(\mathcal{G})$ sont formées par une famille simple de hces et par une circonférence privilégiée.

Dans la correspondance ponctuelle, engendrée entre les différentes trajectoires sur $(\mathcal{G})$ par les génératrices de la surface, deux points correspondants quelconques de deux trajectoires fixes ont la même distance. $(\mathcal{G})$ est une surface parabolique spéciale telle que l'indicatrice de courbure normale, en chaque point P de $(\mathcal{G})$, a un de ses sommets en P et le rapport des longueurs de ses axes est le même en chaque point de la surface. Le produit de tels rapports pour deux surfaces associées à la même hce est toujours égal à 4.

3. On peut déterminer toutes les surfaces, dans l'espace considéré, qui jouissent de la propriété que, en chaque point P de la surface, l'indicatrice de courbure normale a un de ses sommets en P et le rapport k des longueurs de ses axes est le même pour toute la surface. Les surfaces associées aux hces, jouissant de cette propriété, sont caractérisées parmi les autres par l'inégalité $k \neq 2$. Il y a, en outre, deux familles différentes de surfaces en question pour lesquelles $k = 2$. Les unes sont réglées et peuvent être considérées comme un cas limite des surfaces précédentes. Quant aux autres, elles admettent la génération géométrique suivante. On prend dans l'espace un point fixe O et une courbe, non hce, appartenant à l'espace considéré et jouissant, en chaque point, des trois propriétés suivantes : 1° la première normale de la courbe fait avec le rayon vecteur $\mathbf{n}$, issu du point O, un angle constant, non nul; 2° la deuxième normale de la courbe est normale au rayon vecteur $\mathbf{n}$; 3° la première et la troisième courbure scalaire de la courbe sont égales. En un point P quelconque de la courbe, on considère la première normale et le plan passant par cette normale et le point fixe O; dans ce plan on construit la spirale logarithmique qui a son pôle au point O, passe par P et y est tangente à la normale considérée. La surface est le lieu des spirales logarithmiques ainsi associées aux différents points de la courbe en question.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 193, p. 633, séance du 19 octobre 1931.)

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
92822-31 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.