Otakar Borůvka

Sur les surfaces dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux

Bulletin Sci. Math. 53, 1929, 307-320, 324-328

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500018

Bulletin des Sciences mathématiques 1929.

SUR LES SURFACES DONT LE RÉSEAU CONJUGUÉ DE DÉFORMATION PROJECTIVE EST FORMÉ PAR LES LIGNES DE SEGRE-DARBOUX;

PAR M. OTAKAR BORŮVKA.

Soit ($\mathcal{R}$) une surface *non réglée* projectivement déformable; soit ($\mathcal{R}'$) une déformée de ($\mathcal{R}$). D'après la définition même de la déformation projective, on peut établir, entre les surfaces ($\mathcal{R}$) et ($\mathcal{R}'$) une correspondance ponctuelle biunivoque telle, qu'il existe, pour chaque couple de points correspondants, un déplacement projectif de la surface ($\mathcal{R}'$) par exemple, qui réalise, aux points correspondants, un contact analytique d'ordre deux des deux surfaces. Un tel déplacement étant effectué, les surfaces ($\mathcal{R}$) et ($\mathcal{R}'$) ont, au point commun, dans chaque direction, un contact géométrique d'ordre deux. Pour que le contact, dans une direction privilégiée soit d'ordre supérieur à deux, il faut et il suffit que la direction en question soit celle d'une courbe de réseau conjugué de déformation projective (¹). Chaque surface ($\mathcal{R}$) admet un ou ∞^1 ou bien ∞^2 de réseaux conjugués de déformation projective. Il se peut que, sur une surface ($\mathcal{R}$) le réseau conjugué de déformation projective se confonde avec des lignes remarquables de la surface soit avec l'une famille d'asymptotiques. C'est précisément le cas qui a été étudié, pour la première fois, par M. E. Cartan dans son Mémoire fondamental sur la déformation projective des surfaces (²).

Je me suis occupé, sur l'initiative de M. E. Čech, d'étude des surfaces ($\mathcal{R}$) telles que le réseau conjugué de déformation projective soit formé par une famille de lignes de Segre-Darboux; je me

---

(¹) Cette définition du réseau conjugué de déformation projective est probablement nouvelle; ce sont M. E. Čech et M. E. Cartan qui l'ont trouvé.

(²) E. CARTAN, *Sur la déformation projective des surfaces* (*Annales de l'École Norm. sup.*, 3ᵉ série, 37, 1920, p 259-356).

permets d'établir, dans cet article, les résultats principaux auxquels je suis arrivé à ce sujet.

1. Soit (S) une surface quelconque plongée dans l'espace projectif à trois dimensions. Faisons correspondre, à chaque point A de cette surface un repère formé par quatre points linéairement indépendants A, A_1, A_2, A_3. Chaque point de l'espace peut être déterminé par ses coordonnées rapportées à ce système. On a, en particulier, les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} dA = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\ dA_i = \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les ω étant des formes différentielles linéaires, satisfaisant aux relations de structure de l'espace projectif

$$(2)\qquad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_{00}\omega_i] + [\omega_1\omega_{1i}] + [\omega_2\omega_{2i}] + [\omega_3\omega_{3i}], \\ \omega'_{ij} = \sum_{k=0}^{3}[\omega_{ik}\omega_{kj}]. \end{cases}$$

La surface (S) étant une surface ($\mathcal{R}$), on peut choisir le repère mobile et l'on peut déterminer les fonctions u, v, w non toutes nulles de manière à avoir les équations suivantes (1).

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega_3 = 0, \\ \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_{31} = \omega_{20}, \qquad \omega_{32} = \omega_{10}, \\ \omega_{11} - \omega_{00} = 2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_{22} - \omega_{00} = \alpha\omega_1 + 2\beta\omega_2, \\ \omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha\omega_1 + 3\beta\omega_2, \\ \omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \\ \omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2, \\ \omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2, \\ du = 2u(\omega_{11} - \omega_{00}) + w\omega_1, \\ dv = 2v(\omega_{22} - \omega_{00}) + w\omega_2, \\ dw = w(\omega_{33} - \omega_{00}) + 2v(1 - 2\nu)\omega_1 + 2u(1 - 2\mu)\omega_2, \end{cases}$$

les α, β, μ, ν, λ, ρ étant les invariants fondamentaux de la sur-

(1) E. Cartan, *loc. cit.*, p. 291.

face $(\mathcal{R})$ par rapport au groupe projectif. Ces équations entraînent

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\omega_1\left(d\alpha+\overline{1-\alpha\beta-\frac{4}{3}\mu-\frac{2}{3}\nu\omega_2}\right)\right]=0,\\
&\left[\omega_2\left(d\beta+\overline{1-\alpha\beta-\frac{2}{3}\mu-\frac{4}{3}\nu\omega_1}\right)\right]=0,\\
&[\omega_1\,d\nu]+[\omega_2\,d\rho]+(2\rho\alpha-3\nu\beta)[\omega_1\omega_2]=0,\\
&[\omega_1\,d\rho]+[\omega_2\,d\lambda]+4(\lambda\alpha-\rho\beta)[\omega_1\omega_2]=0,\\
&[\omega_1\,d\lambda]+[\omega_2\,d\mu]+(3\mu\alpha-2\lambda\beta)[\omega_1\omega_2]=0,\\
&v[\omega_1\,dv]+u[\omega_2\,d\mu]-\frac{3}{2}w(\mu-\nu)[\omega_1\omega_2]=0.
\end{aligned}\right.$$

Inversement, les formules (3) avec les conditions d'intégrabilité (4) définissent les surfaces $(\mathcal{R})$ les plus générales.

Avec ce choix du repère mobile, les lignes de Segre sont données par l'équation $\omega_1^3-\omega_2^3=0$ et l'équation du réseau conjugué de déformation projective est $u\omega_1^2-v\omega_2^2=0$.

2. Exprimons la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de courbes du réseau conjugué de déformation projective soit formée par une famille de lignes de Segre; ensuite, l'autre famille de courbes du réseau sera formée par une famille de lignes de Darboux. On peut considérer, sans restreindre la généralité, la famille de lignes de Segre qui est donnée par l'équation

$$\omega_1-\omega_2=0.$$

On voit immédiatement que la condition en question est

$$(5)\qquad u=v$$

de sorte, qu'on a, d'après (3)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &w+2u\alpha=0,\\ &w+2u\beta=0.\end{aligned}\right.$$

Donc, s'il existe des surfaces considérées, on a nécessairement $u\neq 0$ et les équations (6) peuvent être remplacées par

$$(7)\qquad \beta=\alpha,\qquad w=-2u\alpha.$$

La première de ces relations et les premières (4) donnent

$$(8)\qquad d\alpha=\left(\alpha^2-1+\frac{2}{3}\mu+\frac{4}{3}\nu\right)\omega_1+\left(\alpha^2-1+\frac{4}{3}\mu+\frac{2\nu}{3}\right)\omega_2$$

et la deuxième des relations (7) entraîne

$$(9)\qquad \mu=$$

On voit en particulier que, chaque surface ($\mathcal{R}$) qui jouit de la propriété considérée ne peut admettre qu'un seul ou bien ∞^2 de réseaux conjugués de déformation projective et l'on arrive au système suivant :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\omega_3 = 0,\\
&\omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1,\\
&\omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2,\\
&\omega_{31} = \omega_{20}, \qquad \omega_{32} = \omega_{10},\\
&\omega_{11} - \omega_{00} = \alpha(2\omega_1 + \omega_2),\\
&\omega_{22} - \omega_{00} = \alpha(\omega_1 + 2\omega_2),\\
&\omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha(\omega_1 + \omega_2),\\
&\omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\\
&\omega_{20} = \mu\omega_1 + \rho\omega_2,\\
&\omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2,\\
&\frac{du}{u} = 2\alpha(\omega_1 + \omega_2),\\
&d\alpha = (\alpha^2 + 2\mu\alpha - 1)(\omega_1 + \omega_2).
\end{aligned}
\right.
$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système sont

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\omega_1 d\mu] + [\omega_2 d\rho] + \alpha(2\rho - 3\mu)[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 d\rho] + [\omega_2 d\lambda] + 4\alpha(\lambda - \rho)[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 d\lambda] + [\omega_2 d\mu] + \alpha(3\mu - 2\lambda)[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[d\mu(\omega_1 + \omega_2)] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

et elles montrent que le système (10) n'est pas en involution.

Or, on peut poser

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&d\mu = \mu'(\omega_1 + \omega_2),\\
&d\lambda = (\sigma + 2\alpha\overline{\lambda - \rho})\omega_1 + (\mu' + \alpha\overline{2\lambda - 3\mu})\omega_2,\\
&d\rho = (\mu' + \alpha\overline{2\rho - 3\mu})\omega_1 + (\sigma + 2\alpha\overline{\rho - \lambda})\omega_2,
\end{aligned}
\right.
$$

et ces équations conduisent aux relations quadratiques extérieures

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[d\mu'(\omega_1 + \omega_2)] = 0,\\
&[d\sigma\,\omega_1] + [d\mu'\omega_2]\\
&\quad + \overline{2\alpha^2(3\mu - 2\lambda) + \alpha(5\sigma - 6\mu') + (2\mu - 1)(2\rho - 3\mu)}[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[d\mu'\omega_1] + [d\sigma\,\omega_2]\\
&\quad - \overline{2\alpha^2(3\mu - 2\rho) + \alpha(5\sigma - 6\mu') + (2\mu - 1)(2\lambda - 3\mu)}[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais on voit que le système prolongé (10), (12) est non plus en involution.

Or, les fonctions μ, σ qui se sont introduites satisfont aux équations de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} d\mu' = \mu''(\omega_1 + \omega_2), \\ d\sigma \ = \ \overline{\mu'' + 2\alpha^2(3\mu - 2\rho) + \alpha(5\sigma - 6\mu') + (2\mu - 1)(2\lambda - 3\mu)}\,\omega_1 \\ \qquad + \overline{\mu'' + 2\alpha^2(3\mu - 2\lambda) + \alpha(5\sigma - 6\mu') + (2\mu - 1)(2\rho - 3\mu)}\,\omega_2. \end{cases}$$

La première de ces équations entraîne

$$(15)\qquad [d\mu''(\omega_1 + \omega_2)] = 0$$

et l'on déduit de la deuxième par différentiation extérieure, pour que le système [(10), (12), (14)] soit intégrable il faut que l'on ait

$$(16)\qquad \mu'(\rho - \lambda) = 0.$$

On est donc conduit à distinguer deux cas : 1° $\mu' \neq 0$, $\rho = \lambda$; 2° $\mu' = 0$.

3. *Premier cas : $\mu' \neq 0$, $\rho = \lambda$. — Ce cas est caractérisé géométriquement par ce fait que, les surfaces correspondantes ($\mathcal{R}$), s'il en existe, admettent un seul réseau conjugué de déformation projective.*

Dans ce cas, les équations (12) donnent

$$(17)\qquad \sigma = \mu' + \alpha(2\lambda - 3\mu)$$

et cette relation, comparée avec (10), (12), (14) ne conduit plus aux relations nouvelles. Les surfaces intéressées sont donc définies par le système suivant :

$$(18)\quad \left|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\omega_3 = 0,} \\ \omega_{13} = \omega_2, & \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, & \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_{31} = \omega_{20}, & \omega_{32} = \omega_{10}, \\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{11} - \omega_{00} = \alpha(2\omega_1 + \omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{22} - \omega_{00} = \alpha(\omega_1 + 2\omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha(\omega_1 + \omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,} \\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{20} = \mu\omega_1 + \lambda\omega_2,} \\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{30} = \lambda(\omega_1 + \omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{\dfrac{du}{u} = 2\alpha(\omega_1 + \omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{d\alpha = (\alpha^2 + 2\mu - 1)(\omega_1 + \omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{d\mu = \mu'(\omega_1 + \omega_2),} \\ \multicolumn{2}{l}{d\lambda = (\mu' + \alpha\overline{2\lambda - 3\mu})(\omega_1 + \omega_2).} \end{array}\right.$$

Ce système n'entraîne qu'une seule condition d'intégrabilite

$$[d\mu'(\omega_1 + \omega_2)] = 0. \tag{19}$$

On voit que le système (18) est en involution et sa solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. On voit de plus que le système considéré a une famille de caractéristiques et une seule : ce sont les lignes de Darboux qui appartiennent au réseau conjugué de déformation projective.

4. Inversement, supposons qu'il existe une surface ($\mathcal{R}$) telle que l'on ait :

$$1^o\ \alpha = \beta, \qquad 2^o\ \mu = \nu, \qquad 3^o\ \mu \textit{ n'est pas constant.} \tag{20}$$

Une telle surface est définie par un système d'équations différentielles de la forme (3) avec les relations quadratiques extérieures (4). Or, les premières deux relations (4) donnent, d'après 1°, 2°,

$$d\alpha - (\alpha^2 + 2\mu - 1)(\omega_1 - \omega_2), \tag{21}$$

et cette équation conduit à l'équation quadratique

$$[d\mu(\omega_1 + \omega_2)] = 0. \tag{22}$$

D'autre part, la dernière des relations (4) a la forme

$$[d\mu(\nu\omega_1 + u\omega_2)] = 0. \tag{23}$$

Comme μ n'est pas constant, d'après 3°, on tire des relations (22) et (23)

$$u = \nu. \tag{24}$$

Par suite, il existe des surfaces pour lesquelles les relations (20) ont lieu et ce sont précisément les surfaces considérées au n° 3.

5. Il est facile d'expliquer géométriquement les relations (20) En effet, pour que l'équation $\alpha\omega_1 - \beta\omega_2 = 0$ soit équivalente à l'équation $\omega_1 - \omega_2 = 0$ il faut et suffit que l'on ait $\alpha = \beta$. Or, sur chaque surface ($\mathcal{R}$) l'équation $\alpha\omega_1 - \beta\omega_2 = 0$ est celle des courbes

canoniques de la surface ($\mathcal{R}$) ; par suite, la relation 1° caractérise les surfaces ($\mathcal{R}$) dont les courbes canoniques se confondent avec une famille de lignes de Segre. Quant à la relation 2°, on sait qu'elle caractérise les surfaces F (asymptotico-isothermes). Enfin, la relation 3° exprime que la surface ($\mathcal{R}$) correspondante n'admet qu'un seul réseau conjugué de déformation projective ou bien qu'elle n'admet que ∞^1 de surfaces déformées.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour que sur une surface ($\mathcal{R}$), *qui n'admet que* ∞^1 *de surfaces déformées, le réseau conjugué de déformation projective soit formé par les lignes de Segre-Darboux, il faut et il suffit que la surface soit une surface* F *et que ses courbes canoniques se confondent avec une famille de lignes de Segre. Il existe de telles surfaces et elles dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument. Elles sont définies par le système d'équations* (18) *avec* $\mu' \neq 0$; *ce système a une famille de caractéristiques formée par les lignes de Darboux, qui sont contenues dans le réseau conjugué de déformation projective.*

6. Or, on peut déterminer complètement les surfaces qui sont définies par le système (18) et cela quel que soit μ, constant ou non. En effet, on conclut d'abord de la théorie générale de M. E. Cartan [1] que la fonction $\sqrt{u}$ est un facteur intégrant des formes ω_1 et ω_2. Posons

$$\sqrt{u}\,\omega_1 = d\xi, \qquad \sqrt{u}\,\omega_2 = d\eta, \qquad \xi + \eta = x, \qquad \xi - \eta = y$$

et écrivons pour simplifier $\mathrm{U} = \sqrt{u}$. Or, les équations (18) montrent immédiatement que U ne dépend que de x et de plus, on trouve facilement que l'on a

$$\alpha = \mathrm{U}', \qquad \mu = \frac{1}{2}(\mathrm{UU}'' - \mathrm{U}'^2 + 1); \qquad \lambda = k\mathrm{U}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{UU}'' - \frac{3}{4}\mathrm{U}'^2 + \frac{3}{4}, \tag{25}$$

k étant une constante arbitraire. Par suite, on voit que les coefficients du système (18) ne dépendent que de $\xi + \eta$, de sorte que

[1] E. Cartan, *loc. cit.*, p. 293.

les surfaces considérées admettent un groupe à un paramètre de transformations projectives en elles-mêmes.

Les formules (18) et (25) conduisent aux équations suivantes :

$$
(26)\quad\left\{
\begin{aligned}
dA &= -\frac{3}{2}\frac{U'}{U}(d\xi + d\eta)A + \frac{1}{U}d\xi\,A_1 + \frac{1}{U}d\eta\,A_2,\\
dA_1 &= \left(\overline{kU + \frac{1}{2}U'' - \frac{3}{4}\frac{U'^2}{U} + \frac{3}{4}\frac{1}{U}}\,d\xi + \overline{\frac{1}{2}U'' - \frac{U'^2}{U} + \frac{1}{U}}\,d\eta\right)A\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{U'}{U}(d\xi - d\eta)A_1 + \frac{1}{U}d\xi\,A_2 + \frac{1}{U}d\eta\,A_3,\\
dA_2 &= \left(\overline{\frac{1}{2}U'' - \frac{U'^2}{U} + \frac{1}{U}}\,d\xi + \overline{kU + \frac{1}{2}U'' - \frac{3}{4}\frac{U'^2}{U} + \frac{3}{4}\frac{1}{U}}\,d\eta\right)A\\
&\quad + \frac{1}{U}d\eta\,A_1 - \frac{1}{2}\frac{U'}{U}(d\xi - d\eta)A_2 + \frac{1}{U}d\xi\,A_3,\\
dA_3 &= \left(kU + \frac{1}{2}U'' - \frac{3}{3}\frac{U'^2}{U} + \frac{3}{4}\frac{1}{U}\right)(d\xi + d\eta)A\\
&\quad + \left(\overline{\frac{1}{2}U'' - \frac{U'^2}{U} + \frac{1}{U}}\,d\xi + \overline{kU + \frac{1}{2}U'' - \frac{3}{4}\frac{U'^2}{U} + \frac{3}{4}\frac{1}{U}}\,d\eta\right)A_1\\
&\quad + \left(\overline{kU + \frac{1}{2}U'' - \frac{3}{4}\frac{U'^2}{U} + \frac{3}{4}\frac{1}{U}}\,d\xi + \overline{\frac{1}{2}U'' - \frac{U'^2}{U} + \frac{1}{U}}\,d\eta\right)A_2\\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{U'}{U}(d\xi + d\eta)A_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans la suite il faut distinguer deux cas suivant $k \neq 0$ ou bien $k = 0$.

a. D'abord, nous allons nous occuper des surfaces pour lesquelles on a $k \neq 0$; c'est le cas général. Considérons les points P, P_1, P_2, P_3 qui sont donnés par les expressions suivantes :

$$
(27)\quad\left\{
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}(4kU^2 + U'^2 - 1)A - (U'+1)A_1 - (U'+1)A_2 + 2A_3,\\
P_1 &= \frac{1}{4}(4kU^2 - U'^2 + 1)A + \frac{1}{2}(2\sqrt{k}U + U' + 1)A_1\\
&\quad + \frac{1}{2}(-2\sqrt{k}U + U' + 1)A_2 - A_3,\\
P_2 &= \frac{1}{4}(4kU^2 - U'^2 + 1)A + \frac{1}{2}(-2\sqrt{k}U + U' + 1)A_1\\
&\quad + \frac{1}{2}(2\sqrt{k}U + U' + 1)A_2 - A_3,\\
P_3 &= (U' - 1)A - A_1 - A_2.
\end{aligned}
\right.
$$

D'abord, on s'assure facilement que ces points sont linéairement indépendants. De plus, on trouve, en tenant compte des formules (26) que la droite $[PP_3]$ ainsi que les points P_1 et P_2 sont fixes; en effet, on obtient par un calcul facile que les points P satisfassent aux équations suivantes :

$$
(28)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dP}{dx} = \left(\dfrac{U'}{U} - \dfrac{1}{2U}\right)P - 2kUP_3, \\[2mm]
\dfrac{dP_3}{dx} = - \dfrac{1}{2U}P \quad \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{U}P_3, \\[2mm]
dP_1 = \left(\dfrac{U'}{U} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{U}\,dx + \sqrt{k}\,dy\right)P_1, \\[2mm]
dP_2 = \left(\dfrac{U'}{U} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{U}\,dx - \sqrt{k}\,dy\right)P_2.
\end{cases}
$$

Or, les équations (26) montrent que si l'on a $d\xi + d\eta = 0$ le point dA est une combinaison linéaire de $A_1 - A_2$ et par suite, d'après (27), il est une combinaison linéaire de P_1, P_2. On en conclut facilement, en tenant compte des deux dernières relations (28) que, si x est constant, le plan $[AP_1P_2]$ est fixe. Par conséquent, les surfaces intéressées jouissent de la propriété que, sur elles, les lignes de Darboux $x =$ const. sont planes et les plans de ces lignes forment un faisceau dont l'axe est la droite $[P_1P_2]$.

On tire des équations (27)

$$
(29)\qquad A = \frac{1}{4kU^2}\{P + P_1 + P_2\}
$$

et l'on voit que, x étant constant les coordonnées des points P, P_1, P_2 ont la forme

$$
P = c; \qquad P_1 = c_1 e^{\sqrt{k}y}, \qquad P_2 = c_2 e^{-\sqrt{k}y}.
$$

Dans ces formules les c sont des constantes et elles signifient les coordonnées de trois points du plan $[AP_1P_2]$. Or, en prenant dans le plan $[AP_1P_2]$ ces points pour les sommets d'un système de référence, les coordonnées des points P, P_1, P_2 sont respectivement $1:0:0$; $0:1:0$; $0:0:1$ et les coordonnées du point A s'écriront, d'après (29), $z_0 : z_1 : z_2 = 1 : e^{\sqrt{k}y} : e^{-\sqrt{k}y}$, de sorte qu'on a $z_1 z_2 = z_0^2$. On voit d'abord que les lignes de Darboux $x =$ const. sont des coniques qui passent par les points fixes P_1, P_2; on voit de plus que, dans chaque plan $[AP_1P_2]$ les tangentes d'une telle conique, aux points P_1, P_2, passent par le point P, qui à son tour décrit une droite. Par suite, chacun de ces coniques est déterminée encore par une constante et par suite le système considéré de lignes de Darboux ou bien, chacune des surfaces considérées, est déterminée par une fonction d'une variable. L'indétermination de la solution montre que la fonction en question peut être arbitraire. Les surfaces considérées jouissent donc des propriétés caractéristiques des surfaces générales de révolution.

Le système (18) *définit les surfaces générales de révolution.*

Remarque 1. — Le résultat entraîne en particulier que, *chaque surface de révolution est projectivement déformable.* Cette propriété des surfaces de révolution a été indiquée, probablement pour la première fois, par M. Cartan, dans son cours à la Sorbonne en 1927-28; elle résulte, comme M. E. Čech a bien voulu me le communiquer, des résultats de M. P. Mentré, publiés aux *Comptes rendus*, 182, 1926, p. 1073.

On voit en particulier *qu'en général une surface de révolution n'admet que* ∞^1 *des surfaces déformées, mais il en existe aussi telles, qui admettent* ∞^3 *de surfaces déformées.*

Remarque 2. — Il ne paraît pas difficile d'écrire explicitement l'intégrale générale du système (26). En effet, si l'on écrit la fonction U, qui y figure, sous la forme

$$U = \frac{2Q'}{kQ - Q''},$$

on vérifie aisément que les fonctions

$$P = -4\frac{Q'^{\frac{5}{4}}}{kQ - Q''} e^{\frac{3}{4}k\int\frac{Q}{Q'}dx}, \qquad P_3 = QQ'^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{3}{4}k\int\frac{Q}{Q'}dx}$$

donnent une solution particulière du système (28). On peut donc obtenir par des quadratures la solution générale du système (28) et par suite celle du système (26). Le résultat n'est pas simple; c'est pourquoi je ne l'écris pas.

b. Nous allons déterminer les surfaces pour lesquelles on a $k = 0$. Dans ce but nous introduisons les points P, P_1, P_2, P_3 qui sont déterminés par les expressions suivantes :

$$(30)\quad \begin{cases} P = A, \\ P_1 = (U'' - 1)A \qquad - A_1 \qquad - A_2, \\ P_2 = \qquad UA_1 \qquad - UA_2, \\ P_3 = -\frac{1}{2}(U'^2 - 1)A + (U' + 1)A_1 + (U' + 1)A_2 + 2A_3. \end{cases}$$

Au sujet de ces points, on démontre d'abord facilement qu'ils sont linéairement indépendants et on déduit des équations (26) qu'ils vérifient le système d'équations différentielles

$$(31)\quad \begin{cases} dP = -\left(\frac{U'}{U} + \frac{1}{2U}\right)dx\,P - \frac{1}{2U}dx\,P_1 + \frac{1}{2U^2}dy\,P_2, \\ \frac{dP_1}{dx} = \qquad \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{U}P_1 \qquad + \frac{1}{2U}P_3, \\ dP_2 = \qquad \left(\frac{U'}{U} - \frac{1}{2U}\right)dx\,P_2 + \frac{1}{2}dy\,P_3, \\ \frac{dP_3}{dx} = \qquad \left(\frac{U'}{U} - \frac{1}{2U}\right)P_3. \end{cases}$$

Or, il est clair qu'on peut intégrer ce système par des quadratures. Posons, pour simplifier, $\frac{1}{U} = 2\frac{Q''}{Q'}$; nous aurons

$$(32)\qquad P = \frac{Q''}{Q'^2}\left\{c + c_1\int Q'^4 dx + c_2 y + c_3\left(y^2 - 2\int Q'^4 dx \int \frac{dx}{Q'^4}\right)\right\},$$

les c étant des constantes arbitraires. Si l'on écrit x au lieu de $\int Q'^4 dx$ et que l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées cartésiennes des surfaces considérées, on obtient, après avoir éliminé les paramètres x, y, l'équation des surfaces bien connues

$$(33)\qquad Z = Y^2 + F(X),$$

$F(X)$ étant une fonction arbitraire.

Remarque. — On voit en particulier que, *chaque surface de révolution est projectivement déformable sur une surface, donnée par une équation de la forme* (33).

7. *Deuxième cas* $\mu' = 0$. — Dans ce cas l'invariant $\mu = c$ est constant et *les surfaces* ($\mathcal{R}$) *correspondantes sont caractérisées par la propriété d'admettre* ∞^3 *de surfaces déformées*

Or, on sait que les surfaces $(\mathcal{R})$ générales, qui admettent ∞^3 de surfaces déformées dépendent dans le cas $c = 0$ de deux fonctions arbitraires d'un argument et dans le cas $c \neq 0$, $c \neq \frac{1}{2}$ de six constantes arbitraires et enfin, dans le cas $c = \frac{1}{2}$, elles dépendent de trois constantes arbitraires. Dans tous ces cas on connaît explicitement les invariants fondamentaux α, β, λ, ρ des surfaces $(\mathcal{R})$ correspondantes ([1]). Remarquons encore que $2(2c-1)$ est la courbure de la forme quadratique $\varphi = 2\omega_1\omega_2$ qui donne les asymptotiques.

a. Nous allons d'abord considérer le cas $c \neq \frac{1}{2}$. Dans ce cas les invariants fondamentaux des surfaces générales $(\mathcal{R})$ correspondantes sont donnés par les formules suivantes :

$$
(34)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\sqrt[6]{\frac{Y}{X}}\cdot\frac{dx}{x-y}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\sqrt[6]{\frac{X}{Y}}\cdot\frac{dy}{y-x};\\
&\alpha = \sqrt{1-2c}\,\sqrt[6]{\frac{X}{Y}}\left(1+\frac{1}{6}\,\overline{y-x}\,\frac{X'}{X}\right),\\
&\beta = \sqrt{1-2c}\,\sqrt[6]{\frac{X}{Y}}\left(1+\frac{1}{6}\,\overline{x-y}\,\frac{Y'}{Y}\right),\\
&\lambda = (x-y)^2 X^{-\frac{2}{3}} Y^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}c\,\frac{X}{(x-y)^2}-\frac{1}{2}c\,\frac{X'}{x-y}+\frac{c}{480}x^4 X^{(\mathrm{vi})}(0)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{c}{120}x^3 Y^{(\mathrm{v})}(0)+k_1x^2+k_2x+k_3\right],\\
&\rho = (y-x)^2 X^{+\frac{1}{3}} Y^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{3}{2}c\,\frac{X}{(y-x)^2}-\frac{1}{2}c\,\frac{Y'}{y-x}+\frac{c}{480}y^4 Y^{(\mathrm{vi})}(0)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{c}{120}y^3 Y^{(\mathrm{v})}(0)+k_1y^2+k_2y+k_3\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules x, y sont les variables indépendantes, k_1, k_2, k_3 sont des constantes arbitraires et X et Y sont des fonctions de x et y respectivement ; ces fonctions peuvent être arbitraires dans le cas $c = 0$, mais elles sont, si $c \neq 0$, des polynomes du sixième degré, les coefficients de ces polynomes étant les mêmes.

L'équation des lignes de Darboux est

$$\frac{dx^3}{X} = \frac{dy^3}{Y},$$

([1]) E. CARTAN, *loc. cit.*, p. 303-307.

tandis que celle du réseau conjugué de déformation projective est

$$(k_1 x^2 + k_2 x + k_3)\frac{dx^2}{X} = (k_1 y^2 + k_2 y + k_3)\frac{dy^2}{Y}.$$

Pour que la famille de lignes de Darboux $\frac{dx}{\sqrt[3]{X}} = \frac{dy}{\sqrt[3]{Y}}$ se confonde avec l'une du réseau conjugué de déformation projective il faut et il suffit, manifestement, que l'on ait

$$\frac{k_1 x^2 + k_2 x + k_3}{\sqrt[3]{X}} = \frac{k_1 y^2 + k_2 y + k_3}{\sqrt[3]{Y}},$$

ou bien

$$X = m(k_1 x^2 + k_2 x + k_3)^3,$$
$$Y = m(k_1 y^2 + k_2 y + k_3)^3,$$

m étant une constante arbitraire, différente de zéro. Mais cette constante est sans aucune importance, car on peut la faire disparaître des coefficients du système en changeant les variables indépendantes suivant les formules $x = \sqrt[6]{m}\,x$, $y = \sqrt[6]{m}\,y$. On peut donc supposer $m = 1$.

Or, on voit d'abord que, si $c = 0$ on a $\rho = \lambda$ et l'on vérifie facilement que, pour que dans le cas $c \neq 0$ la relation $\rho = \lambda$ ait lieu, il faut et il suffit qu'il soit $k_1 = 0$. Les surfaces $c = 0$ et $c \neq 0$, $k_1 = 0$ sont donc contenues dans le système de surfaces de révolution (26) et il ne s'agit ici que des surfaces pour lesquelles $ck_1 \neq 0$.

Or, c étant fixe, les surfaces intéressées forment une famille de ∞^3 surfaces que j'appellerai *classe* c. Les surfaces de chaque classe se divisent en deux familles suivant que l'on a $k_3^2 - 4k_1 k_2 \neq 0$ ou bien $k_3^2 - 4k_1 k_2 = 0$; je parlerai, pour abréger, de la « première » et de la « deuxième » famille.

Je vais démontrer les deux propositions suivantes :

1° Pour que deux surfaces considérées soient projectivement déformables l'une sur l'autre il faut et il suffit qu'elles appartiennent à la même classe et à la même famille;

2° Chaque surface considérée est projectivement déformable sur ∞^1 de surfaces de révolution.

Démonstration de la première proposition. — Considérons une classe quelconque c. En choisissant convenablement les variables indépendantes on peut s'arranger que les polynomes X, Y soient $(x^2+k)^3$, $(y^2+k)^3$, k étant une constante différente de zéro pour les surfaces de la première famille et égale à zéro pour celles de la deuxième famille. Soient S et $\overline{\mathrm{S}}$ deux surfaces appartenant à la classe considérée. Soient x, y les variables indépendantes pour la surface S et $\bar{x}$, $\bar{y}$ celles pour la surface $\overline{\mathrm{S}}$ et supposons qu'on a déjà pour la surface S : $\mathrm{X}=(x^2+k)^3$, $\mathrm{Y}=(y^2+k)^3$ et pour la surface $\overline{\mathrm{S}}$: $\overline{\mathrm{X}}=(\bar{x}^2+\bar{k})^3$, $\overline{\mathrm{Y}}=(\bar{y}^2+\bar{k})^3$. Désignons par α, β ; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ les invariants correspondants pour les surfaces S et $\overline{\mathrm{S}}$. On a, d'après (7), $\alpha=\beta$, $\bar{\alpha}=\bar{\beta}$ et les formules (34) donnent

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{1-2c}\,\frac{xy+k}{\sqrt{(x^2+k)(y^2+k)}},\\ \bar{\alpha} &= \sqrt{1-2\bar{c}}\,\frac{\bar{x}\bar{y}+\bar{k}}{\sqrt{(\bar{x}^2+\bar{k})(\bar{y}^2+\bar{k})}}, \end{aligned}\right.$$

de sorte que α, $\bar{\alpha}$ sont des constantes $(=\sqrt{1-2c})$ si S et $\overline{\mathrm{S}}$ appartiennent à la deuxième famille et dans ce cas seulement. Il en résulte, d'après la théorie générale de M. Cartan [1], que les deux surfaces S et $\overline{\mathrm{S}}$ ne sont pas projectivement déformables l'une sur l'autre si elles appartiennent aux différentes familles et qu'elles le sont, si elles appartiennent à la deuxième famille ; dans ce cas la correspondance ponctuelle qui réalise la déformation dépend de deux paramètres.

[1] E. CARTAN, *loc. cit.*, p. 310

(*A suivre.*)

Si les deux surfaces S et S appartiennent à la première famille, considérons les « dérivées » α_1, α_2 ; $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ des invariants α, $\bar{\alpha}$ qui sont définies par les équations

$$d\alpha \quad \alpha_1\omega_1 \quad \alpha_2\omega_2, \qquad d\alpha \quad \alpha_1\bar{\omega}_1 \quad \alpha_2\omega_2.$$

On a, d'après (10)

$$(36) \quad \alpha_1 \quad \alpha_2, \quad \alpha_1 \quad \alpha^2 \quad 2c-1; \qquad \bar{\alpha}_1 \quad \alpha_2, \quad \alpha_1 \quad \alpha^2 \quad 2c-1,$$

de sorte que α_1 α_2 dépendent de α de la même manière que $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ de α. Il en resul c (¹) que les surfaces S et S sont projectivement deformables l'une sur l'autre et la correspondance qui realise la deformation dépend d'un paramètre.

Prenons maintenant deux surfaces appartenant aux différentes classes c et $\bar{c}$. Il est aisé de voir qu'elles ne sont pas déformables l'une sur l'autre. En effet, cela est évident si les deux surfaces considérées appartiennent aux différentes familles. Si elles appartiennent toutes les deux aux premières familles, l'enoncé est vrai parce que, d'après (36), les invariants α_1, $\bar{\alpha}_1$ ne s'expriment pas de la même manière en fonction de α, $\bar{\alpha}$. Si les surfaces considérées appartiennent aux deuxièmes familles, l'énoncé est encore vrai, parce que les valeurs numériques constantes des invariants α, $\bar{\alpha}$ ne sont pas les mêmes.

Démonstration de la deuxième proposition. — Considérons une classe quelconque c. Pour démontrer la proposition pour les surfaces de la première famille, il suffit de montrer qu'on peut choisir, dans les équations (26), définissant les surfaces générales de révolution, la fonction $U(\xi+\eta)$ de manière que α ne soit pas constant et que l'on ait $\alpha_1 = \alpha^2 + 2c - 1$. Or, on a, d'après (25),

$$\alpha \quad U', \qquad \alpha_1 \quad \alpha_2 = UU'$$

de sorte que U doit satisfaire à l'équation

$$U'' \quad U^2 \quad 2c-1.$$

On voit que la fonction

$$U \quad \sqrt{2c-1}\,\mathrm{Cos}\,\xi \quad \eta)$$

satisfait aux conditions voulues.

Pour démontrer la proposition pour les surfaces de la deuxième famille, il suffit de montrer, qu'on peut choisir la fonction U de manière a avoir $\alpha = \sqrt{1-2c}$. Or, il suffit manifestement de prendre U $\sqrt{1-2c}(\xi+\eta)$.

( ) E. Cartan *loc. cit.*, p. 309.

Pour démontrer la proposition pour les surfaces de la deuxième famille, il suffit de montrer, qu'on peut choisir la fonction U de manière à avoir $\alpha - \sqrt{1-2c}$. Or, il suffit manifestement de prendre $U \quad \sqrt{1-2c}(\xi+\eta)$.

---

(1) E. Cartan, *loc. cit.* p. 309.

b. Nous allons maintenant considerer le cas $c = \frac{1}{2}$. Dans ce cas les invariants fondamentaux de surfaces générales $(\mathcal{R})$ correspondantes sont donnés par les formules suivantes :

$$
(37) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\omega_1 \quad \sqrt[6]{\dfrac{Y}{X}}\,dx, \qquad \omega_2 \quad \sqrt[6]{\dfrac{X}{Y}}\,dy, \\[2ex]
\alpha \quad -\dfrac{1}{6}\sqrt[6]{\dfrac{X}{Y}}\cdot\dfrac{X'}{X}; \qquad \beta \quad -\dfrac{1}{6}\sqrt[6]{\dfrac{Y}{X}}\cdot\dfrac{Y'}{Y}, \\[2ex]
\lambda \quad X^{\frac{2}{3}}\,Y^{\frac{1}{3}}\left\{\dfrac{1}{4}yX + \dfrac{1}{8}x^2X(o \quad k_3x + k_1\right\}. \\[2ex]
\rho \quad X^{\frac{1}{3}}\,Y^{\frac{2}{3}}\left\{\dfrac{1}{4}xY' \quad \dfrac{1}{8}y^2Y'(o) \quad k_3y \quad k_2\right\}.
\end{array}
\right.
$$

Dans ces formules les x, y sont les variables indépendantes, k_1, k_2, k_3 sont des constantes arbitraires et X, Y sont des polynomes du troisième degré en x et y respectivement, les coefficients de x^3 et y^3 étant les mêmes.

L'équation des lignes de Darboux est

$$\frac{dx^3}{X} \quad \frac{dy}{Y}$$

et celle du réseau conjugué de déformation projective est donnée par

$$(k_3x + k_1)\frac{dx^2}{X} - (k_3y \quad k_2)\frac{dy^2}{Y}.$$

On obtient facilement, d'une manière analogue comme dans le cas $c \neq \frac{1}{2}$ que, les surfaces dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux sont caractérisées par les formules

$$X = m(k_3x + k_1)^3, \qquad Y = m(k_3y + k_2)^3,$$

m étant une constante arbitraire différente de zéro. Mais cette constante est sans aucune importance car, on s'assure facilement que, X et Y étant donnés par les formules ci-dessus, les coefficients du système (37) ne dépendent que de $\sqrt{m}k_1$, $\sqrt{m}k_2$, $\sqrt{m}k_3$. On peut donc supposer $m = 1$.

On vérifie par un calcul facile que, si $k_3 = 0$ on a $\rho = \lambda$ et si $k_3 \neq 0$ la relation $\rho = \lambda$ a lieu si l'on a, en même temps $k_1 = k_2 = 0$

et dans ce cas seulement. Les surfaces $k_3 = 0$ et $k_3 \neq 0$, $k_1 = k_2 = 0$ sont donc contenues dans le système de surfaces de révolution (26) et il ne s'agit ici que des surfaces pour lesquelles $k_3 \neq 0$ et les constantes k_1, k_2 ne s'annulent pas toutes les deux. Ces surfaces forment une classe de ∞^3 surfaces.

Au sujet de ces surfaces je vais démontrer les deux propositions suivantes :

1° Les surfaces de cette classe sont projectivement déformables les unes sur les autres, mais, parmi elles, il n'existe pas de surfaces qui seraient projectivement déformables sur des surfaces d'une classe $e \neq \frac{1}{2}$.

2° Chacune des surfaces considérées est projectivement déformable sur ∞^1 de surfaces de révolution.

Démonstration de la première proposition. — Soit S une surface quelconque de la classe considérée. En prenant convenablement les variables indépendantes on peut s'arranger de donner, aux polynomes X, Y la forme x^3, y^3. On a ensuite $\alpha = -\frac{k_3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{yx}}$ et de plus, d'après (10),

$$\alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha^2. \tag{38}$$

Il en résulte immédiatement que l'énoncé est vrai.

Démonstration de la deuxième proposition. — Il suffit, manifestement, de montrer qu'on peut choisir, dans les équations (26) la fonction U de manière que α ne soit pas constant et que l'on ait $\alpha_1 = \alpha^2$. Cette dernière condition conduit à satisfaire à l'équation

$$UU'' - U'^2 = 0 \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{U}{U'}\right)' = 0.$$

On voit qu'il suffit de prendre $U = e^{\xi+\eta}$.

Démonstration de la deuxième proposition. — Il suffit, manifestement, de montrer qu'on peut choisir, dans les équations (26) la fonction U de manière que α ne soit pas constant et que l'on ait $\alpha_1 = \alpha^2$. Cette dernière condition conduit à satisfaire à l'équation

$$UU'' - U'^2 = o \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{U}{U'}\right)' = o.$$

On voit qu'il suffit de prendre $U = e^{\xi+\eta}$.

8. Les surfaces dont nous venons de nous occuper dans le n° 7 ne peuvent pas être des surfaces de révolution. En effet, cela résulte de la remarque que, le système (26) contient toutes les surfaces de révolution et l'on y a, pour chaque surface $\rho = \lambda$; d'autre part, les surfaces, dont nous venons de nous occuper étaient caractérisées par l'inégalité $\rho \neq \lambda$.

Les résultats, que nous avons trouvés sur les surfaces étudiées, peuvent donc s'énoncer dans le théorème suivant :

Les surfaces dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux sont toutes les surfaces de révolution et en outre une infinité de ∞^4 *surfaces qui ne sont pas de révolution. Celles-ci forment* ∞^1 *classes et, en général, les surfaces de chaque classe se divisent en deux familles de manière que, deux surfaces sont projectivement déformables l'une sur l'autre si elles appartiennent à la même classe et à la même famille et dans ce cas seulement. Chacune de ces* ∞^4 *surfaces est projectivement déformable sur* ∞^1 *surfaces de révolution.*

Remarque. — Au sujet des surfaces de révolution on a le théorème suivant :

Chaque surface de révolution est projectivement déformable sur des surfaces de révolution. Mais il existe aussi des surfaces de révolution qui admettent des déformées qui ne sont pas de révolution.