Otakar Borůvka

Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante

C. R. Acad. Sci. Paris t. 187, 1928, 1271-1273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500012

GÉOMÉTRIE. — *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante.* Note de M. O. Borůvka.

1. Dans un Mémoire récemment paru [1] j'ai étudié des surfaces minima, plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante, qui jouissent de la propriété, que l'indicatrice de la courbure, en chaque point, est une circonférence. Les résultats, que j'ai obtenus à ce sujet, laissaient prévoir de ne pas admettre une généralisation immédiate pour des surfaces, jouissant des mêmes propriétés géométriques, mais plongées dans un espace à un nombre de dimensions supérieur à quatre et spécialement dans un espace à cinq dimensions. Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, je me suis occupé de telles surfaces, plongées dans un espace à cinq dimensions et je me permets, dans cette Note, de résumer les résultats principaux, auxquels je suis arrivé à ce sujet.

2. *Les surfaces minima, plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante c, dont l'indicatrice de la courbure, en chaque point, est une circonférence, existent, quelle que soit la valeur de la courbure de l'espace ambiant; elles dépendent, en général, de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

3. *Dans le sens de l'espace euclidien* ($c = 0$) on a les résultats suivants :

Pour qu'une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, puisse être définie comme une surface minima de l'espace euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatrice de la courbure, en chaque point, est une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau tel que la suite de transformées laplaciennes dans l'un et l'autre sens s'arrête après la première transformation, selon le cas de Laplace, sur une courbe située sur une quadrique non dégénérée d'un espace à quatre dimensions; les deux courbes en question peuvent être arbitraires, à la condition près qu'elles ne soient pas des droites

[1] *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante* (*Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême*, 1928). On trouve un résumé des résultats principaux de ce Mémoire dans une Note aux *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 334-336.

toutes les deux et que leurs tangentes soient, elles aussi, sur la même quadrique. Cette quadrique est précisément la quadrique absolue de l'espace euclidien considéré et le réseau en question donne les deux familles de courbes minima sur la surface. Le calcul montre, en particulier, que dans l'espace euclidien à cinq dimensions, il n'existe pas de surfaces minima dont l'indicatrice de la courbure soit une circonférence *de rayon constant.*

4. *Dans le cas d'un espace non euclidien* ($c \neq 0$) le calcul montre qu'il existe deux espèces de surfaces considérées, les surfaces *générales* dépendant de quatre fonctions arbitraires d'un argument, les autres de trois fonctions seulement. *Pour qu'une surface, plongée dans l'espace projectif à cinq dimensions, puisse être définie comme une surface minima générale d'un espace non euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatriee de la courbure, en chaque point, est une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau périodique à période six et autopolaire par rapport à une quadrique.* Cette quadrique détermine la métrique de l'espace et le réseau en question donne les deux familles de courbes minima sur la surface. On trouve ainsi une interprétation géométrique parfaite d'un problème de M. Guichard [1] et de plus, on trouve la généralité de la solution de ce problème. *Parmi les surfaces en question il existe une surface et une seule qui jouit de la propriété que le rayon de l'indicatrice soit le même en chaque point de la surface.* C'est une surface algébrique et *elle est caractérisée, projectivement, par la propriété que le réseau en question est à invariant constant. Quant aux autres surfaces,* dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument, elles s'obtiennent des précédentes si, dans un sens, la deuxième transformée laplacienne du réseau formé par les deux familles de courbes minima se réduit à une courbe. Sur une telle surface, une famille de courbes minima est formée par des courbes planes, les plans de ces courbes étant des plans osculateurs de la courbe à laquelle se réduit la deuxième transformée laplacienne du réseau. *Parmi les surfaces en question il existe une famille de surfaces, jouissant de la propriété que le rayon de l'indicatrice soit le même en chaque point de la surface. Ces surfaces dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable et elles sont caractérisées, projectivement, par la propriété que la famille de courbes planes du réseau en question soit formée par des coniques.* Il est digne de remarque, pour qu'une surface minima, plongée dans un

---

(1) *Sur une classe particulière d'équations de M. Moutard* (*Comptes rendus*, 156, 1913, p. 748-751); G. Tzitzéica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Chap. XIV.

espace non euclidien à cinq dimensions, dont l'indicatrice de la courbure est une circonférence, générale ou non, jouisse de la propriété d'avoir le même rayon de l'indicatrice en chaque point de la surface, il faut qu'il existe une relation entre le rayon de l'indicatrice et la courbure de l'espace ambiant. En particulier, *pour que le rayon de l'indicatrice soit réel, il faut et il suffit que l'espace ambiant soit à courbure positive.*

5. Quant à la méthode qui m'a permis d'obtenir ces résultats, c'est la méthode du repère mobile, sous la forme employée par M. E. Cartan.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. 187, p. 1271, séance du 26 décembre 1928.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
85660-28 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.