Otakar Borůvka

O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstatní křivosti

Rozpravy II. třídy České akademie 37, 1928, č. 37, 19 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500006

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXVII. ČÍSLO 37.

O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti.

Napsal
O. Borůvka.

Předloženo dne 19. října 1928.

Ve ctyrrozměrném *eucleidovském* prostoru byly několikráte studovány reální minimální plochy, mající vlastnost, že indikatrix křivosti v každém jejich bodě jest kružnice.*) Jest známa řada vlastností takových ploch a výsledky jsou úplné až na otázku po jejich geometrické konstrukci, jež nebyla řes na.

Ve čtyrrozmerném *neeucleidovském* prostoru nebyly posud minimální plochy, při nichž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice, studovány.

Z popudu prof. E. Cartana zabýval jsem se studiem takových ploch a dovolım si nejdůležitější výsledky, jež jsem získal, v tomto pojednání uvésti. Pri této príležitosti doplním také zmínenou mezeru ve výsledcích o plochách v prostoru eucleidovském. Užívám metody pohyblivého systemu souradneho, jak byla vynalezena prof. Cartanem; tato spočıvá v tvorení systému Pfaffových dıfferenciálních rovnic, jez definují studované plochy a v dıskusi tech systému.**)

Pojednání toto má pet kapitol, z nichz prvni jest uvodem.

*) S. Kwietniewski, Über Flachen des vierdimensionalen Raumes, deren sāmtlıche Tagentıalebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu d n ebenen Kurven (Dissertation, Zürich, 1902).

K. Kommerell, Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimension n (Mathem. Annalen, T. 60, 1905, p. 548).

L. P. Eisenhart, Minimal surfaces in Enclidean four space (Amer. Journ. of Math T. 34 1912, p. 215)

**) Pro informaci čtenárovu dovoluji si poukázati na četná pojednání prof. Cartana a zvlástě na jeho spis „La géometrie des espaces de Riemann„ (Mémorial l s Sciences mathem., Fasc. IX., 1925, Paris).

V kapitole druhé zabývám se otázkou existence ploch, majících výse uvedené vlastnosti, ve čtyrrozmerném prostoru o kon tantní krivosti; pri tom nevylučuji známý případ, že uvažovaný prostor jest eucleidovský. Nacházím, že *v každém čtyrrozměrném prostoru o konstantní krivosti existují minimální plochy, při nichž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice a závisí na dvou libovolných funkcích jednoho argumentu.*

V kapitole třetí doplňuji známé výsledky v prostoru *eucleidovském* nalezením konstrukce uvažovaných ploch. *Projektivně l e takové plochy definovati jako místo průsečíku rovin dvou kuželů druhého druhu, jejichž osy se neprotínají.* Tyto plochy mají dvě soustavy rovinných krivek v rovinách obou kuželu a tečné roviny plochy podél libovolné křivky jedné soustavy tvoří kužel, jehož vrchol jest na ose kužele druhého druhu, jehoz roviny obsahují křivky druhé soustavy. *Metricky* jsou tyto plochy určeny libovolnou kvadrikou obsahující osy obou kuželů. Ve čtyřrozměrném eucleidovském prostoru neexistují minimální plochy, jejichž indikatrix jest kružnice o *konstantním* poloměru.

Kapitola čtvrtá obsahuje geometrickou konstrukci obecných minimálních ploch, jejichž indikatrix křivosti v každém bode jest kružnice v prostoru *neeucleidovském. Projektivně jsou takové plochy vytvoreny prusečıky párů oskulačních rovin dvou krivek lιžících na nedegenerované kvadri e a ta kových, že i jejich plochy tečen leží na téže kvadrice.* Tato kvadrıka ur uje uvažované plochy *metricky.*

V kapitole paté studuji zvláštní prípad těchto ploch. Vycházím od otázky, zda ve čtyřrozměrnem proj ktivním prostoru, mezi plochami vytvořenými prusečíky páru oskulačních rovin dvou křivek ležících na nedegenerované kvadrice a takových, že i jejich plochy tečen leží na téže kvadrice, existují plochy, *jejichž průseky s oskulačními rovinami jedné z uvažovaných křivek jsou kuželosečky.* Počet ukazuje, *že existuje jedna a jen jedna plocha mající tuto vlastnost a že jest to projekce Veronesovy plochy z bodu neležícího na nadplose degenerovaných kuzeloseček*; mimo to vychází, *že obě krivky, jejichž oskulační roviny vytvorují tuto plochu, tvorı jedıno ı racionální normální krivku čtvrtého stupně, jež lezí na ploše.* Tím jest dána konstrukce průmětu Veronesovy plochy; dá se ukázati, že tato konstrukce jest možna jen jediným zpusobem, t. j. na uvažované plo e exi tuje *jen jedna* racıonální normální křivka čtvrtého stupně, jejíž oskulační roviny ji vytvoří.*) Studovaná plocha patrí mezi plochy, jež se dají defınovati *metricky* jako minimální plochy ve čtyrrozměrném neeucl idovském pro storu, jejichž indikatrix v každém bodě jest kružnice a *mezi temito plochami jest charakterisována tím, ze poloměr indikatrix je t konstantní.* Exi tuj relace mezi poloměrem indikatrix a křıvostí prostoru; aby polom r indi-

*) Jest na snadě otázka, pokud plochy, defınované v S_{2k} $(k > 2)$ jako místo prusečíku párů oskulačních S_k racionální normální křivky 2 k-tého stupně zobecňují studovanou plochu. K této otázce se vrátím jindy.

katrix byl reální, jest nutné, aby krivost prostoru byla kladná. Kvadrika, která určuje metriku studované plochy, jest určena takto: Průmět (z obecného bodu) Veronesovy plochy jest průsekem oskulačních rovin určité (jediné) racionální normální křivky čtvrtého stupně, jež leží na ploše; existuje jedna a jen jedna (nedegenerovaná) kvadrika, jež tuto křivku a každou její tečnu obsahuje a to jest kvadrika, jež určuje metriku. Jinak se dá tato kvadrika definovati jako průmět první poláry nadplochy degenerovaných kuželoseček, přiřazené středu promítání.

P. prof. E. Cartanovi a p. prof. E. Čechovi dovoluji si zde vysloviti srdečné díky za rady, jimiž mi při této práci byli nápomocni.

I. Úvod.

1. Uvažujme čtyřrozměrný Riemannův prostor o konstantní křivosti c. Každému jeho bodu M přiřaďme systém souřadný (R), definovaný čtyřmi k sobě kolmými, jednotkovými vektory e_1, e_2, e_3, e_4. Změně parametrů prostoru (v okolí určitého bodu) odpovídá změna souřadného systému a zvláště platí rovnice tvaru

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \omega_4 e_4, \\ de_1 &= \omega_{11} e_1 + \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 + \omega_{14} e_4, \\ de_2 &= \omega_{21} e_1 + \omega_{22} e_2 + \omega_{23} e_3 + \omega_{24} e_4, \\ de_3 &= \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2 + \omega_{33} e_3 + \omega_{34} e_4, \\ de_4 &= \omega_{41} e_1 + \omega_{42} e_2 + \omega_{43} e_3 + \omega_{44} e_4. \end{aligned} \tag{1}$$

ω, jež se v těchto rovnicích vyskytují, jsou lineární formy v differenciálech parametrů prostoru a hoví vzhledem k předpokladům, učiněným o vektorech e_1, e_2, e_3, e_4 jednak lineárním relacím

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

jednak vzhledem k tomu, že o prostoru se předpokládá, že má konstantní křivost c, lineárním relacím

$$\begin{aligned} \omega_i' &= \sum_r [\omega_r\, \omega_{ri}], \\ \omega_{ij}' &= \sum_r [\omega_{ir}\, \omega_{rj}] - c\, [\omega_i\, \omega_j], \end{aligned} \tag{3}$$

které definují strukturu prostoru. Prostor eucleidovský jest charakterisován tím, že pro nej hodnota konstanty c jest nula; tento případ výslovně připouštím.

2. Budiž (S) plocha v uvazovaném prostoru. Každému jejímu bodu jest přiřazen systém souřadný. Pro jednoduchost následujících úvah určíme blíže jeho volbu tak, že zvolíme v každém bodě plochy příslušné vektory e_1, e_2 v tečné rovině. To se vyjádří rovnicemi

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0. \tag{4}$$

Tyto vedou, s ohledem na vzorce pro strukturu prostoru, na bilineární relace

$$[\omega_1\,\omega_{13}] + [\omega_2\,\omega_{23}] = 0,$$
$$[\omega_1\,\omega_{14}] + [\omega_2\,\omega_{24}] = 0, \tag{5}$$

jež ukazují, že při uvažované volbě systému jsou formy ω_{13}, ω_{23}, ω_{14}, ω_{24} lineárními kombinacemi forem ω_1, ω_2 tvaru

$$\omega_{13} = a\,\omega_1 + b\,\omega_2, \qquad \omega_{14} = a'\,\omega_1 + b'\,\omega_2,$$
$$\omega_{23} = b\,\omega_1 + c\,\omega_2, \qquad \omega_{24} = b'\,\omega_1 + c'\,\omega_2. \tag{6}$$

Zaveďme kvadradické differenciální formy

$$\Phi_3 = \omega_1\,\omega_{13} + \omega_2\,\omega_{23},$$
$$\Phi_4 = \omega_1\,\omega_{14} + \omega_2\,\omega_{24}; \tag{7}$$

pak jest

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\omega_1}, \quad \omega_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\omega_2}; \quad \omega_{14} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_4}{\partial\omega_1}, \quad \omega_{24} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_4}{\partial\omega_2}.$$

Formy Φ_3, Φ_4 určují *normální křivost* v libovolném bodě M plochy (S). Tato jest definována vektorem kolmým ku ploše, jehož složkami jsou formy Φ_3, Φ_4 dělené lineárním elementem plochy. Každé křivce na ploše (S), procházející bodem M jest přiřazen vektor normální křivosti, který závisí jenom od směru křivky na ploše. Dosadíme-li, podle (1),

$$\omega_1 = ds\,\cos\Theta, \quad \omega_2 = ds\,\sin\Theta,$$

při čemž jest ds element oblouku a Θ úhel určující směr křivky, dají se složky vektoru normální krivosti, přiřazeného určité křivce v libovolném bodě M, psáti ve tvaru

$$X_3 = a\,\cos^2\Theta + 2\,b\,\sin\Theta\,\cos\Theta + c\,\sin^2\Theta,$$
$$X_4 = a'\,\cos^2\Theta + 2\,b'\,\sin\Theta\,\cos\Theta + c'\,\sin^2\Theta. \tag{8}$$

Z něho jest viděti, že množství křivek na ploše, procházejících bodem, odpovídá v rovině kolmé ku ploše *kuželosečka*, jejíž rovnice jsou (8); tato se nazývá *indikatrix křivosti* plochy (S) v bodě M.

Píšeme-li vzorec (8) ve tvaru

$$X_3 = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\,\Theta + b\,\sin 2\,\Theta,$$
$$X_4 = \frac{a'+c'}{2} + \frac{a'-c'}{2}\cos 2\,\Theta + b'\,\sin 2\,\Theta, \tag{9}$$

vidíme, že střed indikatrix nesplývá obecně s uvažovaným bodem M plochy a že, aby tomu tak bylo, jest nutné a stačí, aby platily relace

$$a + c = o \quad a' + c' = o. \tag{10}$$

Tyto relace charakterisují *minimální plochy*. Je-li tedy (S) plochou minimální, pak relace (6) mají tvar

$$\omega_{13} = a\,\omega_1 + b\,\omega_2, \qquad \omega_{14} = a'\,\omega_1 + b'\,\omega_2,$$
$$\omega_{14} = b\,\omega_1 - a\,\omega_2, \qquad \omega_{24} = b'\,\omega_1 - a'\,\omega_2, \tag{11}$$

a pro složky vektoru normální křivosti nalezneme vzorce tvaru

$$X_3 = a\,\cos 2\,\Theta + b\,\sin 2\,\Theta,$$
$$X_4 = a'\,\cos 2\,\Theta + b'\,\sin 2\,\Theta. \tag{12}$$

3. Nalézti v uvažovaném prostoru obecnou plochu (S), mající určité geometrické vlastnosti vyjádřené lineárními relacemi mezi formami ω, *analyticky* znamená, nalézti systém nejobecnějších differenciálních forem ω o dvou neodvisle proměnných, hovících daným lineárním relacím a splnujících rovnice struktury prostoru.

Uvažujme systém differenciálních rovnic tohoto tvaru:

$$\begin{aligned} dM &= & \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\ de_1 &= -c\,\omega_1 M & + \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 + \omega_{14} e_4, \\ de_2 &= -c\,\omega_2 M & - \omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_3 + \omega_{24} e_4, \\ de_3 &= & - \omega_{13} e_1 - \omega_{23} e_2 + \omega_{34} e_4, \\ de_4 &= & - \omega_{14} e_1 - \omega_{24} e_2 - \omega_{34} e_3, \end{aligned} \tag{13}$$

při čemž formy ω splňují dané lineární relace. Snadným počtem se přesvědčíme, že rovnice struktury (3) jsou právě podmínkami integrability tohoto systému a to při libovolné volbě konstanty c. Každý fundamentální systém integrálů rovnic tvaru (13) určuje jedno řešení problému, neboť formy ω jsou rovnicemi (13) úplně určeny. Naopak, je-li $\bar{\omega}$ jedno řešení problému, systém differenciálních rovnic (13), příslušný k tomuto řešení, dá se kompletně integrovati a jeho fundamentální systém integrálů určuje úplně formy $\bar{\omega}$. Tedy každé řešení $\bar{\omega}$ problému jest určeno fundamentálním systémem integrálů M, e_1, e_2, e_3, e_4 rovnic tvaru (13) a tedy obecné řešení tohoto systému určuje obecné řešení problému.

4. Předpokládejme, že známe jedno řešení ω problému. Systém differenciálních rovnic (13), určený tímto řešením, definuje v projektivním čtyřrozměrném prostoru plochu, jako místo bodu M, a současně v každém bodě M plochy systém souřadný, jehož vrcholy jsou funkce M, e_1, e_2, e_3, e_4. Vzhledem k tomuto systému má libovolný bod A uvažovaného projektivního prostoru určité souřadnice a dá se psáti ve tvaru

$$A = xM + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4.$$

Budiž nejprve v rovnicích (13) $c = 0$. Budiž A *pevný* bod projektivního prostoru; pak v rovnicích (13) jest obsaženo, že veličina x jest pevná. Tedy souřadnice x libovolného pevného bodu v uvažovaném projektivním prostoru má vzhledem ke každému souřadnému systému, přiřazenému ploše (S) tutéž hodnotu; zvolíme-li tedy mezi souřadný i systémy, přiřazenými ploše (S) jeden pevně a jsou-li X, X_1, X_2, X_3, X_4 souřadnice bodu A vzhledem k tomuto systému, platí pro souřadnice bodu A vzhledem k libovolnému souřadnému systému, přiřazenému ploše (S) relace $x = X$. Pro souřadnice libovolného bodu M plochy (S) platí zvláště $X = 1$.

Dále plyne z rovnic (13), že v nadrovině $x = 0$, veličina

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

jest pevná. Tedy pro souřadnice bodu A v nadrovině $X = 0$, vztažené na libovolný systém souřadný přiřazený ku ploše (S), platí relace

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \tag{14}$$

a tedy zvláště pro bod dM

$$d s^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = d X_1^2 + d X_2^2 + d X_3^2 + d X_4^2.$$

Z toho jest patrno, že kvadrika

$$X = 0, \; X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0 \tag{15}$$

jest absolutní kvadrikou příslušného eucleidovského prostoru.

Body e_1, e_2, e_3, e_4 příslušné k libovolnému bodu plochy, jsou po dvou sdruženy vzhledem k této kvadrice a body $e_1 \pm i e_2$, $e_3 \pm i e_4$ na ní leží.

Budiž nyní v rovnicích (13) $c \neq o$.*) Budiž A *pevný* bod projektivního prostoru; pak v rovnicích (13) jest obsaženo, že veličina

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{1}{c} x^2$$

jest pevná. Tedy souřadnice x libovolného pevného bodu v uvažovaném projektivním prostoru splňují relaci

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{1}{c} x^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \frac{1}{c} X^2, \tag{16}$$

při čemž X značí souřadnice téhož bodu A vzhledem k pevnému systému souřadnému, zvolenému mezi systémy přiřazenými ploše (S). Pro souřadnice libovolného bodu M plochy platí zvláště

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \frac{1}{c} X^2 = \frac{1}{c}$$

a pro bod dM

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = d X_1^2 + d X_2^2 + d X_3^2 + d X_4^2 + \frac{1}{c} d X^2 .$$

Z toho jest viděti, že v cayleyovské interpretaci jest kvadrika

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \frac{1}{c} X^2 = 0 \tag{17}$$

absolutní kvadrikou příslušného neeucleidovského prostou.

Body e_1, e_2, e_3, e_4, příslušné k libovolnému bodu plochy jsou po dvou a s bodem M sdruženy vzhledem k této kvadrice a body $e_1 \pm i e_2$, $e_3 \pm i e_4$ na ní leží.

II. Existence a obecnost minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti, při nichž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice.

1. V tomto pojednání budu studovati *minimální plochy ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti, při nichž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice (o poloměru různém od nuly).*

*) Následující vyklad pochází od prof. E. Cartana („Sur les variétés à connexion projective"; Bull. de la Soc. math. de France, 1924, chap. VI.).

Existují-li takové plochy, pak pro ne výraz $X_3^2 + X_4^2$ (12) nezávisí na Θ. Platí tedy relace

$$\begin{gathered} a^2 + a'^2 - b^2 + b'^2 = R^2, \\ a\,b + a'b' = 0 \end{gathered} \tag{18}$$

při čemž R jest poloměr indikatrix a jest funkcí parametru na ploše. Z rovnic (18) jest zvláště patrno, že funkce b, b' nemohou býti současně rovny nule; bez újmy obecnosti můžeme předpokládati $b' \neq 0$.

Aplikujme rovnice struktury na vzorce (11). Obdržíme s ohledem na (2)

$$\begin{gathered} [\omega_1\,(d\,a - 2\,b\,\omega_{12} - a'\,\omega_{34})] + [\omega_2\,(d\,b + 2\,a\,\omega_{12} - b'\,\omega_{34})] = 0, \\ [\omega_1\,(d\,b + 2\,a\,\omega_{12} - b'\,\omega_{34})] - [\omega_2\,(d\,a - 2\,b\,\omega_{12} - a'\,\omega_{34})] = 0, \\ [\omega_1\,(d\,a' - 2\,b'\,\omega_{12} + a\,\omega_{34})] + [\omega_2\,(d\,b' + 2\,a'\,\omega_{12} + b\,\omega_{34})] = 0, \\ [\omega_1\,(d\,b' + 2\,a'\,\omega_{12} + b\,\omega_{34})] - [\omega_2\,(d\,a' - 2\,b'\,\omega_{12} + a\,\omega_{34})] = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Systém souřadný přiřazený libovolnému bodu M plochy závisí jednak od dvou parametrů x, y, jež určují polohu bodu M na ploše, jednak ale od jistého počtu dalších parametrů, od nichž poloha bodu M nezávisí. Budiž δ symbol pro differenciály parametrů při konstantních x, y; budiž e_{ik} forma ω_{ik} v takových differenciálech. Zřejmě jest

$$e_1 = e_2 = e_{13} = e_{23} = e_{14} = e_{24} = 0,$$

a vzorce (19) dávají zvláště

$$\delta\,a' = 2b'\,e_{12} - a\,e_{34}.$$

Tato rovnice ukazuje, s ohledem na předpoklad $b' \neq o$, že jest možno v každém bodě plochy zvoliti systém souřadný tak, aby bylo $a' = 0$ a tedy (dle 18)

$$a' = o,\ b = o,\ a = b' = R.$$

Vzorce (11) lze tedy psáti ve tvaru

$$\begin{gathered} \omega_{13} = R\,\omega_1,\ \omega_{14} = R\,\omega_2, \\ \omega_{23} = -R\,\omega_2,\ \omega_{24} = R\,\omega_1, \end{gathered} \tag{20}$$

a pro kvadratické formy Φ_3, Φ_4 obdržíme

$$\begin{gathered} \Phi_3 = R\,(\omega_1^2 - \omega_2^2), \\ \Phi_4 = 2\,R\,\omega_1\,\omega_2. \end{gathered}$$

Z relací (19) plyne

$$\begin{gathered} [\omega_1\,\frac{d\,R}{R}] + [\omega_2\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34})] = 0, \\ [\omega_1\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34})] - [\omega_2\,\frac{d\,R}{R}] = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

anebo

$$\begin{gathered} [\,(\omega_1 - i\,\omega_2)\,(\,\frac{d\,R}{R} + i\,2\,\omega_{12} - \omega_{34})\,] = 0, \\ [\,(\omega_1 + i\,\omega_2)\,(\,\frac{d\,R}{R} - i\,2\,\omega_{12} - \omega_{34})\,] = 0 \end{gathered} \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{22}$$

2. Výsledkem předchozích úvah jest, že existují-li uvažované plochy, mohou se definovati systémem differenciálních rovnic (13), v němž formy ω hoví rovnicím (20) a podmínkám integrability (22). Z těchto podmínek jest však zřejmé, že systém differenciálních rovnic (2), (4), (20) jest v involuci a že jeho řešení závisí na dvou libovolných funkcích jednoho argumentu a to při jakékoliv hodnotě křivosti prostoru.

V každém čtyřrozměrném prostoru o konstatní křivosti existují minimální plochy, při nichž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice a závisí obecně na dvou libovolných funkcích jednoho argumentu.

Z relací (22) jest patrno, že uvažovaný Pfaffův systém má dva systémy charakteristik $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$.

3. V dalším udám geometrickou konstrukci a nejdůležitější vlastnosti uvažovaných ploch. Úvahy, které za tím účelem provedu, budou různé podle toho, je-li uvažovaný prostor eucleidovský ($c = 0$) anebo neeucleidovský ($c \neq 0$). Z toho duvodu pojednám zvláště o uvažovaných plochách v prostoru eucleidovském a pak o plochách v prostoru neeucleidovském.

III. Plochy v prostoru eucleidovském.

1. Budiž $c = 0$ a hledejme geometrickou konstrukci uvažovaných ploch. Za tím účelem uvažujme v projektivním prostoru o čtyřech dimensích plochy, jež jsou dány systémem differenciálních rovnic

$$\begin{aligned} d\,M &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\ d\,e_1 &= \omega_{12} e_2 + R\,\omega_1 e_3 + R\,\omega_2 e_4, \\ d\,e_2 &= -\omega_{12} e_1 - R\,\omega_2 e_3 + R\,\omega_1 e_4, \\ d\,e_3 &= -R\,\omega_1 e_1 + R\,\omega_2 e_2 + \omega_{34} e_4, \\ d\,e_4 &= -R\,\omega_2 e_1 - R\,\omega_1 e_2 - \omega_{34} e_3, \end{aligned} \tag{23}$$

na nějž vedou rovnice (20). Tomuto systému jest ekvivalentní systém následující:

$$d\,M = \frac{1}{2}(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_1 - i\,e_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_1 + i\,e_2),$$

$$\begin{aligned} d\,(e_1 - i\,e_2) &= i\,\omega_{12}(e_1 - i\,e_2) + R\,(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_3 - i\,e_4), \quad (i = \sqrt{-1}) \\ d\,(e_3 - i\,e_4) &= -R\,(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_1 - i\,e_2) + i\,\omega_{34}(e_3 - i\,e_4), \\ d\,(e_1 + i\,e_2) &= -i\,\omega_{12}(e_1 + i\,e_2) + R\,(\omega_1 - i\,\omega_2)(e_3 + i\,e_4), \\ d\,(e_3 + i\,e_4) &= -R\,(\omega_1 + i\,\omega_2)(e_1 + i\,e_2) - i\,\omega_{34}(e_3 + i\,e_4). \end{aligned} \tag{24}$$

Z jeho tvaru jest patrno, že přímky $[e_1 \pm i\,e_2,\ e_3 \pm i\,e_4]$*) jsou pevné a opisuje-li bod M charakteristiku $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$, rovina $[M,\ e_1 \pm i\,e_2,\ e_3 \pm i\,e_4]$ jest pevná. Na ploše existují tedy dva systémy rovinných křivek $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$. Roviny každé z obou soustav procházejí pevnou přímkou $[e_1 \pm i\,e_2,\ e_3 \pm i\,e_4]$ a závisí na jednom parametru, jenž jest prvním integrálem rovnice $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$; zřejmě neexistuje žádná korespondence

*) Platí obě znaménka $+$ nebo $-$.

mezi rovinami obou soustav. Roviny každé soustavy tvoří kužel druhého druhu, jehoz osa jest přímka $[e_1 \pm i\, e_2, e_3 \pm i\, e_4]$. Obě tyto přímky určují trojrozměrný prostor a tedy se neprotínají; konečně, ježto body $e_1 \pm i\, e_2$, $e_3 \pm i\, e_4$ jsou na kvadrice (15) a páry $e_1 \pm i\, e_2$, $e_3 \pm i\, e_4$*) jsou vzhledem k ní sdružené, obě uvažované přímky leží na kvadrice (15).

Každým bodem plochy prochází jedna rovina každé z obou soustav. Tedy jest uvažovaná plocha průsekem dvou kuželů druhého druhu, jejichž osy se neprotínají.

Na druhé straně snadno se vidí že nejobecnější kužel druhého druhu ve čtyřrozměrném prostoru závisí na jedné libovolné funkci jednoho argumentu. Z obecnosti řešení tedy vyplývá, že oba kužele druhého druhu, jejichž prusekem jest uvažovaná plocha, mohou býti libovolné.

Nejobecnější uvažované plochy jsou průsekem dvou libovolných kuželů druhého druhu, jejichž osy se neprotínají.

2. V dalším budu nazývati pro stručnost každou plochu ve čtyřrozměrném projektivním prostoru *plochou* (R), dá-li se definovati systémem differenciálních rovnic tvaru (24). Geometrická definice ploch (R) jest dána předchozím výsledkem.

3. Z rovnic (24) se dá vyčísti tato vlastnost ploch (R):

Tečné roviny každé plochy (R) *podél libovolné rovinné krivky jedné soustavy tvoří kužel (prvního druhu), jehož vrchol jest na ose kužele (druhého druhu), jehož roviny obsahují rovinné křivky druhé soustavy; tento vrchol jest prusečíkem trojrozměrného prostoru určeneho rovinou uvažované krivky a rovinou k ní nekonečně blízkou s osou kužele rovin druhé soustavy.*

Vskutku, rovnice (24) ukazují, že opisuje-li bod M libovolnou rovinnou křivku soustavy $\omega_1 \pm i\, \omega_2 = 0$, bod $e_1 \pm i\, e_2$ zůstává pevný. Tento bod jest prusecíkem tečné roviny plochy v bodě M a přímky $[e_1 \mp i\, e_2, e_3 \mp i\, e_4)$, jež jest osou kužele rovin soustavy $\omega_1 \quad i\, \omega_2 = 0$.

Dále jest patrno, že bod $e_1 \quad i\, e_2$ jest na tečně v bodě M rovinné křivky soustavy $\omega_1 \quad i\, \omega_2 \quad 0$, procházející tímto bodem; tedy jest obsažen v trojrozměrném prostoru určeném rovinou uvažované křivky a rovinou k ní nekonečně blízkou.

Tedy platí uvedený teorém.

4. Z předchozích úvah plyne, že *v metrice určené kvadrikou (15), každá plocha* (R), *pro niž funkce* R, *která se vyskytuje v rovnicích (24), jest od nuly ruzná, jest minimální plocha ve čtyrrozměrném eucleidovském prostoru pri níz indikatrix krivosti v ka dém bodě jest kružnice.* A naopak, *každá plocha metricky takto definovaná určuje určitou plochu* (R).

5. Realní minimální plochy ve čtyrrozměrném eucleidovském prostoru, pri nichž indikatrix krivosti v každem bodě jest kružnice, byly již studovány.**) Základní teorem, který o takových plochách platí, pochází od p. Eisenharta a jest tento:

*) Viz pozn. na str. 8.
**) Viz pozn. na str 1.

Budiž $f(x + iy)$ analytická funkce. Reální plocha ve čtyřrozměrném prostoru jest dána rovnicí $u + iv = f(x + iy)$, když a jen když jest minimální a indikatrix křivosti v každém jejím bodě jest kružnice.

Hořejší výsledky vedou k snadnému dukazu této věty. Vskutku, tato praví, že když a jen když má plocha uvedené geometrické vlastnosti, dají se její rovnice psáti ve tvaru

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = U(x, y),\ x_4 = V(x, y) \tag{25}$$

při čemž $U(x, y)$, $V(x, y)$ jsou reální funkce dvou neodvisle proměnných, hovící Cauchy-Riemannovým differenciálním rovnicím

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{26}$$

Buďtež $(0, 1, \pm i, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1 \pm i)$*) body na kvadrice (15), jimiž jsou určeny osy obou kuželů, které vytvořují plochu (R). Libovolná rovina každého z těchto kuželů jest určena jedním bodem, závislým na jednom parametru, který neleží na ose příslušného kužele. Buďtež $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$, $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ body, jež určují roviny obou kuželů; u a v jsou obecně analytické funkce jednoho parametru u po případě v. Souřadnice bodu na jednom po případě druhém kuželi dají se vyjádřiti vzorci

$$X = \lambda_2 u_0,\ X_1 = \lambda_0 + \lambda_2 u_1,\ X_2 = i\lambda_0 + \lambda_2 u_2,\ X_3 = \lambda_1 + \lambda_2 u_3,\ X_4 = i\lambda_1 + \lambda_2 u_4,$$

po případě

$$X = \mu_2 v_0,\ X_1 = \mu_0 + \mu_2 v_1,\ X_2 = -i\mu_0 + \mu_2 v_2,\ X_3 = \mu_1 + \mu_2 v_3,\ X_4 = -i\mu_1 + \mu_2 v_4,$$

při čemž λ, μ jsou libovolné parametry. Z těchto vzorců vychází, že souřadnice bodu na příslušné ploše (R) jsou dány výrazy

$$\begin{aligned}
\varrho X &= 2 u_0 v_0,\\
\varrho X_1 &= u_1 v_0 + u_0 v_1 + i u_2 v_0 - u_0 v_2,\\
\varrho X_2 &= u_2 v_0 + u_0 v_2 + i u_0 v_1 - u_1 v_0,\\
\varrho X_3 &= u_3 v_0 + u_0 v_3 + i u_4 v_0 - u_0 v_4,\\
\varrho X_4 &= u_4 v_0 + u_0 v_4 + i u_0 v_3 - u_3 v_0,
\end{aligned}$$

při čemž ϱ jest libovolný, od nuly ruzný, faktor. Jest třeba předpokládati $u_0 v_0 \neq o$, neboť jinak by příslušná plocha (R) byla obsažena v trojrozměrném prostoru a tento případ nás nezajímá; zvolme v souhlase s úvahou v odst. I., 4, $\varrho = 2 u_0 v_0$. Obdržíme, po malé změně označení, pro cartesiovy souřadnice bodu na uvažované ploše výrazy

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_1 + i\,\overline{u_2 - v_2}),\\
X_2 &= \frac{1}{2}(u_2 + v_2 - i\,\overline{u_1 - v_1}),\\
X_3 &= \frac{1}{2}(u_3 + v_3 + i\,\overline{u_4 - v_4}),\\
X_4 &= \frac{1}{2}(u_4 + v_4 - i\,\overline{u_3 - v_3}).
\end{aligned} \tag{27}$$

*) Viz pozn. na str. 8.

Také v těchto vzorcích jsou u, v analytické funkce jednoho parametru u po případě v.

Položme $u_\alpha = u_{\alpha 1} + i\, u_{\alpha 2}$, $v_\alpha - v_{\alpha 1} + i\, v_{\alpha 2}$, při čemž $u_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$ jsou reální funkce dvou reálních proměnných x, y a vyjádřeme podmínky, aby plocha vyjádřená vzorci (27) byla reální. K tomu *jest nutné a stačí*, aby bylo

$$u_{12} + u_{21} = v_{21} \quad v_{12}, \; u_{11} \quad u_{22} - v_{11} + v_{22}, \; u_{32} + u_{41} \quad v_{41} \quad v_{32},$$
$$u_{31} - u_{42} - v_{31} \quad v_{42}.$$

Z toho, že funkce u, v vyskytující se v rovnicích (27) jsou analytické, plyne, že $u_{\alpha\beta}$ hoví Cauchy-Riemannovým differenciálním rovnicím

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = \frac{\partial u_{12}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{11}}{\partial v} = -\frac{\partial u_{12}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_{21}}{\partial x} \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{21}}{\partial y} = -\frac{\partial u_{22}}{\partial x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Tedy jest

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} \quad \frac{\partial X_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = -\frac{\partial X_2}{\partial x},$$
$$\frac{\partial X_3}{\partial x} \quad \frac{\partial X_4}{\partial y}, \quad \frac{\partial X_3}{\partial y} = -\frac{\partial X_4}{\partial x},$$

a $X_1 + i\, X_2$ i $X_3 + i\, X_4$ jsou analytické funkce proměnné $x + i\, y$. Tedy jest $X_3 + i\, X_4$ analytická funkce proměnné $X_1 + i\, X_2$ a tedy, dosadíme-li

$$X_1 - x, \; X_2 \quad y, \; X_3 \quad U(x, y), \; X_4 = V(x, y),$$

funkce $U(x, y)$, $V(x, y)$ splňují rovnice (26).

Teorém p. Eisenharta jest tím dokázán.

6. Naskytá se otázka, zda mezi minimálními plochami ve čtyřrozměrném eucleidovském prostoru, při nichž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice, existují takové, *v jejichž každém bodě poloměr indikatrix jest týž.*

Snadný počet ukazuje, že *takové plochy neexistují.*

IV. Plochy v prostoru neeucleidovském.

1. Budiž $c \neq 0$ a hledejme geometrickou konstrukci uvažovaných ploch. Za tím účelem uvažujme v projektivním prostoru o čtyřech dimensích plochy, jež jsou dány systémem differenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
d M &- && \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \\
d e_1 &= && c\, \omega_1 M \quad + \omega_{12} e_2 + R\, \omega_1 e_3 + R\, \omega_2 e_4, \\
d e_2 & && c\, \omega_2 M \quad \omega_{12} e_1 \quad - R\, \omega_2 e_3 + R\, \omega_1 e_4, \\
d e_3 &- && - R\, \omega_1 e_1 + R\, \omega_2 e_2 \quad + \omega_{34} e_4, \\
d e_4 & && R\, \omega_2 e_1 \quad R\, \omega_1 e_2 - \omega_{34} e_3,
\end{aligned} \tag{28}$$

na niž vedou rovnice (20). Tomuto systému jest ekvivalentní systém následující:

$$
\begin{aligned}
d\,M &= \frac{1}{2}\,(\omega_1 + i\,\omega_2)\,(e_1 - i\,e_2) + \frac{1}{2}\,(\omega_1 - i\,\omega_2)\,(e_1 + i\,e_2),\\
d\,(e_1 - i\,e_2) &= -\,c\,(\omega_1 - i\,\omega_2)\,M + i\,\omega_{12}\,(e_1 - i\,e_2) + \\
&\quad + R\,(\omega_1 + i\,\omega_2)\,(e_3 - i\,e_4),\\
d\,(e_3 - i\,e_4) &= -\,R\,(\omega_1 - i\,\omega_2)\,(e_1 - i\,e_2) + i\,\omega_{34}\,(e_3 - i\,e_4),\\
d\,(e_1 + i\,e_2) &= -\,c\,(\omega_1 + i\,\omega_2)\,M - i\,\omega_{12}\,(e_1 + i\,e_2) + \\
&\quad + R\,(\omega_1 - i\,\omega_2)\,(e_3 + i e_4),\\
d\,(e_3 + i\,e_4) &= -\,R\,(\omega_1 + i\,\omega_2)\,(e_1 + i\,e_2) - i\,\omega_{34}\,(e_3 + i\,e_4).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Z jeho tvaru jest patrno, že místem bodu $e_3 + i\,e_4$ jest křivka a tečná rovina k ní v bodě $e_3 \pm i\,e_4$ prochází bodem $e_1 \pm i\,e_2$. Dále jest viděti, že opisuje-li bod M charakteristiku soustavy $\omega_1 + i\,\omega_2 = o$, bod $e_3 \pm i\,e_4$ jest pevný; první integrál rovnice $\omega_1 \pm i\,\omega_2 = 0$ jest tedy parametrem křivky a neexistuje žádná korespondence mezi body $e_3 + i\,e_4$, $e_3 - i\,e_4$. Dále, ježto body $e_1 \pm i e_2$, $e_3 \pm i\,e_4$ jsou na kvadrice (17) a páry $e_1 \pm i\,e_2$ $e_3 \pm i\,e_4$*) jsou vzhledem k ní sdružené, uvažovaná křivka a každá její tečna leží na kvadrice (17). Konečně se vidí, že opisuje-li bod M libovolnou křivku, různou od charakteristik, platí relace tvaru

$$M = \omega\,(e_3 \pm i\,e_4) + \bar{\omega}_1\,d\,(e_3 \pm i\,e_4) + \omega_2\,d^2\,(e_3 \pm i\,e_4) \tag{30}$$

při čemž $\bar{\omega}$ jsou výrazy v ω a jejich differenciálech. Bod M jest tedy v oskulační rovině křivky, jež jest místem bodu $e_3 \pm i\,e_4$.

Uvažovaná plocha jest tedy místem průsečíku páru oskulačních rovin dvou křivek ležících na kvadrice (17) a tato kvadrika obsahuje i plochy tečen obou křivek.

Na druhé straně snadno se vidí, že obecně křivka, ve čtyrrozměrném projektivním prostoru, ležící na negedenerované kvadrice, jejíž plocha tečen leží na téže kvadrice, závisí na jedné libovolné funkci jednoho argumentu. Z obecnosti řešení tedy vyplývá, že obě křivky, jejíž oskulační roviny vytvořují uvažovanou plochu, mohou býti libovolné.

Nejobecnější uvažované plochy jsou průsekem páru oskulačních rovin dvou křivek ležících na kvadrice (17); tyto křivky mohou býti libovolné, ale takové, že jejich plochy tečen jsou na téže kvadrice.

2. V dalším budu nazývati pro stručnost každou plochu ve čtyřrozměrném projektivním prostoru *plochou* $(S,)$ dá-li se definovati systémem differenciálních rovnic tvaru (29) s $c \neq o$. Geometrická definice ploch (S) jest dána předchozím výsledkem.

3. Z předchozích úvah plyne, že *v metrice, určené kvadrikou (17), každá plocha (S)***) *jest minimální plocha ve čtyřrozměrném neeucleidovském prostoru, při níž indikatrix křivosti v každém bodě jest kružnice.* A naopak, *každá plocha metricky takto definovaná určuje určitou plochu* (S).

*) Viz pozn. na str. 8.

**) Uvidíme, že neexistují plochy (S), po něž $R = 0$.

V. Průmět Veronesovy plochy jako zvláštní případ.

1. Vyjděme od otázky, *zda mezi plochami* (S) *existují takové, při nichž charakteristiky jedné soustavy jsou kuželosečky.*

Připusťme, že existují takové plochy a budiž (S) jedna z nich; kuželosečkami buďtež charakteristiky soustavy $\omega_1 + i\,\omega_2 = 0$. Opisuje-li bod M libovolnou charakteristiku této soustavy, platí dle (29)

$$\begin{aligned} d\,(e_1 + i\,e_2) &= -i\,\omega_{12}\,(e_1 + i\,e_2) + 2\,R\,\omega_1\,(e_3 + i\,e_4), \\ d\,(e_3 + ie_4) &= -i\,\omega_{34}\,(e_3 + i\,e_4)\,; \end{aligned} \tag{31}$$

z toho jest viděti, že bod $e_3 + i\,e_4$ a přímka $[e_1 + i\,e_2,\, e_3 + i\,e_4]$ jsou pevné. Uvažujme svazek přímek $[M,\, e_3 + i\,e_4]$, jehož středem jest pevný bod $e_3 + i\,e_4$. Z rovnic (29) plyne, že je-li $\omega_1 + i\,\omega_2 = 0$, platí rovnice

$$\begin{aligned} d\,[M,\, e_3 + i\,e_4] &= -i\omega_{34}\,[M,\, e_3 + i\,e_4] + \omega_1[e_1 + i\,e_2,\, e_3 + i\,e_4], \\ d\,[e_1 + i\,e_2,\, e_3 + i\,e_4] &= i\,(\omega_{12} + \omega_{34})\,[e_1 + i\,e_2,\, e_3 + i\,e_4]. \end{aligned} \tag{32}$$

Tečna charakteristiky v bodě M, obsahuje bod $e_1 + i\,e_2$ takže mezi přímkami uvažovaného svazku a body na přímce $[e_1 + i\,e_2,\, e_3 + i\,e_4]$ jest korespondence, v níž přímce $[M,\, e_3 + i\,e_4]$ odpovídá bod $e_1 + i\,e_2$. *Křivka, kterou opisuje bod* M, *jest kuželosečka, když a jen když tato korespondence jest projektivní.*

Abychom tuto podmínku vyjádřili, uvažme, že z podmínek integrability plyne (viz. pozn. **) na str. 12), že bod M nemůže opisovati kuželosečku, je-li $R = 0$ a násobme bod $e_3 + i\,e_4$ výrazem $\frac{1}{2}\,R$, při čemž R jest táž funkce, jež se vyskytuje v rovnicích (29). Obdržíme

$$\begin{aligned} d\,(e_1 + i\,e_2) &= -i\,\omega_{12}\,(e_1 + i\,e_2) + \omega_1\,(e_3 + i\,e_4) \\ d\,(e_3 + i\,e_4) &= \left(\frac{d\,R}{R} - i\,\omega_{34}\right)(e_3 + i\,e_4). \end{aligned} \tag{33}$$

Porovnáním těchto vzorců s (32) vidíme, že *uvažovaná korespondence jest projektivní, když a jen když*

$$\frac{d\,R}{R} + i\,(2\,\omega_{12} - \omega_{34}) = 0 \tag{34}$$

Podmínky integrability (22) vyžadují, aby tato rovnice byla také splněna, opisuje-li bod M libovolnou charakteristiku soustavy $\omega_1 + i\omega_2 = 0$. Tedy musí býti tato rovnice splněna identicky.

Její podmínka integrability je t

$$3\,R^2 = c \tag{35}$$

takže rovnice (34) má tvar

$$2\,\omega_{12} - \omega_{34} = 0 \tag{36}$$

Tedy existují plochy, mající uvedenou vlastnost, a dají se definovati systémem differenciálních rovnic, který se dá kompletně integrovati:

$$
\begin{aligned}
\omega_3 &= 0, \ \omega_4 = 0, \\
\omega_{13} &= R\,\omega_1, \ \omega_{14} = R\,\omega_2, \\
\omega_{23} &= -R\,\omega_2, \ \omega_{24} = R\,\omega_1, \\
2\,\omega_{12} &= \omega_{34}, \\
\omega_{ij} + \omega_{ji} &= 0. \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Z něho jest videti, že vsechny studované plochy jsou projektivně identické a že mají vlastnost, že charakteristiky soustavy $\omega_1 - i\,\omega_2 = 0$ jsou také kuželosečky.

Jsou-li na určité ploše (S) charakteristiky jedné soustavy kuželosečky, jsou kuželosečkami také charakteristiky druhé soustavy.) Existuje jedna a jen jedna plocha (až na plochy kolineární), jejíž charakteristiky jsou kuželosečky.*

V dalsím budu pro stručnost tuto plochu značiti (V).

Poznámka. *Analyticky jest plocha (V) mezi plochami (S) charakterisována tím, že funkce R v rovnicích (29) se vyskytující jest konstanta.*

Vskutku, je-li R konstantní, obsahují podmínky integrability (22) vztah (34) a ten vede na (35) a na systém (37). (Viz pozn. **) na str. 12.)

2. Dokáži následující teorém:

Plocha (V) jest průmětem Veronesovy plochy z bodu neležícího na nadploše degenerovaných kuželoseček a obe krivky, jejíž oskulační roviny ji vytvorují, tvoří jedinou racionální normální křivku čtvrtého stupně, která leží na ploše.

Vskutku, uvažujme bilineární kovarianty forem ω_1, ω_2, ω_{12}; jest

$$\omega_1' = -[\omega_2\,\omega_{12}], \ \omega_2' = [\omega_1\,\omega_{12}], \ \omega_{12}' = -R^2[\omega_1\,\omega_2]. \tag{38}$$

Poslední z těchto vzorců ukazuje, že studovaná plocha, považována za dvojrozměrný Riemannův prostor, jest konstantní křivosti. Jest tedy přirozené položiti

$$\omega_1 = \frac{1}{R}\,d\,\Theta, \ \omega_2 = \frac{1}{R}\,\sin\Theta\,d\,\varphi. \tag{39}$$

Pak plyne z rovnic

$$[d\,\varphi\,\omega_{12}] = 0, \ [d\,\Theta\,(\omega_{12} - \cos\Theta\,d\,\varphi)] = 0,$$

tedy

$$\omega_{12} = \cos\Theta\,d\,\varphi$$

a tedy vzorce

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{R}\,d\,\Theta, & \omega_2 &= \frac{1}{R}\,\sin\Theta\,d\,\varphi, \\
\omega_{12} &= \cos\Theta\,d\,\varphi, & \omega_{34} &= 2\cos\Theta\,d\,\varphi, \\
\omega_{12} &= d\,\Theta, & \omega_{14} &= \sin\Theta\,d\,\varphi, \\
\omega_{23} &= -\sin\Theta\,d\,\varphi, & \omega_{24} &= d\,\Theta.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

*) Z dalšího bude patrno, že ve skutečnosti na takové ploše charakteristiky $\omega_1 + i\,\omega_2 = 0$ tvoří jedinou soustavu.

Všechny formy ω, vyskytující se v rovnicích (28) jsou vyjádřeny v differenciálech $d\,\Theta$, $d\,\varphi$ a systém (28) jest

$$\begin{aligned}
d\,M &= \frac{1}{R}\,d\,\Theta\,e_1 + \frac{1}{R}\,sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_2,\\
d\,e_1 &= 3\,R\,d\,\Theta\,M + cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_2 + d\,\Theta\,e_3 + sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_4,\\
d\,e_2 &= 3\,R\,sin\,\Theta\,d\,\varphi\,M \quad cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_1 \quad sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_3 + d\,\Theta\,e_4,\\
d\,e_3 &= d\,\Theta\,e_1 + sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_2 + 2\,cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_4,\\
d\,e_4 & \quad sin\,\Theta\,d\,\varphi\,e_2 - d\,\Theta\,e_1 - 2\,cos\,\Theta\,d\,\varphi\,e_3.
\end{aligned}\tag{41}$$

V tomto systému mužeme předpokládati $R = 1$, neboť stačí v něm zavésti RM místo M; pak systém (41) jest ekvivalentní systému parciálních differenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial\Theta} &= e_1, & \frac{\partial M}{\partial\varphi} &= sin\,\Theta\,e_2,\\
\frac{\partial e_1}{\partial\Theta} &= 3\,M + e_3, & \frac{\partial e_1}{\partial\varphi} &= cos\,\Theta\,e_2 + sin\,\Theta\,e_4,\\
\frac{\partial e_2}{\partial\Theta} &= e_4, & \frac{\partial e_2}{\partial\varphi} &= -3\,sin\,\Theta\,M \quad cos\,\Theta\,e_1 - sin\,\Theta\,e_3,\\
\frac{\partial e_3}{\partial\Theta} & \quad e_1, & \frac{\partial e_3}{\partial\varphi} & \quad sin\,\Theta\,e_2 \quad 2\,cos\,\Theta\,e_4,\\
\frac{\partial e_4}{\partial\Theta} & \quad e_2. & \frac{\partial e_4}{\partial\varphi} & \quad sin\,\Theta\,e_1 \quad 2\,cos\,\Theta\,e_3,
\end{aligned}\tag{42}$$

a jeho integrace jest snadna. Obdrží se vzorce

$$\begin{aligned}
M &\quad k_{00}\,2\,cos\,\varphi\,sin^2\Theta \quad k_{11}\,(1 + 3\,cos\,2\,\Theta) + k_{01}\,2\,sin^2\Theta\,sin\,2\,\varphi +\\
&+ k_{02}\,sin\,2\,\Theta\,cos\,\varphi + k_{12}\,sin\,2\,\Theta\,sin\,\varphi,\\
e_3 &\quad i\,e_4 - k_{00}\,(3\,cos\,2\,\varphi + cos\,2\,\varphi\,cos\,2\,\Theta \quad 4\,i\,sin\,2\,\varphi\,cos\,\Theta) +\\
&+ k_{11}\,3\,(1 \quad cos\,2\,\Theta) + k_{01}\,(3\,sin\,2\,\varphi + sin\,2\,\varphi\,cos\,2\,\Theta \pm\\
&\quad 4\,i\,cos\,2\,\varphi\,cos\,\Theta) + k_{02}\,(\pm\,2\,i\,sin\,\varphi\,sin\,\Theta - cos\,\varphi\,sin\,2\,\Theta) -\\
&\quad k_{12}\,(\pm\,2\,i\,cos\,\varphi\,sin\,\Theta \quad sin\,\varphi\,sin\,2\,\Theta),
\end{aligned}\tag{43}$$

a mimo to jiné, jichz nepotrebujeme. V nich k jsou libovolné konstanty a tedy souřadnice bodu M na plose (V) dají se vyjádriti vzorci

$$\begin{aligned}
y_{00} &= \frac{1}{2}\,cos\,2\,\varphi\,sin^2\Theta,\\
y_{11} &= \frac{1}{4}\,(1 + 3\,cos\,2\,\Theta),\\
y_{01} &= \frac{1}{2}\,sin\,2\,\varphi\,sin^2\Theta,\\
y_{02} &= \frac{1}{2}\,cos\,\varphi\,sin\,2\,\Theta,\\
y_{12} &= \frac{1}{2}\,sin\,\varphi\,sin\,2\,\Theta.
\end{aligned}\tag{44}$$

Dosadíme-li v nich

$$u = cos\,\varphi\,sin\,\Theta,\quad v = sin\,\varphi\,sin\,\Theta,\quad w = cos\,\Theta,\tag{45}$$

můžeme je psáti ve tvaru

$$y_{00} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),\ y_{11} = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad w^2,\ y_{01} = u\,v, \qquad (46)$$
$$y_{02} \quad u\,w,\ y_{12} = v\,w,$$

Odtud jest patrno, ze *plocha* (V) *jest průmět Veronesovy plochy.* Abychom ukázali, že *jest to průmět z bodu neležícího na nadploše degenerovaných kuželoseček,* uvažujme pro okamžik projektivní prostor o pěti dimensích S_5. Zvolíme-li vhodně systém souřadný, můžeme rovnice Veronesovy plochy psáti ve tvaru

$$x_{00} = u^2,\ x_{11} = v^2,\ x_{22} = w^2,\ x_{01} = u\,v,\ x_{02} = u\,w,\ x_{12} = v\,w \qquad (47)$$

a vzhledem k tomuto systému souřadnému má nadplocha degenerovaných kuželoseček rovnici

$$x_{ik} = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2;\ x_{ik} = x_{ki})$$

Transformujeme-li systém souradný rovnicemi

$$y_{00} = \frac{1}{2}(x_{00} - x_{11}),\ y_{11} \quad -\frac{1}{2}(x_{00} + x_{11}) + x_{22},\ y_{22} = x_{00} + x_{11} + x_{22},$$
$$y_{01} = x_{01},\qquad y_{02} \quad x_{02},\qquad y_{12} = x_{12} \qquad (48)$$

vidíme, ze v S_5 rovnice (46) znázorňují kužel, promítající Veronesovu plochu z bodu (P) $x_{00} : x_{11} : x_{22} : x_{01} : x_{02} : x_{12} = 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0$ a že jsou to v rovine (II) $x_{00} \quad x_{11} + x_{22} = 0$ rovnice průmětu Veronesovy plochy. Snadno se zjistí, že bod (P) neleží na nadploše degenerovaných kuželoseček.

3. Abychom nalezli rovnice křivky, jež jest místem bodu $e_3 \pm i\,e_4$, uvažme, ze jejím parametrem jest první integrál rovnice

$$d\,\Theta \pm i \sin\Theta\, d\,\varphi = 0. \qquad (49)$$

Z posledního vzorce (43) obdržíme po snadném počtu rovnice uvažovaných křivek

$$y_{00} : y_{11} : y_{01} : y_{02} : y_{12} = t^4 + 1 : 6t^2 : i(t^4 - 1) : \quad 2t(t^2 \quad 1) : \quad 2it(t^2 + 1),$$
$$y_{00} : y_{11} : y_{01} : y_{02} : y_{12} = t^4 + 1 : 6t^2 : \quad i(t^4 \quad 1) : \quad 2t(t^2 \quad 1) : 2it(t^2 \quad 1). \qquad (50)$$

Zavedeme-li v těchto rovnicích pro druhou křivku parametr $\frac{1}{t}$ místo t a násobíme-li pak souradnice krivky faktorem t^4, shledáme, že *obe krivky, jež jsou m stem bodu* $e_3 \pm ie_4$ *po pr.* $e_3 \quad i\,e_4$, *tvoří jedinou racionální normální křivku čtvrtého stupne.*

Tato krivka leží na ploše. Vskutku, to plyne z toho, že dosadíme-li v rovnicích (46) plochy (V)

$$u \quad (t^2 \quad 1),\ v = \quad i(t^2 + 1),\ w = 2t \qquad (51)$$

obdržíme právě rovnice nalezené křivky.

Tım jest teorém dokázán

4. Hořejšími úvahami jest dána konstrukce průmetu Veronesovy plochy:

Průmět Veronesovy plochy z bodu neležícího na nadploše degenerovaných kuželoseček jest místem průsečíků páru oskulačních rovin racionální normální křivky čtvrtého stupně, ležící na ploše.

Dokáži, že

tato konstrukce jest možna jen jediným způsobem; t. j. na uvažované ploše existuje jediná racionální normální křivka čtvrtého stupně té vlastnosti, že plocha jest místem průsečíku párů jejích oskulačních rovin.

K důkazu zvolme systém souřadný tak, aby rovnice plochy (V) byly dány vzorci (46). Pak rovnice (50) jsou rovnice racionální normální křivky čtvrtého stupně ležící na ploše a tato křivka jest taková, že plocha (V) jest místem průsečíku páru jejích oskulačních rovin; značme tuto křivku v dalším (C).

Předpokládejme, že na ploše (V) mimo křivky (C) existuje racionální normální křivka čtvrtého stupně (C') *různá* od (C) taková, že plocha (V) jest místem průsečíků páru jejích oskulačních rovin. Pak existuje projektivní transformace T, která převádí (C) v (C') a průsečík libovolného páru oskulačních rovin křivky (C) v průsečík odpovídajících oskulačních rovin křivky (C'); projektivní transformace T převádí plochu (V) v sebe.

Uvažujme zobrazení plochy (V) na rovinu π, jak jest dáno vzorci (46). Pravé strany vzorců (46), porovnány s nulou jsou rovnice nezávislých kuželoseček, z nichž každá jest apolární s kuželosečkou $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. *Tato kuželosečka jest jediná, s níž jsou všechny zmíněné kuželosečky apolární* a ze vzorců (51) plyne, že jest obrazem křivky (C). Projektivní transformaci T plochy (V) v sebe odpovídá transformace roviny π v sebe. Tato transformace jest *projektivní*. Vskutku, ježto transformace T převádí kuželosečky plochy (V) v kuželosečky a poněvadž obrazem každé kuželosečky na ploše (V) jest v rovině π přímka, transformace roviny π v sebe převádí každou přímku, jež jest obrazem kuželosečky na ploše, v přímku; poněvadž ale každá přímka v rovině π jest obrazem kuželosečky na ploše (V), jest transformace roviny π v sebe kolineace. Tedy jest obraz křivky (C') v rovině π kuželosečka, nutně *různá od* $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ *a jest také apolární s každou z kuželoseček určených pravými stranami vzorců* (46); to jest nemožné.

5. Hořejší výsledky doplním touto poznámkou:

Veronesova plocha v S_5 budiž dána vzorci (48), (47). Jest patrno, že kuželosečka $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ v rovině π jest obrazem průseku Veronesovy plochy s nadrovinou (Π) $x_{00} + x_{11} + x_{22} = 0$ a že bod (P) $x_{00} : x_{11} : x_{22} : x_{01} : x_{02} : x_{12} = 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0$ jest polem nadroviny (Π) vzhledem k nadploše degenerovaných kuželoseček.

Platí tedy teorém:

Místem průsečíků páru oskulačních rovin průsečné křivky Veronesovy plochy s libovolnou (obecnou) nadrovinou jest průmět Veronesovy plochy z bodu konjugovaného s touto nadrovinou vzhledem k nadploše degenerovaných kuželoseček.

6. Vraťme se k úvahám metrickým. Plocha (V) patří mezi plochy (S) a může se tedy definovati metricky jako minimální plocha ve čtyřrozměrném neeucleidovském prostoru, jejíž indikatrix v každém bodě jest kružnice. Podle poznámky na str. 14 jest mezi takovými plochami *charakterisována* tím, že při ní poloměr indikatrix v každém bodě jest týž; jinak řečeno, *jest to jediná minimální plocha v neeucleidovském prostoru, která má vlastnost, že indikatrix křivosti v každém jejím bodě má týž poloměr.* Podle (35) *existuje relace mezi poloměrem indikatrix a křivostí prostoru*; zvláště jest patrno, že *prostor musí míti kladnou křivost, aby poloměr indikatrix byl reální.*

7. Jest otázka, jaký jest vztah mezi absolutní kvadrikou a plochou (V). Z výsledku odst. IV., 1 plyne, že *kvadrika, jež určuje metriku plochy (V) obsahuje křivku (C) a každou její tečnu.* Snadno se ukáže, že

v čtyřrozměrném projektivním prostoru existuje jedna a jen jedna nedegenerovaná kvadrika, jež obsahuje danou racionální normální křivku čtvrtého stupně a každou její tečnu.

Vskutku budiž ve čtyřrozměrném prostoru (C) racionální normální křivka čtvrtého stupně a

$$z_{00} = t^4,\quad z_{11} = t^3,\quad z_{01} = t^2,\quad z_{02} = t,\quad z_{12} = 1 \tag{52}$$

její rovnice. Vyloučením t z rovnic (52) obdržíme kvadriky

$$\begin{aligned} z_{00} z_{01} - z_{11}^2 = 0,\quad z_{00} z_{02} - z_{11} z_{01} = 0,\quad z_{00} z_{12} - z_{11} z_{02} = 0,\\ z_{11} z_{02} - z_{01}^2 = 0,\quad z_{11} z_{12} - z_{01} z_{02} = 0,\\ z_{01} z_{12} - z_{02}^2 = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

z nichž každá obsahuje křivku (C). Tyto jsou nezávislé a určují tedy lineární systém kvadrik o pěti dimensích

$$\begin{aligned} \lambda_0 (z_{00} z_{01} - z_{11}^2) + \lambda_1 (z_{00} z_{02} - z_{11} z_{01}) + \lambda_2 (z_{00} z_{12} - z_{11} z_{02})\\ + \lambda_3 (z_{11} z_{02} - z_{01}^2) + \lambda_4 (z_{11} z_{12} - z_{01} z_{02}) + \lambda_5 (z_{01} z_{12} - z_{02}^2) = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Každá kvadrika toho systému obsahuje křivku (C) a naopak, každá kvadrika, křivku (C) obsahující, jest v něm obsažena.

Napišme podmínky, jimž musí hověti parametry λ, aby příslušná kvadrika systému (54) obsahovala každou tečnu křivky (C).

Pro každou hodnotu parametru t jsou body $(t^4, t^3, t^2, t, 1)$ a $(4t^3, 3t^2, 2t, 1, 0)$ konjugovány vzhledem ke každé kvadrice systému (54); tedy, *aby určitá kvadrika systému (54) obsahovala každou tečnu křivky (C), jest nutné a stačí, aby obsahovala křivku* $(4t^3, 3t^2, 2t, 1, 0)$.

To vede na podmínky

$$\begin{aligned} 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0,\\ \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Existuje tedy jedna a jen jedna kvadrika obsahující křivku (C) a každou její tečnu a jest dána rovnicí

$$z_{00} z_{12} - 4 z_{11} z_{02} + 3 z_{01}^2 = 0. \tag{56}$$

Odtud se odvodí snadno, že je-li křivka (C) dána rovnicemi (50), příslušná kvadrika má rovnici

$$y_{00}^2 + y_{01}^2 \quad y_{02}^2 + y_{12}^2 \quad \frac{1}{3} y_{11}^2 - 0. \tag{57}$$

Tím jest absolutní kvadrika vzhledem k ploše (V) úplně určena.

8. Konečně podotýkám, že snadnou úvahou se dá ukázati, že *absolutní kvadrika se dá také definovati jako průmět první poláry nadplochy degenerovaných kuželoseček, přidružené středu promítání.*

* * *

Poznámka při korektuře. Mezitím co toto pojednání bylo v tisku, zvěděl jsem z dopisu od p. E. Bompiani, že výsledek, že ve čtyrrozměrném projektivním prostoru místem průsečíku páru oskulačních rovin racionální normální křivky čtvrtého stupně jest průmět Veronesovy plochy, není nový. Nalezl jej (pravděpodobně poprvé) p. G. Castelnuovo (*Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni.* Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti (1891) t. II s. 7.).