

Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle metody nejmenších čtverců)

Postup po provedeném vyrovnání

In: B. Kladio (author): Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle metody nejmenších čtverců). (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1943. pp. 126–139.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405505>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

V.

POSTUP PO PROVEDENÉM VYROVNÁNÍ.

Po vyrovnání se často tážeme, mají-li odchylky vlastnosti nahodilých chyb. Uvedeme nejprve podle Helmerta*) několik kritérií pro nahodilost chyb a způsob, jak odhadnouti přesnost těch kritérií.

1. Zkoušky znamének. a) Součet znamének v dané řadě chyb nebo odchylek.

Označíme řadu uvažovaných chyb (nebo odchylek) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Jejich znaménka označíme V_1, V_2, \dots, V_n , t. j. klademe $V_i = \pm 1$, má-li chyba (nebo odchylka) znaménko \pm . Při tom nutno všechny chyby počítati ve stejném smyslu a ne tedy na př. některá ε považovati za chyby měřených úhlů a jiná jako chyby rozdílu (360° — měřený úhel). Pak je součet znamének v dané řadě $s = V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Mysleme si měření, z nichž vzešla každá chyba nebo odchylka $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$, opakována nekonečněkrát. Mají-li ε_i vlastnosti chyb nahodilých a necháme-li chybu ε_1 nabýti všech jejích nekonečně mnoho hodnot, a nezávisle na ní chybu ε_2 nabýti zase všech nekonečně mnoho jejích hodnot atd., a utvoříme-li vždy příslušné s pro všechny možné kombinace hodnot chyb, bude aritmetický průměr všech těchto součtů s roven 0, protože k určitému počtu případů ε_i se znaménkem $+$ musíme počítati stejný počet případů ε_i se znaménkem $-$.

Můžeme tedy říci: Průměrně je součet znamének v řadě nahodilých chyb nebo odchylek roven 0.

Aby odhadl přesnost tohoto kritéria, to znamená, aby nějak odhadl meze, v nichž můžeme ve skutečném případě čekat součet s , uvažuje Helmert podobně, jako když se hledá

*) F. R. Helmert: Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. Sitzb. der k. preuss. Ak. der Wiss., Phys.-math. Classe, 1905, str. 594—612.

průměrná hodnota chyb (srovn. I, odst. 3 a 4). Jenže zde jde o průměrné hodnoty odchylek od průměrné hodnoty. Jako tam se uvažují všechny možné hodnoty chyb, uvažují se zde všechny rozdíly mezi hodnotami, jichž může nabýti součet $s = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ a jeho aritmetickým průměrem rovným 0. A jako tam se počítají čtverce všech možných hodnot chyb a jejich aritmetický průměr je (přibližně) roven čtverci střední chyby, počítají se zde všechny možné hodnoty čtverce

$$(V_1 + V_2 + \dots + V_n - 0)^2 = V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2 + \sum_{i,k=1}^n V_i V_k = s^2. \quad (1)$$

Odmocnina aritmetického průměru hodnot (1) je pak střední odchylka součtu s od jeho průměru 0.

Protože aritmetický průměr součtu $\sum V_i V_k$ se rovná 0 (plyne jako v I, odst. 4) a aritmetické průměry hodnot V_i^2 jsou rovny 1, bude aritmetický průměr výrazů $(V_1 + V_2 + \dots + V_n - 0)^2$ roven n . Je tedy \sqrt{n} střední odchylka součtu s od jeho průměru 0.

Je-li absolutní hodnota součtu s větší než \sqrt{n} , předpokládá se, že působí nějaké systematické vlivy a že tedy chyby nebo odchylky nejsou nahodilé.

b) Změny znamének v řadě chyb nebo odchylek.

Jestliže uspořádáme vyšetřované chyby nebo odchylky podle nějaké proměnné t (na př. podle času, teploty atd.), jež nabývala při různých měřeních různých hodnot, a o níž tušíme, že měla systematický vliv na výsledky měření, a ukáže-li se, že pro první polovinu všech měření takto uspořádaných mají odchylky znaménka kladná a pro druhou záporná, soudíme, že odchylky nemají vlastnosti nahodilých chyb.

K obecnému kriteriu pro změny znamének v řadách nahodilých chyb nebo odchylek se dojde takto:

Označme počet sledů v řadě znamének V_1, V_2, \dots, V_n písmenem f a počet změn písmenem w . Pak jest $f - w =$

$= V_1 V_2 + V_2 V_3 + V_3 V_4 + \dots + V_{n-1} V_n$, neboť $V_i V_{i+1}$ je $+1$ pro sled a -1 pro změnu.

Pro nekonečně mnoho případů, uvažovaných v odst. 1a, je průměrná hodnota všech $f - w$ rovna 0, protože pro každý součin $V_i V_{i+1}$ na každé dvě kladné hodnoty $(+1) \cdot (+1)$, $(-1) \cdot (-1)$ připadají dvě záporné hodnoty $(+1) \cdot (-1)$, $(-1) \cdot (+1)$.

Tedy: Průměrně je rozdíl sledů a změn v řadě nahodilých chyb nebo odchylek roven 0.

Aby vypočetl, jaká je střední odchylka rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0, uvažuje Helmert zase o čtverci rozdílu

$$\begin{aligned} & (V_1 V_2 + V_2 V_3 + \dots + V_{n-1} V_n - 0)^2 = \\ & = V_1^2 V_2^2 + V_2^2 V_3^2 + \dots + V_{n-1}^2 V_n^2 + \sum_{i=1}^n V_{i-1} V_i^2 V_{i+1} + \\ & \quad + \sum_{i=1}^n V_{i-1} V_i V_{h-1} V_h, \end{aligned}$$

kde $h > i + 1$.

Aritmetický průměr těchto čtverců je $n - 1$ (viz 1a), tedy $\sqrt{n - 1}$ lze považovati za střední odchylku rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0.

Je-li některá chyba nebo odchylka rovna 0, možno při výpočtu součtu s a rozdílu $f - w$ klásti příslušné znaménko jednou jako kladné, po druhé pak záporné a vzítí střed. Ke stejnému výsledku však dojdeme, když ve vzorcích

$$\begin{aligned} s & = V_1 + V_2 + \dots + V_n, \\ f - w & = V_1 V_2 + V_2 V_3 + \dots + V_{n-1} V_n \end{aligned}$$

klademe příslušné V_i rovné 0.

Na střední odchylky \sqrt{n} resp. $\sqrt{n - 1}$ nemá existence nulových chyb nebo odchylek žádného vlivu, protože pravděpodobnost jejich existence je nekonečně malá a průměrné hodnoty čtverců V_i^2 , $V_i^2 V_{i+1}^2$ jsou stejně rovné 1, jako kdyby se nulové chyby nevyskytovaly.

2. Zkouška součtem skutečných chyb nebo aritmetickým průměrem skutečných chyb. Necht' je funkce četnosti pro chyby ε_i sudou funkcí, a jako v odst. 1a myslíme si opakována nekonečněkrát měření, z nichž vzešla každá chyba ε_i . Necháme-li každou chybu ε_i nabýti všech jejích nekonečně mnoho hodnot nezávisle na ostatních ε , utvoříme-li součet $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ pro všechny možné kombinace hodnot chyb a pak aritmetický průměr všech těchto součtů, bude průměr roven 0, neboť aritmetický průměr pro každé ε_i je roven 0.

Tedy průměrná hodnota součtu $[\varepsilon]$ je rovna 0, nebo průměrná hodnota aritmetického průměru $[\varepsilon] : n$ je rovna 0. Značíme-li písmenem m střední hodnotu chyby ε , t. j. veličinu danou přibližně rovnicí $m^2 = [\varepsilon^2] : n$ (srovn. I, (10')), je čtverec střední odchylky součtu $[\varepsilon]$ od jeho průměru 0 roven $n \cdot m^2$. Ukážeme to, určíme-li čtverec rozdílu $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n - 0)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 + \sum \varepsilon_i \varepsilon_k$ pro nekonečně mnoho hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ jako v odst. 1a, a hledáme-li aritmetický průměr všech čtverců takto vytvořených. Je roven nm^2 , předpokládáme-li, že všechna měření byla stejné váhy.

Střední odchylka součtu $[\varepsilon]$ od jeho průměru 0 je tedy rovna $\pm m\sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$ a střední odchylka výrazu $[\varepsilon] : n$ od jeho průměru 0 je podobně $\pm m : \sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} : n$. Je-li hodnota $[\varepsilon]$, $([\varepsilon] : n)$ vně mezí $\mp \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$, $(\mp \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} : n)$, předpokládá se, že v chybách ε jsou skryty nějaké systematické vlivy.

Pro odchylky musí býti vždy splněno $[v] = 0$, v případě odchylek tedy nemá smyslu zkouška vyložená v tomto odstavci.

3. Zkouška srovnáním součtu čtverců kladných chyb a součtu čtverců záporných chyb. Uvažujme o výrazu

$$V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \dots + V_n \varepsilon_n^2. \quad (2)$$

Je-li funkce četnosti pro chyby ε_i sudá funkce, probíhá-li ε_i

všech nekonečně mnoho hodnot uvažovaných v předcházejících odstavcích, je-li $V_i = \pm 1$ a je-li \pm znaménko chyby ε_i , bude součet všech hodnot $V_i \varepsilon_i^2$ při stálém i roven 0. Tedy průměrná hodnota výrazu (2), vypočtená ve stejném smyslu jako v předcházejících případech, bude rovna 0.

Čtverec střední odchylky součtu (2) od jeho průměru 0 bude roven nm'^4 , kde m' plyne přibližně ze vzorce

$$m'^4 = [\varepsilon^4] : n.$$

Tento výsledek se odvodí stejně jako v odstavci 2, uvažujeme-li o všech možných čtvercích

$$\begin{aligned} & (V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \dots + V_n \varepsilon_n^2 - 0)^2 = \\ & = V_1^2 \varepsilon_1^4 + V_2^2 \varepsilon_2^4 + \dots + V_n^2 \varepsilon_n^4 + \sum_{i,k=1}^n V_i V_k \varepsilon_i^2 \varepsilon_k^2. \end{aligned}$$

Tedy: Průměrná hodnota výrazu $V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \dots + V_n \varepsilon_n^2$ je rovna 0, nebo průměrná hodnota součtu čtverců kladných chyb se rovná průměrné hodnotě součtu čtverců záporných chyb. Střední odchylka výrazu (2) nebo rozdílu čtverců kladných a záporných chyb od průměru 0 je rovna $\pm m'^2 \sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon^4]}$. Je-li rozdíl součtu čtverců kladných a záporných chyb vně mezí $\mp \sqrt{[\varepsilon^4]}$, předpokládá se, že v chybách ε_i lze očekávat systematické vlivy.

4. Zkoušky E. Abbeho. a) Vlastní zkouška E. Abbeho. Jestliže systematické vlivy zatěžují kladné i záporné chyby přibližně stejně, bude výsledek vyšetřování podle odst. 2 a 3 negativní. Proto se doporučuje srovnávat dvě funkce chyb, z nichž v jedné jsou tušené systematické vlivy co možná potlačeny, kdežto ve druhé působí v plné míře.

E. Abbe doporučuje uspořádati chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ podle proměnné, jejíž systematický vliv tušíme, a utvořit součty

$$A = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2,$$

$$B = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_1)^2.$$

V součtu A se tušené systematické vlivy plně uplatňují, v B se uplatní obyčejně jen v posledním členu. Utvoříme ještě

výraz

$$C = A - \frac{1}{2}B = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n\varepsilon_1.$$

Jsou-li chyby ε nahodilé, bude průměrná hodnota výrazu C , vypočtená jako v předcházejících odstavcích, rovna 0. A čtverec střední odchylky výrazu $A - \frac{1}{2}B = C$ od jeho průměru 0 se vypočte zase s pomocí čtverce

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n\varepsilon_1 - 0)^2 = \\ & = \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2\varepsilon_1^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2^2\varepsilon_3 + \dots). \end{aligned}$$

Průměrná hodnota, vypočtená jako v dřívějších odstavcích, bude nm^4 , čili střední odchylka výrazu $A - \frac{1}{2}B = C$ od jeho průměru 0 jest $\pm m^2\sqrt{n}$.

b) Upravená zkouška E. Abbeho.

Na místě výrazů A, B, C , uvažuje Helmert výrazy A^*, B^*, C^* , kde

$$\begin{aligned} A^* &= (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_n^2), \\ B^* &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2, \\ C^* &= A^* - \frac{1}{2}B^* = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Zase se dá ukázati, že průměrná hodnota výrazu C^* , vypočtená jako v předcházejících odstavcích, je rovna 0 a odchylka výrazu $A^* - \frac{1}{2}B^* = C^*$ od jeho průměru 0 jest $\pm m^2\sqrt{n-1}$.

Vybočují-li čísla $A - \frac{1}{2}B$ a $A^* - \frac{1}{2}B^*$ z mezí $\mp m^2\sqrt{n}$ a $\mp m^2\sqrt{n-1}$, předpokládá se zase, že existují systematické vlivy, zatěžující chyby ε_i .

5. Jak zjistíme, že se odchylky od aritmetického průměru řídí normálním zákonem četnosti? Z odstavce (VII, 2b, α) plyne, že se odchylky naměřených hodnot od jejich aritmetického průměru řídí normálním zákonem četnosti, jestliže se jím řídí skutečné chyby jednotlivých měření.

Zkoušku, že se odchylky řídí normálním zákonem četnosti, provádíme takto: Nejprve se přesvědčíme, že počet každého druhu znamének je přibližně stejný (v mezích uvedených

v odstavci 1). Pak zjistíme, kolik odchylek má absolutní hodnotu v mezích

0—0,1; 0,1—0,2; ...; 0,9—1,0,
 nebo 0—0,2; 0,2—0,4; ...; 1,8—2,0,
 nebo 0—0,4; 0,4—0,8; ...; 3,6—4,0,

podle toho, jsou-li odchylky přibližně v mezích od $-1,0$ do $+1,0$, nebo od $-2,0$ do $+2,0$, nebo od $-4,0$ do $+4,0$.

Čísla, která takto zjistíme z pozorování, srovnáme s příslušnými čísly teoretickými, vypočtenými za předpokladu, že se odchylky řídí normálním zákonem a že při tom $h = 1 : m_0 \sqrt{2}$, kde m_0 je střední chyba pro jednotku váhy při uvažované řadě měření [viz II, (15')]. V odst. VII, 2b, α) je dokázáno: Je-li normální zákon, kterým se řídí skutečné chyby $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}$, je normální zákon, kterým se řídí odchylky v od aritmetického průměru

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} e^{-h^2 \frac{n}{n-1} v^2},$$

kde n je počet měření. Pak pravděpodobnost, že odchylka je mezi $-x$ a $+x$, je rovna

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \int_0^x e^{-h^2 \frac{n}{n-1} v^2} dv.$$

Zavedeme-li proměnnou

$$y = h \sqrt{\frac{n}{n-1}} v,$$

přejde předcházející výraz v tento tvar:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h \sqrt{\frac{n}{n-1}} x} e^{-v^2} dy,$$

což podle definice funkce Φ [viz I, (8)] je rovno

$$\Phi\left(xh \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right).$$

Theoretický počet odchylek, které mají absolutní hodnotu v mezích od 0 do 0,1 (0,2, 0,4), jest tedy

$$\Phi\left(0,1 \cdot h \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) = n\Phi\left(\frac{0,1}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right),$$

$$\left[n\Phi\left(\frac{0,2}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right), n\Phi\left(\frac{0,4}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \right].$$

Dále theoretický počet odchylek, které mají absolutní hodnotu v mezích od 0,1 do 0,2 od 0,2 do 0,4 nebo od 0,4 do 0,8 jest

$$n\left\{ \Phi\left(\frac{0,2}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0,1}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \right\},$$

resp.

$$n\left\{ \Phi\left(\frac{0,4}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0,2}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \right\},$$

resp.

$$n\left\{ \Phi\left(\frac{0,8}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0,4}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \right\}.$$

A podobně dále.

Protože n i m_0 známe, vypočteme snadno potřebné hodnoty argumentu funkce Φ , příslušné hodnoty funkce Φ interpolujeme z tabulky v odstavci I, (8) a hledaný theoretický počet odchylek plyne již podle předchozího snadno.

(Srovn. př. 3 v odst. 7.)

6. Jak zjistíme, že se chyby v uzávěru trojúhelníků řídí normálním zákonem četnosti? V odstavci (VII, 2b, β) je dokázáno: Chyby v uzávěru trojúhelníků se řídí normálním zákonem četnosti, jestliže se jím řídí skutečné chyby jednotlivých úhlů.

Zkoušku, že se chyby v uzávěru řídí normálním zákonem četnosti provádíme podobně jako v odstavci 5. Jen musíme nyní uvážiti, že podle odstavce (VII, 2b, β) je normální zákon četnosti, kterým se řídí chyby v uzávěru,

$$\frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2}.$$

Pak pravděpodobnost, že chyba v uzávěru je mezi $-x$ a $+x$, je rovna

$$\frac{2h}{\sqrt{3\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Zavedeme-li proměnnou $y = \frac{h}{\sqrt{3}}\varepsilon$, je předcházející výraz roven

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}}x} e^{-y^2} dy = \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}x\right) = \Phi\left(\frac{x}{m_0\sqrt{6}}\right).$$

Známe-li tedy na př., kolik chyb v uzávěru má absolutní hodnotu v mezích 0—0,2; 0,2—0,4; atd., vypočteme hodnoty argumentu $\frac{0,2}{m_0\sqrt{6}}$ a její dvojnásobek, trojnásobek atd., pak příslušné hodnoty Φ a z nich teoretický počet chyb v uzávěru, jejichž absolutní hodnota je v uvedených mezích

$$\left[n\Phi\left(\frac{0,2}{m_0\sqrt{6}}\right), n\left\{\Phi\left(\frac{0,4}{m_0\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\frac{0,2}{m_0\sqrt{6}}\right)\right\}, \text{ atd.} \right].$$

7. Příklady. 1. Vyšetřiti, mají-li odchylky od aritmetického středu v příkladě 1 z (II, 6) vlastnosti nahodilých chyb.

Odchylky, v jednotkách 10^{-8} sec, jsou rovny po řadě

$$+24, +7, +64, +35, -53, -26, +5, -76, +41, \\ +93, -64, -55.$$

Odtud plyne $s = + 2$, $\sqrt{n} = \pm 3,5$. Součet znamének se rovná $+2$, střední odchylka součtu s od jeho průměru 0 je $\pm 3,5$ (srovn. odst. 1a).

Dále je $f - w = + 1$, $\sqrt{n-1} = \pm 3,3$. Rozdíl sledů a změn je roven $+1$ a střední odchylka rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0 je $\pm 3,3$ (srovn. odst. 1b).

Součet čtverců kladných odchylek je $+ 16\,301 \cdot 10^{-16}$, součet čtverců záporných odchylek $16\,382 \cdot 10^{-16}$. Rozdíl je $- 81 \cdot 10^{-16}$. Součet čtvrtých mocnin odchylek je pak $1,64 \cdot 10^{-24}$, tedy střední odchylka rozdílu mezi součtem čtverců kladných a součtem záporných odchylek od průměru 0 bude (podle odst. 3)

$$\pm \sqrt{1,64} \cdot 10^{-12} = \pm 1,3 \cdot 10^{-12}.$$

Zkouška E. Abbeho: Uvažujeme uspořádání odchylek podle času ($\varepsilon_1 = + 24 \cdot 10^{-8}$, ..., $\varepsilon_{12} = - 55 \cdot 10^{-8}$). Pak $A = 32\,683 \cdot 10^{-16}$, $B = 67\,738 \cdot 10^{-16}$, tedy $A - \frac{1}{2}B = - 1\,186 \cdot 10^{-16}$. Čtverec

$$m^2 = \frac{32\,683}{12} \cdot 10^{-16} \quad \text{a} \quad \pm m^2 \sqrt{n} = \pm 9\,436 \cdot 10^{-16}.$$

Všechny tyto zkoušky ukazují tedy, že uvažovaná řada odchylek má vlastnosti nahodilých chyb.

2. Vyšetřiti, mají-li odchylky od aritmetického středu v příkladě 3 z (II, 6) vlastnosti nahodilých chyb. (Mají.)

3. Z Besselových měření rektascense Polárky byla střední chyba pro jednotku váhy $m_0 = \pm 1,3093$ sec a počet odchylek od aritmetického průměru, jejichž absolutní hodnota byla v mezích 0—0,4 sec; 0,4—0,8 sec atd. až 3,6 sec a výše, byl po řadě 25, 22, 19, 11, 9, 8, 2, 3, 1, 0. Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly, vypočtenými za předpokladu, že se odchylky řídí normálním zákonem.*)

Podle odst. 5 nutno počítati hodnotu argumentu

*) E. Czuber: l. c. str. 192—193.

$$\frac{0,4}{m_0\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{4}{1,3093\sqrt{198}} = 0,21711$$

a její dvojnásobek až desateronásobek. Pro tyto hodnoty argumentu se vypočtou příslušné hodnoty funkce Φ : 0,2410; 0,4607; 0,6429; 0,7806; 0,8753; 0,9346; 0,9683; 0,9859; 0,9942; 0,9978. Odtud plynou hledaná theoretická čísla: 24,1; 22,0; 18,2; 13,8; 9,5; 5,9; 3,3; 1,8; 0,8; 0,4. Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —0,9; —0,0; —0,8; +2,8; —0,5; —2,1; +1,3; —1,2; —0,2; +0,4.

4. V 61 trojúhelnících jihofinské základní triangulace bylo v uzávěrech 31 kladných chyb, 29 záporných a 1 chyba rovna 0. Střední hodnota chyby v uzávěru byla $\pm 0,611''$. Počet chyb s absolutní hodnotou v mezích 0—0,2"; 0,2"—0,4"; 0,4" až 0,6"; 0,6"—0,8"; 0,8"—1,0"; 1,0"—1,2"; 1,2"—1,4", byl po řadě: 17; 10; 8; 12,5; 8,5; 4; 1. (Při tom byla na př. chyba 0,80" čítána jednou polovinou do skupiny v mezích 0,6" až 0,8" a jednou polovinou do skupiny v mezích 0,8"—1,0".) Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly, vypočtenými za předpokladu, že se chyby v uzávěru řídí normálním zákonem četnosti.*)

V (VII, 2b, β) je ukázáno, že vztah mezi střední hodnotou M chyby v uzávěru a střední chybou m_0 v jednom měřeném úhlu je

$$m_0 = \frac{M}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } m_0 = \pm \frac{0,611''}{\sqrt{3}}. \text{ Pak (viz. odst. 6)}$$

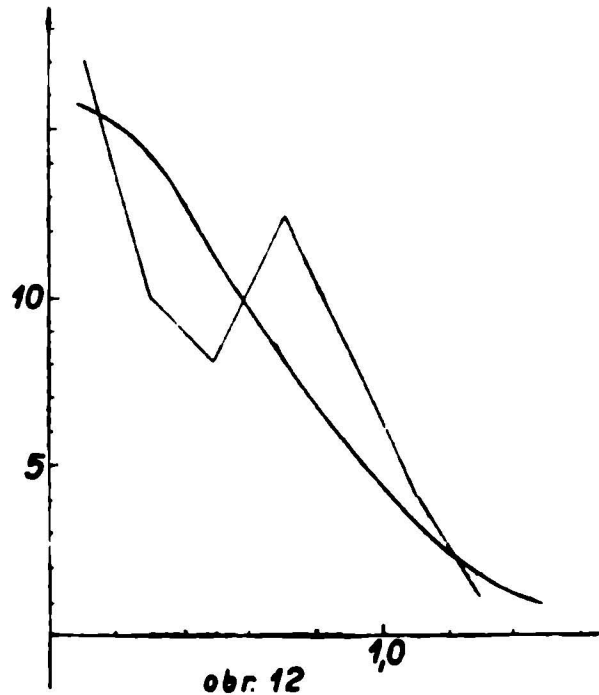
$$\frac{x}{m_0\sqrt{6}} = \frac{x}{0,611''\sqrt{2}}. \text{ Pro } x = 0,2'' \text{ je } \frac{x}{m_0\sqrt{6}} = 0,2315.$$

Pro tuto hodnotu a její dvojnásobek, trojnásobek atd. byly z tabulky funkce Φ vyhledány příslušné funkční hodnoty (0,2567, 0,4904 atd.). Z nich pak plyne, že theoretický počet

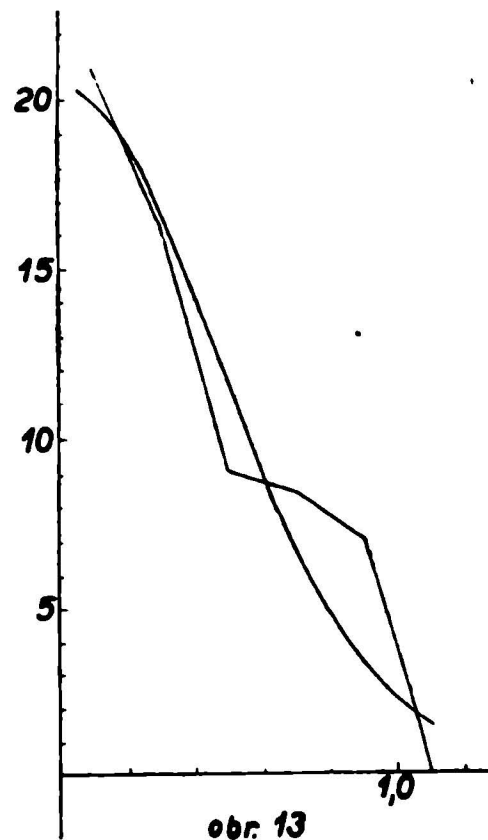
*) T. J. Kukkamäki: Verbesserung der horizontalen Winkelmessungen wegen der Seitenrefraktion. Veröff. des fin. Geod. Inst. No. 28, Helsinki 1939, str. 14.

odchylek, jejichž absolutní hodnota je v mezích od 0 do $0,2''$, je roven $61 \cdot 0,2567 = 15,7$. Počet odchylek, jejichž absolutní hodnota je v mezích od $0,2''$ do $0,4''$ jest $61 (0,4904 - 0,2567) = 14,3$. Dále plynou čísla 11,2; 8,3; 5,4; 3,2; 1,7. Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: $-1,3$; $+4,3$; $+3,2$; $-4,2$; $-3,1$; $-0,8$; $+0,7$ (viz obr. 12).

Na obr. 12 jsou theoretická čísla i čísla plynoucí z měření vyobrazena tak, že chyby v uzávěru jsou nanесeny na osu úseček ($0,2'' \triangleq 5 \text{ mm}$) a počet chyb v uzávěru na osu pořadnic (10 chyb v uzávěru $\triangleq 25 \text{ mm}$).



5. V téže síti byly směry opraveny vzhledem na příčnou refrakci. Kladných chyb v uzávěrech bylo zase 31, záporných 29 a 1 byla rovna 0. Střední hodnota chyby v uzávěru klesla na $\pm 0,470''$. Počet chyb s absolutní hodnotou v mezích 0 — $0,2''$ až $1,0''$ — $1,2''$ byl 21; 16,5; 9; 8,5; 7; 0. Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly.*) (Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: $-0,9$; $+0,3$; $+2,8$; $-1,6$; $-3,6$; $+1,4$; viz obr. 13.)



8. Systematické vlivy zatěžující měření. Neřídí-li se odchylky nebo chyby normálním zákonem četnosti,

*) T. J. Kukkamäki, l. c. str. 14.

nebo ukazují-li kriteria uvedená v odst. 1—4 na nějaký systematický vliv, hledá se, jaký by to mohl být vliv.

Na příklad: Při určování, jak závisí doba kyvu kyvadel na tlaku vzduchu (p) a na teplotě kyvadel (t), pokud se závislost na tlaku a teplotě vyjadřovala vzorcem $a_1p + a_2t$, nebo $\bar{a}_1d + a_2t$, kde d je hustota vzduchu, ukazovala kriteria pro nahodilost chyb na existenci systematických vlivů. Teprve když se závislost na p a na t vyjádřila vzorcem

$$a_1p + a_2\sqrt{p} + a_3t + a_4pt + a_5t^2,$$

byla zbývající systematická chyba odstraněna.*)

Jiný příklad: Rozdíly patrné v př. 4, obr. 12, mezi theoretickým počtem chyb v uzávěru a počtem, který plynul z měření, ukazovaly rovněž na existenci nějakých systematických vlivů. Když byly jednotlivé směry opraveny vzhledem k příčné refrakci, zlepšil se souhlas mezi theoretickým počtem chyb v uzávěru a počtem plynoucím z měření (př. 5, obr. 13). Jak patrně z těchto dvou příkladů, vyšetřování odchylek nebo chyb vede k hledání systematických vlivů, zatěžujících měření. Pokud odchylky nebo chyby ukazují nějaký systematický vliv, nesmíme být s výsledky měření a vyrovnání spokojeni.

Uvedu ještě podle Hayforda**) tři pokyny, jak objeviti systematické chyby.

α) Rozdělíme měření na několik skupin (na př. večerní a ranní měření azimutu) a určíme výsledky (A_k) a střední chyby (m_k) výsledků z každé skupiny měření zvlášť. Ukáže-li se, že rozdíly mezi výsledky jednotlivých skupin ($a_k - a_l$) jsou větší, než by měly být podle příslušných středních chyb ($\sqrt{m_k^2 + m_l^2}$), soudíme, že měření v jednotlivých skupinách jsou zatížena nějakou systematickou chybou.

β) Užíváme-li při měření nějakého přístroje, jehož práce se může v jistých mezích za měření měniti, je nutno přímo vy-

*) Jahresbericht des Direktors des Geod. Inst. Potsdam 1939, str. 16.

**) Wright-Hayford, l. c. str. 277—278.

šetřiti, jaký vliv mají tyto změny na výsledek, po případě docíliti, aby přístroj pracoval po celé měření za podmínek pokud možno stejných. (Tak je na př. nutno kontrolovati opoždění, zaviněné elektromagnetickým relais při měření tíže.)

γ) Systematické chyby mohou býti konečně zjištěny, užijeme-li k měření různých přístrojů a různých method. (Na př. určíme zeměpisnou šířku některým způsobem užívajícím universálního stroje a pak Nušl-Fričovým cirkumzenitálem.)