I.

ÚVOD.

1. Jaké druhy chyb zatěžují měřické výsledky? Všechna měření jsou zatížena chybami. Naučíme se je rozlišovati na jednoduchém příkladě měření vodorovných vzdáleností invarovými dráty.

Dráty u nás obvyklé mají délku přibližně 24 m. Na koncích jsou k nim připojeny stupnice asi 8 cm dlouhé, dělené po milimetrech. Měřená délka D se rozdělí na úseky dlouhé přibližně po 24 m. V koncových bodech úseků se postaví třínohé stojany, nesoucí vodorovnou rysku, jež se urovná kolmo ke svislé rovině r, vedené měřenou délkou. Dráty se napínají dvěma závažími po 5 kg a urovnávají se do roviny r tak, že každá stupnice jest proti zmíněné rysce (obr. 1).

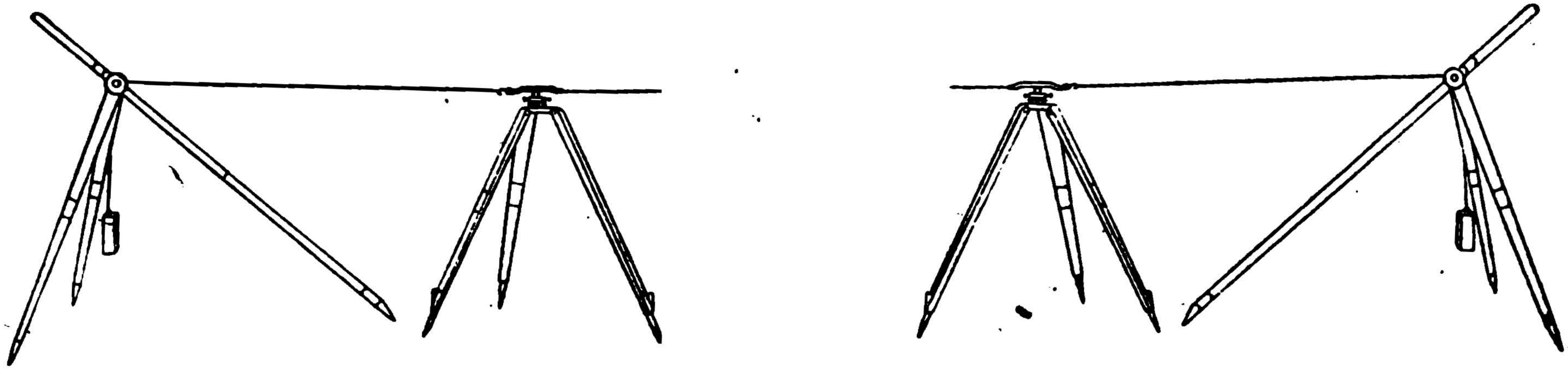
Při měření odhadujeme polohu rysek vůči děleným stupnicím (obr. 2).

Označíme vodorovnou vzdálenost mezi počátky obou stupnic písmenem L a čtení u rysky na počáteční (koncové) stupnici písmenem l_p (l_z). Pak bude vodorovná vzdálenost d mezi oběma uvažovanými ryskami rovna

$$d = L + l_z - l_p. \tag{1}$$

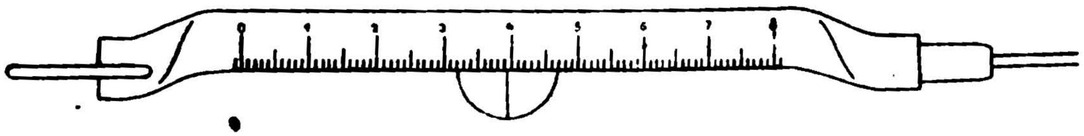
Kromě čtení l_z, l_p musíme určiti ještě teplotu drátu, protože jak délka L, tak délky na stupnicích závisí na teplotě. Dále nutno změřiti výškový rozdíl mezi oběma ryskami a opraviti délku d vzhledem k tomuto rozdílu.

A nyní uvažujme o chybách, které mohou zatěžovati délky d, počítané podle vzorce (1). Předně se mluvívá o h r u b ý c h chybách. Odhadujeme-li pozorně polohu rysky vůči milimetrovým stupnicím, je chyba, které se při tom dopustíme, jistě menší než $\frac{1}{5}$ mm. Dopustíme-li se v tomto případě chyby rovné 1 mm nebo 1 cm, je to zaviněno nezkušeností nebo nepozorností. Takové chybě říkáme hrubá chyba. Hrubé chyby



obr. 1

Stojany pro napínání invarových drátů.*)



obr. 2

Ryska stojanu a dělená stupnice.

*) Seznam všech obrazců je na str. 180.

musíme včas odkrýti nejčastěji tím, že měříme několikrát a měření zatížená hrubou chybou škrtneme.

Délky počítané podle vzorce (1) budou jistě zatíženy chybami, kterým se říká pravidelné nebo soustavné nebo systematické. Délka L, určená srovnáním drátu s normálním měřítkem, je zatížená chybou ε_1 z tohoto srovnání, t. zv. chybou z etalonování. Správná délka je pak $L + \varepsilon_1$. Chyba ε_1 je stálá, protože každý úsek jí bude zatížen stejně.

Jiné stálé chyby, které mohou zatěžovati délky (1) jsou: Chyba vyvolaná změnou napínací síly (na př. není-li některé závaží přesně 5 kg). — Nebo chyba vyvolaná tím, že zrychlení tíže v místě, kde měříme, je jiné než v místě, kde byly dráty etalonovány — nevezmeme-li změnu tíže v úvahu.

Na přechodu mezi chybami stálými a proměnlivými můžeme uvésti t. zv. osobní chybu pozorovatele. Pozorovatelé odhadují polohu rysky vůči dělení nepřesně. Příslušná chyba má dvě části. Jedna z nich bývá u pečlivého a zkušeného pozorovatele po delší dobu stálá. Právě této části se říká osobní chyba pozorovatele.

Přejdeme nyní k proměnlivým chybám systematickým. Označíme-li koeficient roztažnosti invarového drátu písmenem α a určíme-li teplotu drátu s chybou ε_2, bude její vliv na hodnoty vypočtené podle vzorce (1) roven přibližně $24\alpha\varepsilon_2$ m. Protože ε_2 se může od úseku k úseku měniti, čítáme tuto chybu k proměnlivým chybám systematickým.

Jinou takovou chybou je chyba z vybočení drátu z roviny r. Svírá-li rovina, v níž je drát napjat, s rovinou r úhel β, je správná vodorovná vzdálenost rysek, promítnutých do roviny r, rovna $d \cos \beta$, tedy chyba $-d + d \cos \beta = d (\cos \beta - 1)$. Tato chyba nabývá různých hodnot, podle toho, jaký je úhel β. Při tom zůstává stále záporná.

Jiná proměnlivá systematická chyba vznikne, změní-li se váha délkové jednotky drátu, na př. orosením, přebytečnou vaselinou, znečištěním a pod. — Nebo změní-li se napínací síla tím, že se změní tření napínacího provazce. — Nebo chyba, která pochází z toho, že rysky na stupnicích nebyly správně vyneseny. — Ještě jinou takovou chybu vyvolá chyba ε_3 v koeficientu roztažnosti. Její vliv na délku d je přibližně rovný $24\varepsilon_3 t$ m, kde t je teplota drátu. — Nebo konečně t. zv. chyba theorie, která vzniká tím, že vzorec užitý k výpočtu délky invarového pásma není přesný.

Při každém měření se musíme snažit poznati příčiny všech systematických chyb, které by mohly snížiti přesnost výsledku pod žádanou mez, a musíme snížit jejich vliv tak, aby ani všechny dohromady nerušily žádanou přesnost výsledku. Děje se to všelijak. Vynález invaru znamenal podstatné snížení vlivu chyb, pocházejících z nesprávného určení teploty drátu ($24\alpha\varepsilon_2$ m). Koeficient roztažnosti platiny je totiž $9{,}0 \cdot 10^{-6}$, invaru až $1{,}0 \cdot 10^{-7}$. — Zvolíme-li dva dráty, z nichž jeden má kladný koeficient roztažnosti a druhý záporný a přibližně stejně velký, bude v aritmetickém průměru z obou měření vliv chyby ε_2 zase snížen, protože je roven $24\varepsilon_2 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ m.

Nemůžeme-li vliv systematických chyb takto nebo jinak snížit, musíme jej určiti z pomocných pozorování a měřické výsledky podle toho opravíme. Na př. určíme novým, přesnějším měřením koeficient roztažnosti, t. j. jeho chybu ε_3 nebo aspoň její podstatnou část a přičteme k měřickým výsledkům chybu $24\varepsilon_3 t$ m. — Nebo zjistíme zvážením, oč se liší napínací závaží od 5 kg, a vypočteme, jaký vliv to má na délku napjatého drátu, a podle toho opravíme měření.

Konečně se mluvívá v úvahách o t. zv. chybách nahodilých. Budeme tak jmenovati chyby, které mají tyto vlastnosti:

a) Stejně velké kladné a záporné chyby se vyskytují stejně často, tedy kladná a stejně velká záporná chyba jsou stejně pravděpodobné.

b) Chyby s menší absolutní hodnotou se vyskytují častěji než chyby s větší absolutní hodnotou, je tedy pravděpodobnější, že se dopustíme malé chyby než velké.

c) Chyby, jejichž absolutní hodnota je blízká nule, se vyskytují nejčastěji, čili je nejpravděpodobnější, že naměříme hodnotu bez chyby.

V případě měření délek invarovými dráty považuje se za nahodilou chybu na př. část chyby v odhadu polohy rysky vůči dělení, která se zmíněnou již osobní chybou tvoří celou chybu v odhadu polohy rysky. — Stejně se považuje za nahodilou chybu chyba v určení výškového rozdílu mezi ryskami.

Jak patrno z uvedeného příkladu měření délek, je každý výsledek měření zatížen řadou chyb. Naučili jsme se, co jsou to hrubé chyby a naučili jsme se rozlišovati chyby systematické (stálé a proměnlivé) od chyb nahodilých. Při všech dalších úvahách budeme předpokládati, že výsledky měření jsou zatíženy jen nahodilými chybami. To tedy znamená: a) Pozorným opakováním měření jsme se přesvědčili, že výsledky měření nejsou zatíženy hrubými chybami. b) V pečlivém rozboru možností chyb jsme uvážili všechny myslitelné prameny systematických chyb a jejich vliv na výsledky jsme snížili na př. pod desetinu vlivu chyb nahodilých (srovn. kap. VI, odst. 1).

Abychom některé systematické chyby nevynechali, je dobře uvažovati je po skupinách, podle příčin, které je vyvolaly. První, obyčejně početnou skupinu tvoří chyby strojové (na př. chyby vzniklé nesprávným vynesením rysek na stupnicích) a chyby teorie, dále jsou chyby z nesprávného ustavení měřických zařízení (na př. chyba z vybočení drátu z roviny r), pak jsou chyby vyvolané vnějšími vlivy (na př. chyba z nesprávného určení teploty drátu) a konečně chyby zaviněné pozorovatelem (na př. osobní i nahodilá chyba v odečtení).

2. Četnost chyb podle velikosti. Funkce a zákon četnosti. Křivka četnosti. Souvislost s pravděpodobností chyb. Předpokládejme, že jsme n-krát změřili určitou veličinu (na př. délku nebo úhel), jejíž správná hodnota je a, a že výsledky měření a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), jsou prosté hrubých a systematických chyb. Hodnoty ε_i, které musíme k výsledkům měření algebraicky přičísti, abychom došli k správné hodnotě a, se jmenují skutečné chyby měřických výsledků. Tedy:

$$a_i + \varepsilon_i = a, \quad \varepsilon_i = a - a_i. \tag{2}$$

Uvažujme skupinu chyb, které jsou mezi ε a $\varepsilon + d\varepsilon$, kde interval $d\varepsilon$ je dostatečně malý. Předpokládáme, že počet chyb v této skupině je přibližně úměrný $d\varepsilon$. To jest, zvětší-li se několikrát interval $d\varepsilon$, zvětší se přibližně stejněkrát i počet chyb ve skupině. Podobně předpokládáme, že počet chyb v každé skupině je také přibližně úměrný počtu n všech chyb. To jest, zvětší-li se několikrát počet všech měření, zvětší se přibližně stejněkrát i počet chyb v každé skupině.

Za uvedených předpokladů můžeme tedy psáti pro počet členů v jednotlivých skupinách $yn\, d\varepsilon$, kde y je závislé na ε. Klademe $y = \varphi(\varepsilon)$, tedy počet chyb v intervalu od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$ jest $n\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$. Známe-li funkci $\varphi(\varepsilon)$, známe rozdělení chyb podle jejich velikosti čili známe četnost chyb podle velikosti. Funkci $\varphi(\varepsilon)$ se říká funkce četnosti.

Nanášíme-li v nějakém měřítku na osu úseček velikost chyb ε, kolmo k ní příslušnou hodnotu $y = \varphi(\varepsilon)$ a spojíme-li koncové body pořadnic, vznikne křivka $y = \varphi(\varepsilon)$, které se říká křivka četnosti.

Podle toho, co bylo řečeno o vlastnostech nahodilých chyb, platí pro ně:

$$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon), \tag{3}$$

pro $|\varepsilon_2| > |\varepsilon_1|$ jest

$$\varphi(|\varepsilon_2|) < \varphi(|\varepsilon_1|); \tag{3'}$$

$\varphi(\varepsilon)$ nabývá maxima pro $\varepsilon = 0$ a minima pro největší možnou chybu $\varepsilon = \pm E$. Pro $|\varepsilon| > + E$ jest $\varphi(\varepsilon) = 0$.

Ze vzorce (3) je patrno, že pro nahodilé chyby je křivka četnosti souměrná vzhledem k ose y-ové; ze vzorce (3') a z okolnosti, že $\varphi(0)$ je maximální, vyplývá, že pro nahodilé chyby má křivka četnosti tvar zvonovitý.

Pravděpodobnost, že nahodile vybraná chyba z množství n chyb jest mezi ε a $\varepsilon + d\varepsilon$, je rovna $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = y\, d\varepsilon$; je tedy rovna elementu plochy omezené křivkou četnosti a osou x. Pravděpodobnost, že chyba je v mezích od ε_1 do ε_2, jest rovna

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{4}$$

Z podmínky, že pro $|\varepsilon| > E$ jest $\varphi(\varepsilon) = 0$, plyne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-E}^{+E} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1. \tag{5}$$

3. Jak se posuzuje přesnost měření. Střední chyba a průměrná chyba.*) Uvažujme o dvou řadách měření téže veličiny a označme chyby pro první řadu

$$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_{n_1}, \tag{6}$$

a pro druhou řadu

$$\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \ldots, \varepsilon''_{n_2}. \tag{6'}$$

Předpokládejme, že příslušné funkce četnosti $\varphi_1(\varepsilon)$ pro řadu (6) a $\varphi_2(\varepsilon)$ pro řadu (6′) jsou sudé funkce, t. j. splňují podmínku (3), a že obě křivky četnosti se protínají jen v jednom bodě na každé straně osy y-ové (obr. 3). Příslušnou úsečku označme $\pm\, \bar{\varepsilon}$. Je patrno, že počet chyb $\left\{\begin{matrix}\text{menších}\\ \text{větších}\end{matrix}\right.$ co do absolutní hodnoty než $\bar{\varepsilon}$, je více v řadě $\left\{\begin{matrix}(6)\\ (6')\end{matrix}\right.$. Proto považujeme první řadu měření za přesnější.

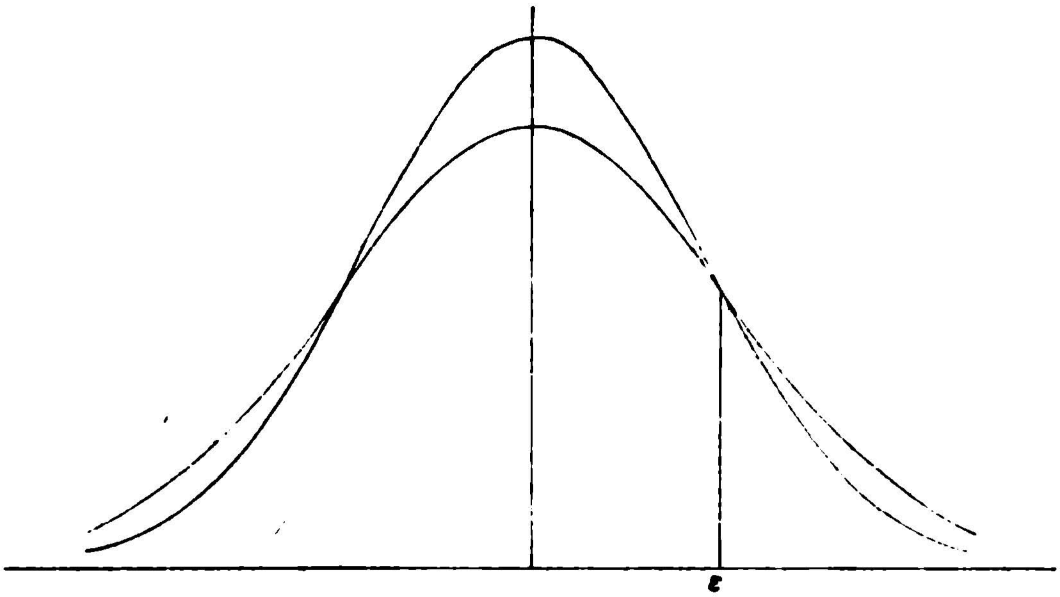
Abychom nemusili sestrojovati křivky četnosti a přece mohli rozhodnouti, která z řad měření je přesnější, uvažujeme takto: Z obr. 3 plyne, že pro $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$ jest $\varphi_1(\varepsilon) > \varphi_2(\varepsilon)$,

*) F. R. Helmert, l. c. str. 18—20.

pro $|\varepsilon| > \acute{\varepsilon}$ jest $\varphi_1(\varepsilon) < \varphi_2(\varepsilon)$. Pro jakékoli ε bude

$$[\varphi_1(\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)](\acute{\varepsilon}^q - |\varepsilon|^q) \geqq 0, \tag{7}$$

kde $q > 0$. Pro $|\varepsilon| < \acute{\varepsilon}$ jsou totiž oba faktory $[\varphi_1(\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)]$ i $(\acute{\varepsilon}^q - |\varepsilon|^q)$ kladné, pro $|\varepsilon| > \acute{\varepsilon}$ jsou oba faktory záporné a pro $|\varepsilon| = \acute{\varepsilon}$ jsou oba faktory rovné 0.



obr. 3

Násobíme-li levou stranu vzorce (7) $d\varepsilon$ a integrujeme-li v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_1(\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)] \cdot (\acute{\varepsilon}^q - |\varepsilon|^q)\, d\varepsilon > 0$$

čili

$$\acute{\varepsilon}^q \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\varepsilon)\, d\varepsilon\right] - \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_2(\varepsilon)\, d\varepsilon > 0.$$

Podle vzorce (5) vymizí člen s $\acute{\varepsilon}^q$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon < \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_2(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{8}$$

Pro přesnější řadu měření je tedy výraz

$$S_q = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{9}$$

menší. Proto můžeme přesnost řady měření posuzovati podle toho, jaké hodnoty nabývá veličina S_q. Je-li S_q pro nějakou řadu měření menší než pro jinou řadu, je první řada měření přesnější.

Jaký je význam veličiny S_q? Protože $n\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ je počet chyb v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, je součin $|\,\varepsilon\,|^q n\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ roven součtu absolutních hodnot q-tých mocnin chyb, jež jsou v mezích ε a $\varepsilon + d\varepsilon$. Pak součin nS_q je roven součtu absolutních hodnot q-tých mocnin všech chyb a S_q je aritmetický průměr absolutních hodnot q-tých mocnin všech chyb, tedy na př. pro řadu n chyb je

$$S_q = [\,|\,\varepsilon\,|^q] : n, \tag{9'}$$

kde lomená závorka [ ] značí součet pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nejčastěji se volí $q = 1$ a $q = 2$. Pro $q = 1$ jest

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\,\varepsilon\,|\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = [\,|\,\varepsilon\,|\,] : n = s, \tag{10}$$

kde s je t. zv. průměrná chyba nebo průměrná hodnota chyby ε.

Pro $q = 2$ jest

$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = [\varepsilon^2] : n = m^2, \tag{10'}$$

kde m je t. zv. střední chyba nebo střední hodnota chyby ε.

Je-li tedy průměrná nebo střední chyba pro nějakou řadu měření menší, přisuzujeme této řadě větší přesnost.

Opakujeme: úvaha v tomto odstavci předpokládá, že uvažované funkce četnosti jsou sudé funkce a že se křivky četnosti protínají jen v jednom bodě.

4. Střední chyba funkce f několika veličin $l_1, l_2, l_3, \ldots$, určených na sobě nezávisle. a) Nechť je $f = \alpha_1 l_1$, kde l_1 je měřená veličina a α_1 konstanta. Je-li skutečná chyba veličiny l_1 rovna ε_1, jest skutečná chyba veličiny f rovna $\varepsilon_f = \alpha_1 \varepsilon_1$. Podle definice (10') je tedy střední chyba m_f dána vzorcem

$$m_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1^2 \varepsilon_1^2 \, \varphi(\varepsilon_1) \, d\varepsilon_1.$$

A je-li m_1 střední hodnota chyby ε_1, t. j. je-li

$$m_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1^2 \, \varphi(\varepsilon_1) \, d\varepsilon_1,$$

je patrno, že

$$m_f^2 = \alpha_1^2 m_1^2. \tag{11}$$

K stejnému výsledku dojdeme, užijeme-li vzorce $m^2 = [\varepsilon^2] : n$. Mysleme si, že opakujeme měření veličiny l_1 nekonečněkrát a že vypočteme vždycky skutečnou chybu ε_1 a $\varepsilon_f = \alpha_1 \varepsilon_1$ a pak aritmetický průměr $m_f^2 = [\varepsilon_f^2] : n = \alpha_1^2 [\varepsilon_1^2] : n$. Protože $[\varepsilon_1^2] : n = m_1^2$, je zase $m_f^2 = \alpha_1^2 m_1^2$.

b) Nechť $f = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots + \alpha_n l_n$, kde $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ jsou nezávisle měřené veličiny a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ konstanty. Označíme ε_i skutečnou chybu veličiny l_i a střední hodnotu chyby ε_i označíme m_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$. Skutečná chyba výrazu f jest

$$\varepsilon_f = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n. \tag{12}$$

Její čtverec jest

$$\varepsilon_f^2 = \alpha_1^2 \varepsilon_1^2 + \alpha_2^2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3^2 \varepsilon_3^2 + \ldots + 2 \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \varepsilon_i \varepsilon_k. \tag{12'}$$

Mysleme si, že opakujeme měření každé z veličin $l_1, l_2, l_3, \ldots$ nekonečněkrát a že vypočteme vždy skutečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, dále ε_f a aritmetický průměr veličin ε_f^2. Podle vzorce (10') $m_f^2 = [\varepsilon_f^2] : n$ vypočetli jsme tak čtverec střední chyby výrazu f.

Dosadíme-li za ε_f^2 ze vzorce (12'), plyne jiný výraz pro m_f^2. Především půjde o členy tvaru $[\alpha_i^2 \varepsilon_i^2] : n$, které jsou podle předchozího rovny $\alpha_i^2 m_i^2$.

Dále jde o aritmetický průměr výrazu $\sum_{i,k} \alpha_i \alpha_k \varepsilon_i \varepsilon_k$. Chyby ε_i, ε_k nabývají při tom nezávisle na sobě všech nekonečně mnoho hodnot.

Předpokládáme, že ke každé kladné chybě ε existuje stejně velká záporná chyba $-\varepsilon$. Všechny možné součiny $\varepsilon_i\varepsilon_k$ dostaneme tak, že zvolíme určité ε_k a dáme probíhati chybě ε_i všechny hodnoty. Součet těchto součinů je $\varepsilon_k \Sigma\varepsilon_i$. Pak zvolíme další ε_k a dáme probíhati ε_i zase všechny hodnoty atd., až vyčerpáme i všechny chyby ε_k. Protože však ke každé chybě ε_i existuje chyba $-\varepsilon_i$, bude $\Sigma\varepsilon_i = 0$, tedy i součet $\sum\limits_{i,k} \alpha_i\alpha_k\varepsilon_i\varepsilon_k$ bude roven 0 a rovněž příslušný aritmetický průměr. Bude tedy celkem

$$m_f^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \alpha_3^2 m_3^2 + \ldots + \alpha_n^2 m_n^2. \quad (12'')$$

c) Nechť $f = f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n)$, kde $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ jsou zase nezávisle měřené veličiny. Jsou-li ε_i skutečné chyby veličin l_i, jest skutečná hodnota funkce f rovna

$f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots, l_n + \varepsilon_n)$ a její skutečná chyba $f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots) - f(l_1, l_2, l_3, \ldots)$. O funkci f předpokládáme, že ji můžeme rozvinouti v řadu Taylorovu podle rostoucích mocnin chyb ε_i, a že při malých hodnotách chyb stačí podržeti členy lineární, že tedy

$$f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots, l_n + \varepsilon_n) \doteq f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial l_n}\varepsilon_n.\text{*)}$$

Parciální derivace jsou vypočteny pro bod $(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n)$. Skutečná chyba funkce f se tedy rovná

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial l_n}\varepsilon_n. \quad (13)$$

Srovnáme-li s případem b), plyne ihned, že čtverec střední chyby funkce f jest

---

*) J. Vojtěch: Základy matematiky, 5. vydání, Praha 1939, I, str. 280—286, 398—401. — K. Petr: Počet diferenciální, Praha 1923, str. 198 a 325.

$$m_f \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)^2 m_3^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2. \tag{13'}$$

Znovu připomínáme předpoklady, za kterých byl odvozen vzorec (12″) (a ovšem i (13′)): Veličiny $l_1, l_2, l_3, \ldots$ jsou veličiny na sobě nezávisle měřené. Funkce četnosti pro chyby každé z těchto veličin jsou sudé funkce.

5. Příklady na výpočet středních chyb. 1. Pro veličinu l jsme naměřili hodnoty $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Je-li střední chyba každé z nich rovna m, jaká je střední chyba m' aritmetického průměru $[l] : n$?

Jsou-li skutečné chyby naměřených hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, je skutečná chyba aritmetického středu $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) : n$. Srovnáním se vzorcem (12) plyne, že v uvažovaném případě je $\alpha_i = 1 : n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tedy ze vzorce (12″) je pro aritmetický střed $m'^2 = m^2 : n$ čili

$$m' = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{14}$$

2. Pro veličinu l jsme vypočetli z jedné řady měření hodnotu l_1 se střední chybou m'_1 a z druhé řady měření hodnotu l_2 se střední chybou m_2. Jaká je střední chyba m_d rozdílu $d = l_1 - l_2$?

Jsou-li ε_1 a ε_2 skutečné chyby hodnot l_1 a l_2, je skutečná chyba rozdílu $l_1 - l_2$ rovna $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Srovnáním se vzorcem (12) plyne $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, tedy ze vzorce (12″) bude

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \tag{15}$$

3. Je-li střední chyba veličiny x rovna m_x, jaká je střední chyba m_f veličiny $f = c \log x$, kde c je konstanta?

Je-li ε skutečná chyba veličiny x, je skutečná chyba veličiny f přibližně rovna $\varepsilon_f \doteq \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon$, kde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{cM}{x}$, ($M \doteq 0{,}43429$ je modul briggických logaritmů). Pak plyne ze vzorce (13′)

$$m'_f = \frac{cM}{x} m_x.$$

4. Střední chyba v určení denního chodu hodin s vteřinovým kyvadlem je $m = \pm 0{,}02^s$. Jaká je střední chyba ve výpočtu jedné periody?

Den je přibližně roven 86 400 dob kyvu (vteřin), t. j. 43 200 period. Je-li skutečná chyba denního chodu ε, je skutečná chyba jedné periody $\frac{\varepsilon}{4{,}32 . 10^4}$ a příslušná střední chyba podle vzorce (11) je $\frac{m}{4{,}32 . 10^4} = \frac{0{,}02^s}{4{,}32 . 10^4} \doteq \frac{4{,}6^s}{10^7}$.

5. V čase t_1 byla určena oprava chronometru o_1 se střední chybou m_1 a v čase $t_2 = t_1 + t$ oprava o_2 se střední chybou m_2. Jaká je střední chyba denního chodu chronometru a střední chyba opravy o, vypočtené interpolací pro čas T?

Denní chod $ch = \frac{o_2 - o_1}{t}$, tedy $m_{ch} = \frac{1}{t}\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$.

Oprava o v čase T je rovna $o = o_1 + ch\,(T - t_1) = = o_1 + \frac{o_2 - o_1}{t}(T - t_1) = o_1 \frac{t_2 - T}{t} + o_2 \frac{T - t_1}{t}$. Odtud plyne, že $m_0 = \frac{1}{t}\sqrt{(t_2 - T)^2 m_1^2 + (T - t_1)^2 m_2^2}$.

6. Dány jsou tyto výsledky astronomického určení rozdílů zeměpisných délek a příslušné pravděpodobné chyby: Cambridge záp. Greenwiche: $4^h\,44^m\,30{,}99^s \pm 0{,}23^s$, Omaha západně Cambridge: $1^h\,39^m\,15{,}04^s \pm 0{,}06^s$, Springfield vých. Omahy: $25^m\,08{,}69^s \pm 0{,}11^s$. Jaký je délkový rozdíl Springfieldu záp. Greenwiche a jeho střední chyba?*)

Hledaný délkový rozdíl je $4^h\,44^m\,30{,}99^s + 1^h\,39^m\,15{,}04^s - - 0^h\,25^m\,08{,}69^s = 5^h\,58^m\,37{,}34^s$.

*) Wright-Hayford: The Adjustment of Observations, New York, 1906, str. 68.

Označíme-li skutečné chyby v uvedených rozdílech zeměpisných délek po řadě $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, bude skutečná chyba rozdílu Springfield záp. Greenwiche rovna $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, tedy příslušná střední chyba $1{,}483 \,.\, \sqrt{0{,}23^2 + 0{,}06^2 + 0{,}11^2} = 1{,}483 \,.\, \sqrt{0{,}0686} = \pm\, 0{,}39^s$, neboť, je-li r pravděpodobná chyba a m střední chyba, je $m = r \,.\, 1{,}483$ [srovn. I, (29)].*)

7. Je-li střední chyba veličin a, b rovna m, jaká je střední chyba veličiny $c = \sqrt{a^2 + b^2}$?

Jsou-li $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ skutečné chyby veličin a, b, c, jest podle vzorce (13) $\varepsilon_c = \frac{\partial c}{\partial a}\varepsilon_a + \frac{\partial c}{\partial b}\varepsilon_b$. Při tom $\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{c}$, $\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c}$. Tedy podle vzorce (13′)

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}m^2 + \frac{b^2}{c^2}m^2} = m.$$

8. Je-li střední chyba veličin a, b rovna m, jaká je střední chyba m_α úhlu α, plynoucího z rovnice $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$? ($m_\alpha = m : \sqrt{a^2 + b^2}$.)

9. Úhly B a C rovinného trojúhelníka ABC byly změřeny se stejnou střední chybou m. Jaká je střední chyba m_b strany b, je-li strana c dána bez chyby?

Ze sinové věty je $b = \frac{c}{\sin C}\sin B$. Jsou-li $\varepsilon_B, \varepsilon_C$ skutečné chyby úhlů B a C, plyne ze vzorce (13), že skutečná chyba ε_b strany b je přibližně rovna

$$\varepsilon_b \doteq \frac{\partial b}{\partial B}\varepsilon_B + \frac{\partial b}{\partial C}\varepsilon_C,$$

kde $\frac{\partial b}{\partial B} = \frac{c}{\sin C}\cos B = b \operatorname{cotg} B$, $\frac{\partial b}{\partial C} = -\, b \operatorname{cotg} C$.

*) Značí: I. kapitola, vzorec (29).

Tedy podle vzorce (13') je $m_b = bm\sqrt{\operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C}$.

10. Úhly A a C trojúhelníka ABC byly změřeny se středními chybami m_A resp. m_C. Jaká je střední chyba m_a strany a, je-li strana b dána bez chyby?

Jde-li o rovinný trojúhelník, je úhel $B = 180^0 - A - C$ a strana $a = \dfrac{b \sin A}{\sin(A + C)}$. Podle vzorce (13) je skutečná chyba strany a rovna $\varepsilon_a = \dfrac{\partial a}{\partial A}\varepsilon_A + \dfrac{\partial a}{\partial C}\varepsilon_C$, kde ε_A, ε_C jsou skutečné chyby úhlů A a C. Při tom je

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{b \cos A}{\sin(A + C)} - \frac{b \sin A}{\sin^2(A + C)} \cos(A + C) =$$

$$= a\,[\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg}(A + C)] \quad \text{a} \quad \frac{\partial a}{\partial C} = -a \operatorname{cotg}(A + C).$$

Tedy podle vzorce (13') je

$$m_a = a\sqrt{m_A{}^2(\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg}(A + C))^2 + m_C{}^2 \operatorname{cotg}^2(A + C)}.$$

6. Váha měřené veličiny. Váha funkce nezávisle měřených veličin. Přesnost měřené veličiny se posuzuje často také podle t. zv. váhy (váha lat. pondus, odtud značka p), která je definována podmínkou, že váhy dvou měřených veličin se mají k sobě jako převrácené hodnoty čtverců středních chyb obou veličin. Značíme-li váhy p_1, p_2 a příslušné střední chyby m_1, m_2, jest

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1{}^2} : \frac{1}{m_2{}^2}.$$

Zvolíme-li za jednotku váhy ($p_0 = 1$) váhu měřené veličiny, jejíž střední chyba je m_0, můžeme psáti

$$p : 1 = \frac{1}{m^2} : \frac{1}{m_0{}^2},$$

čili

$$p = \frac{m_0{}^2}{m^2} \quad (16) \qquad \text{a naopak} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{p}}. \quad (16')$$

To jsou základní vzorce, které umožňují přejíti od střední chyby měřené veličiny k příslušné váze a naopak od váhy ke střední chybě. Za jednotku váhy se volí často váha jednou měřené veličiny. Ale není to tak vždy (srovnej na př. II, odst. 5b). Proč byla veličina $m_0^2 : m^2$ nazvaná vahou, uvidíme později (srovn. II, odst. 3).

Označíme váhy měřených veličin $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ po řadě $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ a váhu veličiny $f = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots + \alpha_n l_n$ písmenem P. Pak můžeme do vzorce (12″), děleného m_0^2, dosaditi váhy, čímž dostaneme vzorec

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \frac{\alpha_3^2}{p_3} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{p_n}. \qquad (17)$$

To je vzorec pro váhu lineární funkce nezávisle měřených veličin.

Je-li $f = f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n)$, užijeme vzorce (13′), z něhož plyne

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 + \frac{1}{p_3}\left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2, \qquad (17')$$

vzorec pro váhu funkce nezávisle měřených veličin l_i.

Předpoklady, za kterých byly odvozeny vzorce (17) a (17′) jsou tytéž, jako v odstavci 4, totiž: Veličiny $l_1, l_2, l_3, \ldots$ jsou na sobě nezávisle měřené. Funkce četnosti pro chyby každé z těchto veličin jsou sudé funkce.

7. Příklady na výpočet váhy. 1. Je-li váha jednoho měření rovna jednotce, jaká je váha aritmetického průměru z n měření?

Z úměry $p : 1 = \frac{1}{m'^2} : \frac{1}{m^2}$ plyne podle vzorce (14), že

$$p = \frac{m^2}{m'^2} = n. \qquad (18)$$

Váha aritmetického průměru z několika měření je rovna počtu měření.

2. Váhy nezávisle měřených úhlů BAC, CAD, DAE jsou po řadě $p_1 = 3$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$. S jakou vahou je určen úhel BAE?*)

Jsou-li skutečné chyby měřených úhlů po řadě $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, je skutečná chyba úhlu BAE rovna $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Označíme-li váhu úhlu BAE písmenem P, bude podle vzorce (17)

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \quad \text{a se zvláštními čísly } P = \frac{3}{5}.$$

3. Váhy nezávisle měřených veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$. S jakou vahou P je určena veličina $X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, jsou-li koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rovny buď $+1$ nebo -1?**)

Podle vzorce (17) jest $\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{p_i}$, a protože

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_n^2 = 1, \quad \text{jest} \quad \frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}. \qquad (19)$$

4. Jsou-li váhy veličin x_1 a x_2 rovny p, **jaká je váha součtu nebo rozdílu obou veličin?**

Podle vzorce (19) je hledaná váha v obou případech $\frac{1}{2}p$.

5. Jsou-li úhly α, β rovinného trojúhelníka změřeny s vahami p_α, p_β, s jakou vahou vypočteme úhel γ ze vzorce $\gamma = 180° - \alpha - \beta$?

($p_\gamma = p_\alpha p_\beta : (p_\alpha + p_\beta)$.)

6. Je-li váha veličiny x rovna p_x, jaká je váha p_f veličiny $f = c \log x$?

Z úměry $p_f : p_x = \frac{1}{m_f^2} : \frac{1}{m_x^2}$ plyne $p_f = p_x \frac{m_x^2}{m_f^2}$. A protože $m_f = m_x \frac{cM}{x}$ (viz odst. 5, př. 3), bude $p_f = p_x \frac{x^2}{c^2 M^2}$.

---

*) Wright-Hayford, l. c. str. 71.
**) Wright-Hayford, l. c. str. 71.

7. Jsou-li váhy veličin a, b rovny p, jaká je váha p_c veličiny $c = \sqrt{a^2 + b^2}$?

($p_c = p$, viz odst. 5, př. 7.)

8. Váhy veličin a, b jsou rovny p; jaká je váha p_α úhlu α, plynoucího ze vzorce $\operatorname{tg} \alpha = b : a$?

($p_\alpha = p\,(a^2 + b^2)$, viz odst. 5, př. 8.)

9. Je-li váha veličiny x rovna p, jaká je váha veličiny $c : x$?

($px^4 : c^2$.)

10. Je-li váha úhlu α rovna p, jaká je váha veličin $\sin \alpha$, $\log \sin \alpha$, $\log \operatorname{cotg} \alpha$?

$$\left(\frac{p}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{p}{M^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}, \quad \frac{p}{M^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\right)$$

8. Normální zákon četnosti. Míra přesnosti. Funkce chyb. Pravděpodobná chyba. Extrémní možná chyba. Nejdůležitější zákon četnosti, kterému se říká normální zákon četnosti, nebo také Gaussův zákon, jest

$$\varphi(\varepsilon) = c e^{-h^2 \varepsilon^2}.$$

Veličiny c a h nejsou nezávislé, protože z rovnice (5) plyne

$$c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} \, d\varepsilon = 1. \tag{20}$$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} \, d\varepsilon$ převedeme na Laplaceův integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$. Bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} \, d\varepsilon = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(h\varepsilon)^2} \, d(h\varepsilon) = \frac{1}{h} \sqrt{\pi}. \tag{21}$$

Ze vzorce (20) plyne pak $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$. Tedy normální zákon četnosti je

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}. \tag{22}$$

Veličina h, která se vyskytuje v normálním zákoně četnosti se jmenuje míra přesnosti. Uvidíme ihned, jaký je smysl tohoto názvu. Vyhledáme si vztahy mezi h a průměrnou nebo střední chybou.

Podle vzorce (10) bude v případě normálního zákona četnosti

$$S_1 = s = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

a protože

$$2\int_0^{\infty} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{h^2} \int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d(-h^2\varepsilon^2) = \frac{1}{h^2},$$

bude

$$S_1 = s = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{23}$$

Podobně podle vzorce (10′) jest

$$S_2 = m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon =$$

$$= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon\, d(e^{-h^2\varepsilon^2}),$$

a protože

$$\int_0^{\infty} \varepsilon\, d(e^{-h^2\varepsilon^2}) = \Big[\varepsilon \,.\, e^{-h^2\varepsilon^2}\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{\sqrt{\pi}}{2h},$$

bude

$$S_2 = m^2 = \frac{1}{2h^2} \text{ a také } m = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \tag{24}$$

Čím menší je průměrná nebo střední chyba pro nějaké měření, tím větší přesnost mu přisuzujeme (viz odst. 3). Definujeme-li **přesnost měření** jako veličinu nepřímo úměrnou průměrné nebo střední chybě, bude pro dvě řady měření poměr přesností roven

$$\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} = h_1 : h_2.$$

V případě normálního zákona četnosti je tedy poměr přesností roven $h_1 : h_2$ a veličina h se proto jmenuje měrou přesnosti měření.

Podobně lze odvoditi i další vzorce pro S_3 a S_4.

$$S_3 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}), \qquad \text{[viz (23)]}$$

a protože

$$\int_0^\infty \varepsilon^2 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}) = \left[\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\right]_0^\infty - 2 \int_0^\infty \varepsilon \, e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h^2},$$

bude

$$S_3 = +\frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}. \tag{25}$$

Konečně

$$S_4 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}),$$

a protože

$$\int_0^\infty \varepsilon^3 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}) = \left[\varepsilon^3 e^{-h^2\varepsilon^2}\right]_0^\infty - 3 \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{3\sqrt{\pi}}{4h^3},$$

bude

$$S_4 = +\frac{3}{4h^4}. \tag{26}$$

Hodnoty S_1, S_2, S_3, S_4 mají tedy splňovati řadu podmínek.

$$S_1^2 = \frac{2}{\pi} S_2, \qquad S_1^3 = \frac{1}{\pi} S_3, \qquad S_1^4 = \frac{4}{3\pi^2} S_4. \tag{27}$$

Pravděpodobnost, že chyba ε je mezi x a $-x$ je v případě normálního zákona četnosti rovna

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2} dt.$$

Zavedeme-li označení $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \Phi(x)$, je pravděpodobnost, že chyba je mezi x a $-x$, rovna $\Phi(hx)$. Funkce $\Phi(x)$ se jmenuje funkce chyb.

Výpočet funkce $\Phi(x)$.

a) Protože $e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$, plyne integrací

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \dots \right\}. \tag{28}$$

Tato řada konverguje pro každé x. Ale pro velká x (na př. pro $x = 5$) konverguje pravá strana s počátku pomalu.

b) Píšeme-li $\int_0^x e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2} y$, bude, derivujeme-li podle x,

$$e^{-x^2} = e^{-x^2} \frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2} y, \quad \text{čili} \quad \frac{dy}{dx} = 1 + 2xy.$$

Funkce y začíná členem lineárním v x. Píšeme

$$y = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 + \dots,$$

dosadíme a srovnáme koeficienty. Jest

$$\alpha + 3\beta x^2 + 5\gamma x^4 + 7\delta x^6 + \ldots =$$
$$= 1 + 2\alpha x^2 + 2\beta x^4 + 2\gamma x^6 + 2\delta x^8 + \ldots,$$

tedy

$$\alpha = 1, \quad \beta = \tfrac{2}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{3}, \quad \delta = \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{3}, \ldots,$$

čili

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x \left\{ 1 + \frac{1}{3}(2x^2) + \frac{1}{3.5}(2x^2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3.5.7}(2x^2)^3 + \ldots \right\}. \tag{29}$$

Tato řada konverguje rovněž pro každé x, ale pro veliká x je k výpočtu rovněž málo vhodná.

c) Asymptotický rozvoj pro funkci $\Phi(x)$.

Integrál $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ lze psáti takto:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integrací per partes plyne z posledního integrálu

$$\int_x^\infty e^{-t^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t^2}{2t} = -\left[\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^\infty - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-x^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}\,\mathrm{d}t^2}{2t^3} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2^2}\frac{e^{-x^2}}{x^3} +$$
$$+ \frac{1\,.\,3}{2^2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t =$$

$$= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1.3}{2^3x^5}\right) - \frac{1.3.5}{2^3}\int\limits_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt =$$

$$= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1.3}{2^3x^5} - \frac{1.3.5}{2^4x^7}\right) + \frac{1.3.5.7}{2^4}\int\limits_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^8}\,dt$$

atd.

Tedy

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\left\{1 - \frac{1}{(2x^2)} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2x^2)^3} + \ldots\right\}. \quad (30)$$

Podržíme-li prvních n členů v závorce, dává nám příslušný výraz hodnotu funkce $\Phi(x)$ s chybou, jejíž absolutní hodnota je menší než absolutní hodnota $(n + 1)$-ho členu násobeného $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}$. *)

Připojujeme tabulku funkce $\Phi(x)$ upravenou z podrobnější tabulky Czuberovy**) tak, že je možno považovat druhé diference Δ^2 za stálé a počítati funkční hodnoty na př. podle vzorce $f(x) \doteq f(a) + \frac{\Delta}{h}\frac{(x-a)}{1!} + \frac{\Delta^2 f(a-h)}{h^2}\frac{(x-a)^2}{2!}$, kde a je tabulková hodnota argumentu nejblíže nižší než hodnota x, h je tabulkový interval, $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$, $\Delta f(a-h) = f(a) - f(a-h)$, $\Delta = \frac{1}{2}[\Delta f(a) + \Delta f(a-h)]$, $\Delta^2 f(a-h) = \Delta f(a) - \Delta f(a-h)$.

Přesnost měření bývá charakterisována také tak zv. pravděpodobnou chybou. Nazývá se tak hodnota $x = r$, pro kterou je pravděpodobnost $\Phi(hr)$ rovna $\frac{1}{2}$. To značí: Je stejně pravděpodobné, že uvažovaná chyba je co do absolutní hodnoty menší než r, jako že je větší než r.

---

*) K. Petr: Počet integrální, Praha, 1915, str. 299.

**) E. Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, 1891, str. 411—413.

Tabulka I. Funkce $\Phi(x)$.

x	0		2		4		6		8	
	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +
0,0	0,0000	226	0,0226	225	0,0451	225	0,0676	225	0,0901	224
0,1	1125	223	1348	221	1569	221	1790	219	2009	218
0,2	2227	216	2443	214	2657	212	2869	210	3079	207
0,3	3286	205	3491	203	3694	199	3893	197	4090	194
0,4	4284	191	4475	187	4662	185	4847	180	5027	178
0,5	5205	174	5379	170	5549	167	5716	163	5879	160
0,6	6039	155	6194	152	6346	148	6494	144	6638	140
0,7	6778	136	6914	133	7047	128	7175	125	7300	121
0,8	7421	117	7538	113	7651	110	7761	106	7867	102
0,9	7969	99	8068	95	8163	91	8254	88	8342	85
1,0	8427	81	8508	78	8586	75	8661	72	8733	69
1,1	8802	66	8868	63	8931	60	8991	57	9048	55
1,2	9103	52	9155	50	9205	47	9252	45	9297	43
1,3	9340	41	9381	38	9419	37	9456	34	9490	33
1,4	9523	31	9554	29	9583	28	9611	26	9637	24
1,5	9661	23	9684	22	9706	20	9726	19	9745	18
1,6	9763	17	9780	16	9796	15	9811	14	9825	13
1,7	9838	12	9850	11	9861	11	9872	10	9882	9
1,8	9891	8	9899	8	9907	8	9915	7	9922	6
1,9	9928	6	9934	5	9939	5	9944	5	9949	4
2,0	9953									

x	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$
2,00	0,9953	+10
05	63	7
10	70	6
15	76	5
20	81	4
25	85	4
30	89	2
35	91	2
40	93	2
45	95	1
50	96	

x	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$
2,50	0,99959	+10
55	69	7
60	76	6
65	82	5
70	87	3
75	90	2
80	92	2
85	94	2
90	96	1
95	97	1
3,00	98	

Z tabulky funkce $\Phi(x)$ je patrno, že hodnota y, pro kterou $\Phi(y) = \frac{1}{2}$, je mezi 0,46 a 0,48. Lineární interpolací vypočteme přibližnou hodnotu 0,477. Pak hledané $y = 0{,}477 + \dot{y}$, a při tom

$$\Phi(0{,}477) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0{,}477}^{0{,}477+\dot{y}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}.$$

Ze vzorce (28), užijeme-li prvních šest členů rozvoje, plyne $\Phi(0{,}477) = 0{,}5000572$ a tedy z předcházející rovnice

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0{,}477}^{0{,}477+\dot{y}} e^{-t^2}\, dt = -0{,}0000572 \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \dot{y} \,.\, e^{-0{,}477^2}.$$

Odtud $\dot{y} \doteq -0{,}000064$, tedy hledané $y \doteq 0{,}476936$ a

$$hr \doteq 0{,}476936.$$

Píšeme-li sem $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$ (vzorec (24)), bude

$$r = m\sqrt{2} \,.\, 0{,}476936 = m \,.\, 0{,}67449$$

a

$$m = r \,.\, 1{,}4826. \tag{31}$$

Podobně plynou vztahy mezi r a s, užijeme-li vzorce (23):

$$r = s\sqrt{\pi} \,.\, 0{,}476936 \doteq s \,.\, 0{,}84535$$

a

$$s = r \,.\, 1{,}1829. \tag{32}$$

Přibližně se píše

$$r \doteq \tfrac{2}{3}m, \qquad m \doteq 1{,}5r. \tag{33}$$

Pravděpodobná chyba je tedy (v případě normálního zákona četnosti) přibližně rovna dvěma třetinám střední chyby.

Extrémní možná chyba. Podle definice funkce Φ je pravděpodobnost, že chyba je v mezích $-km$ a $+km$, rovna $\Phi(hkm)$. Protože pak mezi m a h je vztah $mh = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [srovn. (24)], je hledaná pravděpodobnost rovna $\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$.

Pro $k = 2, 3, 4$ jest $\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ rovno po řadě 0,9545, 0,9973, 0,999937, tedy pravděpodobnost, že absolutní hodnota chyby je větší než $2m, 3m, 4m$ jest rovna

$$1 - 0{,}9545 = \frac{455}{10^4}, \text{ resp. } \frac{27}{10^4}, \text{ resp. } \frac{63}{10^6}.$$

Bylo-li měření opakováno 10krát, je počet chyb, jejichž absolutní hodnota je větší než $2m$, roven 0,455, tedy přibližně $\frac{1}{2}$. Lze tedy při 10 měřeních považovati přibližně $\pm 2m$ za extrémní možnou chybu.

Podobně, bylo-li měření opakováno 200krát, je počet chyb, jejichž absolutní hodnota je větší než $3m$, roven 0,54, lze tedy při 200 měřeních považovat přibližně $\pm 3m$ za extrémní možnou chybu.

Konečně při 800 měřeních lze považovati přibližně $\pm 4m$ za extrémní možnou chybu.