

Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace

Geometrické aproximace

In: Václav A. Hruška (author): Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1940. pp. 38–[59].

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405494>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

4.

GEOMETRICKÉ APROXIMACE.

4,1. Pojem přesné konstrukce. Konstrukce provedené způsobem definovaným v odst. 1,1 a), b) pouze pravítkem a kružítkem považují se za přesné. K takovým konstrukcím jest totiž potřebí pouze konečného počtu přímek a kružnic, které dovedeme přesně nakresliti těmito pomůckami, nehledíme-li k nedokonalosti pomůcek a k chybám vzniklým jejich užíváním (kapit. 3.). Pak jsou také v konstrukci přesně určeny všechny úhly, dále všechny body jako průsečíky přesně nakreslených přímek a kružnic a tedy i všechny délky.

Všechny konstrukce, k jichž provedení bylo třeba nakresliti také jiné křivky, nepovažovaly se dříve za přesné. Takové křivky nebylo totiž možno nakresliti jinak než spojením od ruky konečného počtu bodů, sestrojených pravítkem a kružítkem. Mezi těmito body byl pak průběh křivky určen pouze podmínkou, aby byla spojitá a měla hladký průběh, t. j. aby byla bez „hrbů“. Průsečíky křivek, z nichž aspoň jedna byla sestrojena tímto empirickým způsobem, byly ovšem do jisté míry libovolné, nepřesné.

Novými pomůckami staly se některé z těchto konstrukcí právě tak přesnými, jako konstrukce provedené pouze pravítkem a kružítkem. Na příklad, veškeré úlohy třetího a čtvrtého stupně lze řešiti sestrojením průsečíků kvadratické paraboly jednou pro vždy nakreslené a vhodné kružnice.¹⁾ Parabolografem dovedeme však nakresliti parabolu právě tak přesně jako kružnici kružítkem. Proto i její průsečíky s kružnicí budou docela přesné, nepřihlížíme-li

¹⁾ Viz J. Vojtěch, *Základy matematiky I.* (5. vyd., Praha, 1939), str. 123 a násl.

k nedokonalosti těchto prostředků a k chybám toho druhu, o nichž byla řeč v kapitole 3.

Obecněji lze v tomto smyslu přesně řešiti každou úlohu vedoucí na sestrojení křivek, které dovedeme vhodnými mechanismy přesně nakresliti. Speciálně jsou to veškeré algebraické úlohy, t. j. úlohy, k jichž řešení jsou nutné pouze algebraické křivky, neboť každou algebraickou křivku můžeme nakresliti vhodným kloubovým mechanismem.²⁾ Kružítka se skládá pouze ze dvou tyčí navzájem spojených jedním kloubem a jest tedy vlastně nejjednodušší z řady těchto mechanismů.

Velkého praktického významu však tento poznatek nemá. Kdežto k přesnému řešení veškerých úloh třetího a čtvrtého stupně stačí jediný parabolograf kromě kružítka a pravítka, není tomu tak při přesném řešení úloh stupně vyššího.

Na příklad v obecné rovnici šestého stupně

$$x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0 \quad (1)$$

je 6 konstant, z nichž jedinou dovedeme odstraniti známou lineární transformací

$$y = x + \frac{1}{6}a_1,$$

kterou graficky tedy můžeme provésti užitím pouhého pravítka. Obdržíme tím pro neznámou y rovnici 6. stupně, v níž schází člen s y^5 .

Kdybychom chtěli tuto metodu rozšířiti položením

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 + \alpha_5x^5, \quad (2)$$

obdrželi bychom pro y opět rovnici 6. stupně

²⁾ Dokázal to sir A. B. Kempe, How to draw a straight line (1877). Viz též M. d'Ocagne, Cours de géométrie pure et appliquée de l'École polytechnique (Paris, 1917—18) str. 315.

³⁾ T. zv. Tschirnhausenova transformace. Viz na př. H. Weber, Lehrbuch der Algebra I, str. 199—206 (Brunswick, 1898).

$$y^6 + b_1 y^5 + b_2 y^4 + b_3 y^3 + b_4 y^2 + b_5 y + b_6 = 0, \quad (3)$$

jejíž koeficienty jsou homogenní mnohočleny v koeficientech (1) a (2), a to v argumentech

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \quad (4)$$

b_1 jest lineární, b_2 kvadratický, b_3 kubický atd., b_6 mnohočlen v α stupně šestého. Kdybychom tedy chtěli odstraniti z (3) koeficienty b_1, b_2 , t. j. položit

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad (5)$$

musili bychom řešiti kvadratickou rovnici o neznámých (4), což dovedeme graficky provést pravítkem a kružítkem. Kdybychom však chtěli odstraniti 3 koeficienty b_1, b_2, b_3 z (3), t. j. položit

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad (6)$$

vedlo by to na řešení rovnice stupně $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ o neznámých (4), t. j. téhož stupně jako byla rovnice daná (1) atd.

V rovnici kružnice disponujeme třemi konstantami. Kdybychom tedy chtěli řešiti rovnici (1) určením průsečíků kružnice s jednou provždy nakreslenou kubickou křivkou, musili bychom napřed rovnici (1) podrobiti takové transformaci (2), aby v ní zbyly také jen 3 konstanty jako v rovnici kružnice. Jak jsme však viděli z (6), musili bychom k tomu řešiti napřed graficky rovnici 6. stupně, což je problém, o jehož grafické řešení právě jde. Proto nemůžeme veškeré úlohy 6. stupně graficky řešiti nalezením průsečíků vhodné kružnice s kubickou křivkou jednou provždy nakreslenou.

Bylo by proto nutno kresliti novou kubickou křivku k řešení každé úlohy šestého stupně. Kubické křivky se však také dělí na několik typů podobně jako kuželosečky. K nakreslení kuželoseček různých typů jest však potřebí různých přístrojů a podobně tomu je u křivek kubických. Ačkoliv tedy dovedeme sestrojiti mechanismus pro přesné

řešení každé jednotlivé úlohy šestého stupně, nevystačíme s jedním mechanismem pro veškeré úlohy šestého stupně.

4,2. Definice a příklad geometrické aproximace. (Trisekce úhlu.) Geometrické konstrukce stupně vyššího než čtvrtého a konstrukce, které vedou na rovnice transcendentní, jsou tedy prakticky proveditelné pouze přibližně nakreslením od ruky křivek, jejichž několik bodů bylo sestrojeno pravítkem a kružítkem. Podobně tomu je i u konstrukcí stupně třetího a čtvrtého, nedisponujeme-li parabolografem. Avšak i když jím disponujeme, je někdy jednodušší užití v konstrukci jiné kuželosečky než paraboly, i za cenu řešení nikoliv zcela přesného.

Na příklad rozdělení úhlu ($\sphericalangle GOF = 2\alpha$) (obr. 34) na tři stejné díly (trisekce úhlu) dá se provést podle odst. 1,2 řešením konstrukci přiřazené rovnice

$$\sin 2\alpha = 3 \sin \frac{2\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{2\alpha}{3}, \quad (1)$$

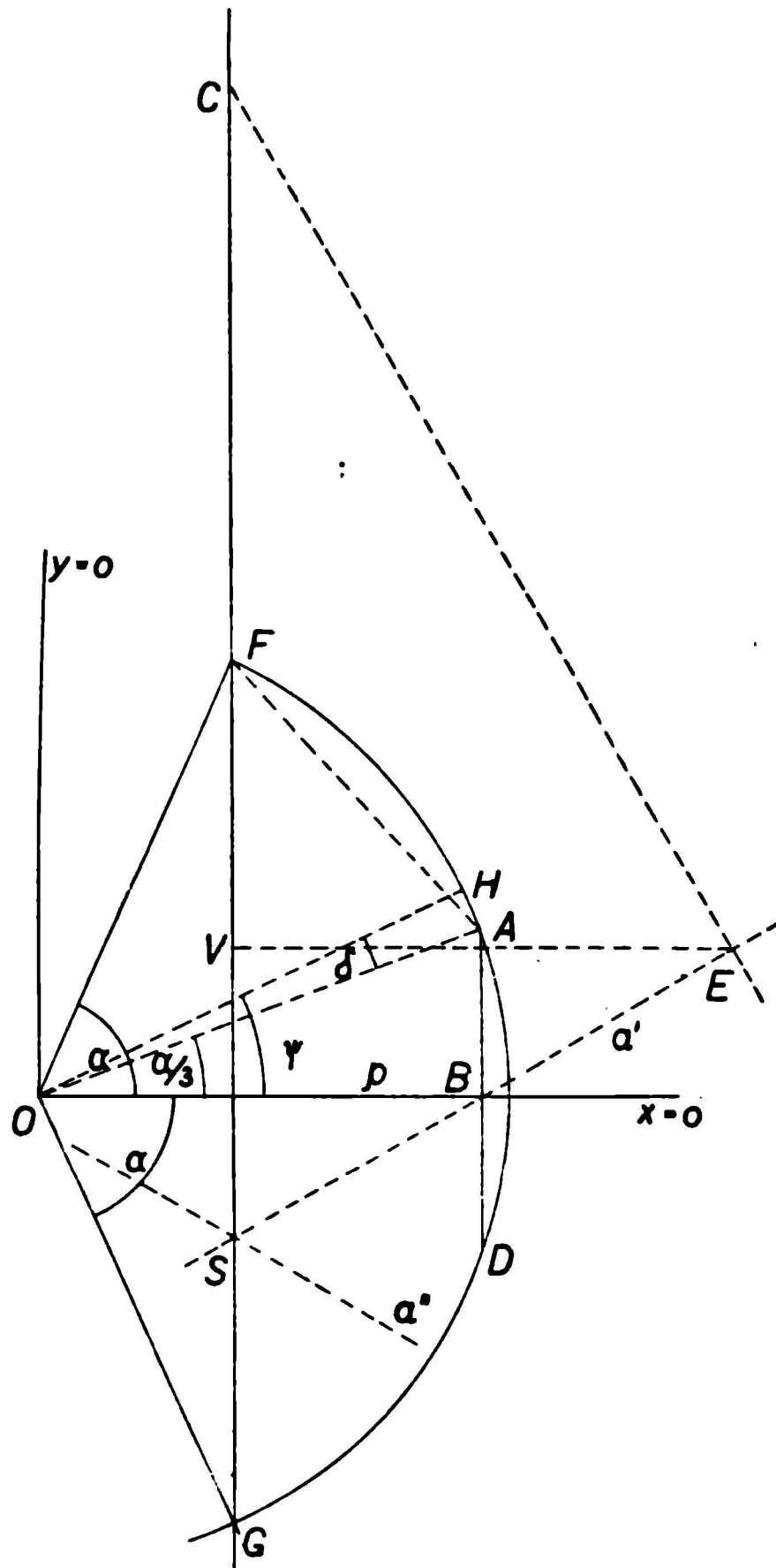
v níž $\sin 2\alpha$ najdeme spuštěním kolmice z F na OG . S výjimkou některých zvláštních úhlů, kubická rovnice (1) pro $x = \sin \frac{2}{3}\alpha$ nemá koře re , který by byl v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$. Kdyby totiž bylo

$$\sin \frac{2}{3}\alpha = \frac{p}{q} \sin 2\alpha, \quad (2)$$

značí-li p, q celá čísla nesoudělná, obdrželi bychom dosazením takového vztahu (2) do (1)

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{q}{2p} \sqrt{\frac{3p - q}{p}}. \quad (3)$$

Pouze pro úhly, jejichž sinus se dá vyjádřit vzorcem (3), má rovnice (1) kořen v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$ a rozpadá se v rovnici lineární a kvadratickou s koeficienty také v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$, kteréžto rovnice tedy dovedeme řešit pravítkem a kružítkem. Jsou to na př. úhly:



Obr. 34. Přibližná trisekce úhlu.

$$p = 2, q = -2, \sin 2\alpha = 1, \quad 2\alpha = 90^\circ,$$

$$p = 1, q = 1, \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad 2\alpha = 45^\circ, \text{ atd.}$$

Zřejmě sinus každého úhlu nelze psát ve tvaru (4).⁴⁾ Pro jiné úhly než (3) nelze rovnici (1) redukovat na lineární a kvadratickou s koeficienty v racionálním poměru k $\sin 2\alpha$. Rozdělení takových úhlů na tři stejné díly je problém třetího stupně, neproveditelný pouhým užitím pravítka a kružítka.⁵⁾

Místo rovnice (1) můžeme ovšem užití obdobně rovnice

$$\cos 2\alpha = 4 \cos^3 \frac{2\alpha}{3} - 3 \cos \frac{2\alpha}{3},$$

o níž platí podobné dedukce jako o (1).

Úlohu však můžeme také řešit touto úvahou: Dělí-li body A, D oblouk $FADG$ kružnice o středu O na tři stejné díly a pŕí-li pŕímka p úhel FOG , pak vzdálenosti AB od p a AF jsou v poměru $1 : 2$. Bod A leží tedy na hyperbole o ohnisku F , řídící pŕímce p a numerické výstřednosti $\varepsilon = 2$. Její reálná osa je na spojnici FG , její vrchol V a střed S dělí tětivu FG na tři stejné díly a její asymptoty a', a'' svírají úhel 120° . Hledaný bod A leží však blízko vrcholu V , v jehož okolí hyperbolu dosti pŕesně nahradíme oskulační kružnicí. Její střed C obdržíme jednoduchou konstrukcí $VE \perp FG, E$

⁴⁾ Na pŕ. pro $2\alpha = 30^\circ$ plynulo by z (9) $p^2 - 3q^2 = \frac{q^3}{p}$, t. j. $\frac{q}{p}$ by muselo býti celé, tedy $p = \pm 1$, jelikož p, q jsou nesoudělná. Stejně však by z $\frac{p^3}{q} = 3pq - q^2$ plynulo, že $\frac{p}{q}$ je celé, tedy i $q = \pm 1$. Pro tyto hodnoty však vzorec (3) nepodává $\sin 30^\circ$.

⁵⁾ Viz blízce o tom v knize Vl. Knichala: Konstrukce pravítkem a kružítkem (Praha. JČMF).

na a' , $EC \perp a'$. Z podobnosti trojúhelníků plyne ostatně $\overline{CV} = \overline{FG}$.⁶⁾

Touto kružnicí obdržíme místo A bod H .⁷⁾ Abychom našli nepřesnost

$$\delta = \psi - \frac{\alpha}{3}$$

naší přibližné konstrukce, vezmě středem O pravoúhlé soustavy souřadnic osy tak, aby $p \equiv x = 0$ a považujme $\overline{OF} = 1$. Oskulační kružnice má pak střed

$$C (\cos \alpha; \frac{1}{3} \sin \alpha),$$

poloměr $\overline{FG} = 2 \sin \alpha$ a tedy rovnici

$$x^2 + y^2 - 2x \cos \alpha - \frac{1}{3} y \sin \alpha + 1 + \frac{4}{9} \sin^2 \alpha = 0. \quad (4)$$

Na ní ležící bod H má souřadnice $(\cos \psi; \sin \psi)$, jichž dosazením do (4) dostaneme

$$\cos \psi \cos \alpha + \frac{1}{3} \sin \psi \sin \alpha = 1 + \frac{2}{9} \sin^2 \alpha,$$

čili

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \left(\sin \psi - \sin \frac{\alpha}{3} \right) \sin \alpha = \\ & = \frac{2}{9} \sin^2 \alpha + 1 - \cos (\alpha - \psi) - \frac{4}{3} \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Z konstrukce však plyne $\alpha - \psi < \frac{2}{3}\alpha$ a tedy $\cos (\alpha - \psi) > \cos (\frac{2}{3}\alpha)$, proto

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\delta &< \frac{\sin^2 \alpha + 9 \sin^2 (\frac{1}{3}\alpha) - 6 \sin (\frac{1}{3}\alpha) \cdot \sin \alpha}{12 \sin \alpha \cdot \cos (\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{3}\alpha)} \approx \\ &\approx \frac{4 \sin^6 (\frac{1}{3}\alpha)}{3 \sin \alpha \cdot \cos (\frac{1}{3}\alpha)}. \end{aligned}$$

⁶⁾ O. Taraba, Příl. Časop. pro pěst. mat. a fys., 1907, str. 76.

⁷⁾ V obr. 34 body A, D nedělí oblouk kružnice na 3 stejné díly. Pro zřetelnost výkladu získáme tím v obrázku δ nadměrně velké.

Tak pro $2\alpha = 60^\circ$ plyne odtud $\delta < 32''$, t. j. pro poloměr menší než 650 mm body A a H se liší o méně než 0,1 mm. Dokonce ještě pro $2\alpha = 90^\circ$, je $\delta < 4' 08''$ a body A, H se liší o méně než 0,1 mm až do poloměru 80 mm. Je-li rozdělití na tři díly úhel $2\alpha > 90^\circ$, napřed od něho třikrát odečtíme takový menší úhel, aby k rozdělení na 3 díly zbyl úhel menší než 60° , pro nějž je konstrukce velmi přesná.*)

Z tohoto příkladu plyne: Sestrojíme-li bod A pomocí hyperboly rýsované pouze od ruky na základě řady přesně sestrojených bodů, nemůžeme se o jeho přesnosti (resp. nepřesnosti) nijak přesvědčiti; dovedeme však určití přesnost přibližné konstrukce provedené pravítkem a kružítkem (a dávající bod H). Takovým přibližným konstrukcím, se známou horní hranicí nepřesnosti, provedeným pouze pravítkem a kružítkem, říkáme geometrické aproximace. Dáváme jim přednost před konstrukcemi, vyžadujícími kreslení křivek od ruky, tedy prakticky také jen přibližnými, avšak s nepřesností neznámou.

4.3. Přibližné konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků. Pro techniky jsou velmi důležité konstrukce pravidelných n -úhelníků vepsaných do kružnice (ozubená kola). Ze střední školy jsou známé přesné konstrukce pro $n = 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12$; atd. V této řadě vynechané $n = 7; 9$ a 11úhelníky nejsou přesně sestrojiti pravítkem a kružítkem. Uvedeme pro ně vhodné geometrické aproximace.

a) Sedmiúhelník. Znázorňujeme-li komplexní čísla body v rovině,⁸⁾ kořeny

$$z_k = \cos \frac{2\pi \cdot k}{7} + i \sin \frac{2\pi \cdot k}{7}, i = +\sqrt{-1}, k = 1, 2 \dots 7, (1)$$

*) Přesnější konstrukci trisekce úhlu pravítkem a kružítkem najde čtenář v článku: F. Vyčichlo: O Kopfově trisekci úhlu, Rozhledy 14, str. 67—70.

⁸⁾ Viz na př. učebnici Bydžovský-Teplý-Vyčichlo, Aritmetika pro V.—VII. tř. stř. škol.

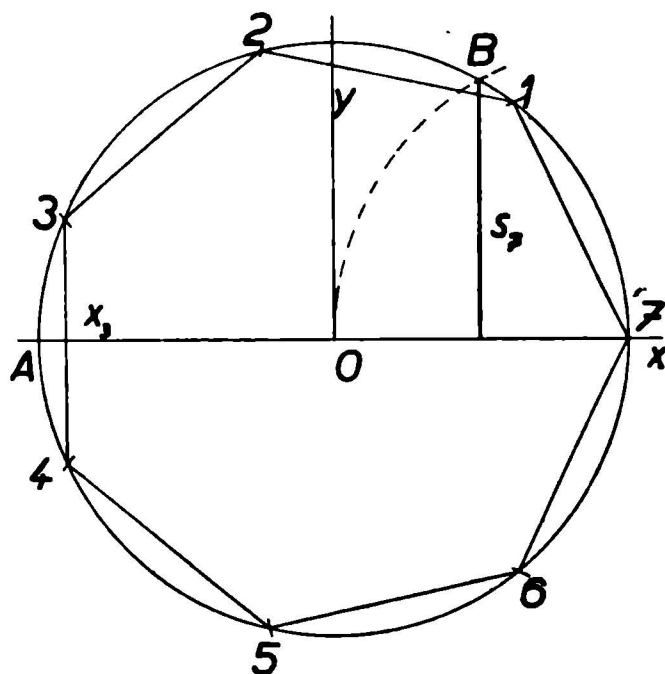
rovnice

$$z^7 - 1 = 0 \quad (2)$$

jsou vrcholy takového pravidelného sedmiúhelníka. Jeden z nich známe

$$z = 1,$$

je to vrchol označený 7 v obr. 35. Ostatních 6 kořenů hová reciproké rovnici



Obr. 35. Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníka vepsaného do kružnice.

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \quad (3)$$

jejíž kořeny jsou po dvou komplexní sdružené.

Substitucí

$$z + \frac{1}{z} = 2x \quad (4)$$

převédeme ji na kubickou

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0. \quad (5)$$

Kořenu z_k je sdružený

$$\cos \frac{2\pi k}{7} - i \sin \frac{2\pi k}{7} = \frac{1}{z_k}$$

Proto

$$x_k = \frac{1}{2} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right) = \cos \frac{2\pi k}{7}$$

jest společnou reálnou částí k -tého kořene a sdruženého $(7 - k)$ -tého kořene. Kořeny rovnice (5) jsou tedy úsečky vrcholů 1; 2 a 3 hledaného sedmiúhelníka 1234567; jsou tedy vesměs reálné.

Rovnice (5) nemá racionálních kořenů. Předpokládejme, že by měla racionální kořen $x = \frac{p}{q}$, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla celá, splňující tedy rovnici

$$p(8p^2 + 4pq - 4q^2) = q^3. \quad (6)$$

Odtud však plyne, že $\frac{q}{p}$ je číslo celé, t. j. $p = \pm 1$ a pak, že

$\frac{2}{q}$ je také číslo celé, t. j. $q = \pm 1$ nebo ± 2 . Žádný z párů těchto čísel však nehoví rovnici (6). Proto ani (5) nemá racionálního kořene a nelze ji rozložit na součin rovnic lineárních nebo rovnice lineární a kvadratické. Konstrukce je třetího stupně a nelze ji provést pouze pravítkem a kružítkem.

Velmi vhodnou aproximací kořene x_1 rovnice (5) jest $\frac{5}{8}$. Značíme-li A bod kružnice protilehlý vrcholu 7, je trojúhelník o vrcholech 7, 1, A pravoúhlý. Z něho plynoucí aproximace strany s_7 sedmiúhelníka

$$s_7^2 \approx \frac{3}{8} \cdot 2; \quad s_7 \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 0,8660 \dots$$

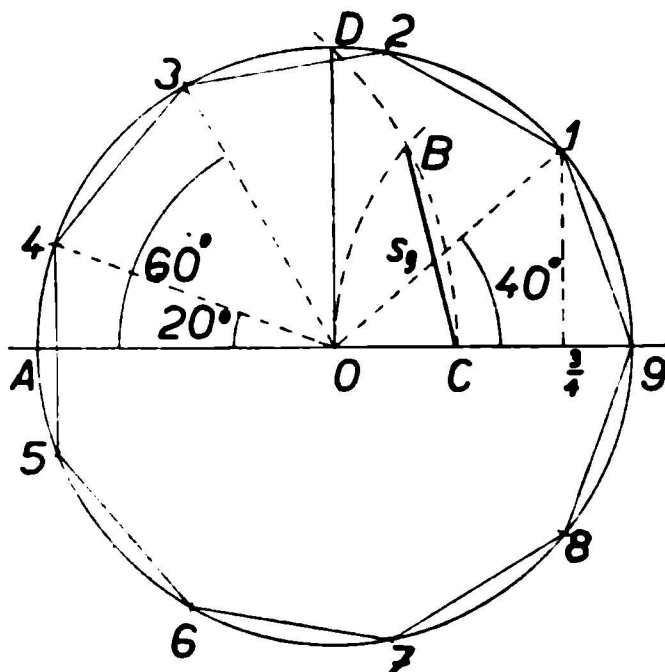
jest výškou rovnostranného trojúhelníka $OB7$ o straně 1. Přesná délka strany je $s_7 = 2 \sin \frac{1}{4}\pi = 0,8677 \dots$,

nepřesnost konstrukce $0,0017 \dots$ nepřesahuje $0,1$ mm do poloměru 60 mm.

Jinou přibližnou konstrukci pravidelného sedmiúhelníka poskytuje aproximace kořene $x_2 = -0,9$ rovnice (5), která vede k hodnotě

$$s_7 \approx 2\sqrt{0,1 \cdot 1,9} \doteq 0,8718.$$

Nepřesnost $-0,0041$ dostupuje $0,1$ mm již při poloměru 25 mm.



Obr. 36. Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníka vepsaného do kružnice.

b) V devítiúhelníku $123 \dots 9$ (obr. 36) vrchol 4 dělí na tři stejné díly úhel $AO3 = 60^\circ$. Přibližnou trisekcí tohoto úhlu, popsanou v odst. 4,2, obdržíme tedy nepřesnost strany asi $2 \text{ arc } 30'' \doteq 0,0003$, t. j. menší než $0,1$ mm do poloměru 330 mm.

Jinou aproximaci poskytuje rovnice

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi,$$

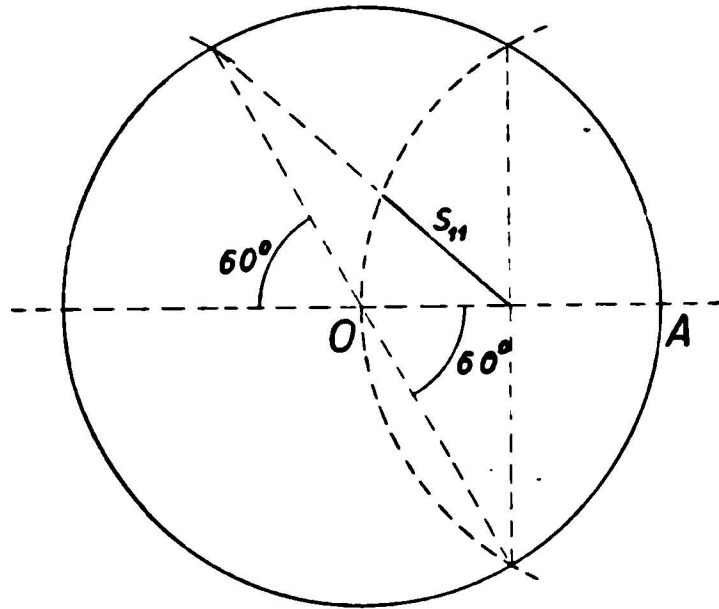
volíme-li $\varphi = 40^\circ$, t. j. $\cos 3\varphi = -0,5$, takže $x = \cos 40^\circ$ jest kořenem kubické rovnice

$$8x^3 - 6x + 1 = 0. \quad (7)$$

Kdyby měla racionální kořen $x = \frac{p}{q}$, nesoudělná čísla celá p, q byhověla rovnici

$$8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0, \quad (8)$$

z níž by jednak plynulo $\frac{q}{p}$ celé, t. j. $p = \pm 1$, jednak $\frac{8}{q}$ celé,



Obr. 37. Přibližná konstrukce pravidelného jedenáctiúhelníka vepsaného do kružnice.

t. j. $q = \pm 1$ nebo ± 2 . Žádný pár těchto čísel však nehoví rovnici (8); proto (7) nemá racionálního kořene. Konstrukce je třetího stupně, neproveditelná jen pravítkem a kružítkem.

Jednoduchou aproximací kořene rovnice (7), t. j. úsečky vrcholu 1 jest $x_1 \doteq \frac{3}{4}$. Odtud plynoucí přibližná délka strany s_9

$$s_9^2 \doteq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \quad s_9 \doteq \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$$

liší se od přesné $s_9 = 2 \cdot \sin 20^\circ = 0,684 \dots$ o $(-0,023)$. Aproximace je špatná. Trochu lepší aproximací je

$$x_1 \approx \frac{1}{2}\sqrt{7}; s_9^2 \doteq \frac{5}{2} \cdot 2, s_9 \doteq \sqrt{\frac{5}{11}} \doteq 0,674$$

o nepřesnosti $+ 0,010$.

Jiná přibližná konstrukce $s_9 = \overline{BC}$ (obr. 36) užívá průsečíku B dvou kružnic, z nichž jedna má střed 9 a jde středem O a druhá má střed A a jde koncovým bodem D poloměru $OD \perp OA$. Obdržíme $s_9 = 0,681 \dots$ Nepřesnost $+ 0,003$ je asi desetkrát horší než konstrukce trisekcí úhlu 60° .

c) Přibližná konstrukce strany pravidelného jedenáctiúhelníka je načrtnuta v obr. 37, k němuž není potřeba výkladu. Obdržíme opět pro kružnici poloměru 1

$$s_{11} \approx 0,5669$$

proti přesné hodnotě

$$s_{11} = 2 \sin \frac{\pi}{11} = 0,5635 \dots$$

Nepřesnost $- 0,0034$ nedosahuje $0,1$ mm až do poloměru 30 mm.

4,4. Přibližná rektifikace oblouku kružnice. Další konstrukcí, často se vyskytující v grafickém počtu a přesně neproveditelnou pouhým pravítkem a kružítkem, jest určení délky nakresleného oblouku kružnice a zvláště určení délky obvodu kružnice. Úloha ta se nazývá rektifikací oblouku kružnice. Obyčejně takový oblouk aproximujeme konečným počtem krátkých tětiv, které kružítkem přeneseme na přímkou. Nepřesnost této aproximace lze však těžko odhadnouti. Proto dáváme přednost níže uvedeným aproximacím.

a) Oblouk \widehat{AB} kružnice o poloměru $\overline{OA} = r$ promítneme z libovolného bodu S průměru SOA na tečnu kružnice v A do úsečky AB' (obr. 38). Leží-li S ve vzdálenosti a od středu O na opačné straně než bod A , pak jest

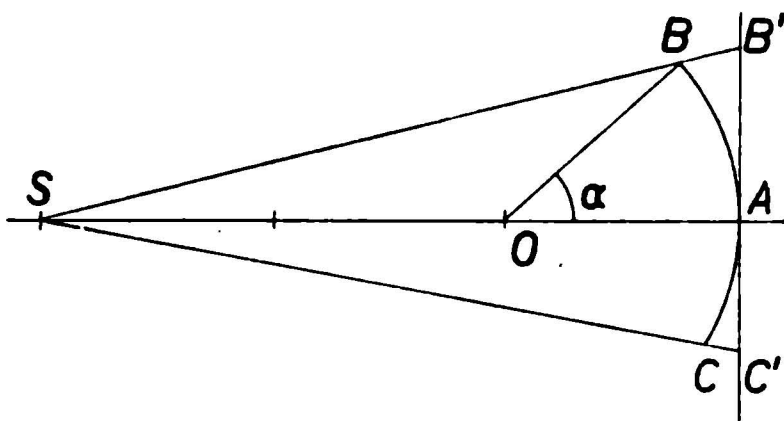
$$\overline{AB'} = (r + a) \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \cos \alpha + a} = \quad (1)$$

$$= r \cdot \left[\alpha + \frac{2r - a}{6(r + a)} \cdot \alpha^3 + \frac{16r^2 - 13ar + a^2}{120(a + r)^2} \cdot \alpha^5 + \dots \right],$$

značí-li v rozvoji $\alpha = \widehat{AB} : r$ obloukovou míru pro $\sphericalangle AOB$.

Skutečně, bod B má v pravoúhlé soustavě souřadnic o počátku O a kladné ose OA souřadnice $(r \cos \alpha; r \sin \alpha)$. Jeho spojnice s bodem $S(-a; 0)$ má tedy rovnici

$$y = \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha + a} (x + a);$$



Obr. 38. Aproximace délky oblouku kružnice.

její průsečík s tečnou $x = r$, sestrojenou k naší kružnici v bodě A , je bod B' o pořadnici $\overline{AB'}$ dané právě středním členem v (1).

Rozvoj (1) odvodíme dosazením známých řad

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots \text{)}$$

do středního členu. Poněvadž záměnou $-\alpha$ za $+\alpha$ výraz

⁹⁾ Viz na př. M. Kössler: Úvod do počtu diferenciálního, (Praha, 1926), str. 138 a j., nebo J. Vojtěch: Základy matematiky ke studiu věd přírod. a tech. 1. díl (5. vyd., Praha, 1939), str. 281.

pro $\overline{AB'}$ mění znamení, schází v rozvoji sudé mocniny α a tedy rozvoj je:

$$\begin{aligned} \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha + a} &= \frac{r\alpha - \frac{r\alpha^3}{3!} + \frac{r\alpha^5}{5!} - \dots}{r + a - \frac{r\alpha^2}{2!} + \frac{r\alpha^4}{4!} - \dots} = \\ &= A_1\alpha + A_3\alpha^3 + A_5\alpha^5 + \dots \end{aligned}$$

Odstraníme-li v poslední rovnici jmenovatele, uspořádáme-li součín podle mocnin α a přirovnáme-li jejich koeficienty ke koeficientům stejným mocnin α v čitateli, dostaneme pro A_1, A_3, A_5, \dots řadu lineárních rovnic, z nichž plynou právě hodnoty uvedené v posledním členu v (1).

Volíme-li $a = 2r$, aproximace $\overline{AB'}$ oblouku $\widehat{AB} = r \cdot \alpha$ je pro malé úhly zvláště dobrá, neboť rozdíl

$$\overline{AB'} - \widehat{AB} = \overline{AB'} - r \cdot \alpha = -\frac{r \cdot \alpha^5}{180} + \dots \quad (2)$$

začíná pak až pátou mocninou α . Relativní nepřesnost konstrukce

$$\rho(\alpha) = \frac{\overline{AB'} - \widehat{AB}}{\widehat{AB}} = \frac{3 \cdot \sin \alpha}{\alpha (2 + \cos \alpha)} - 1 \quad (3)$$

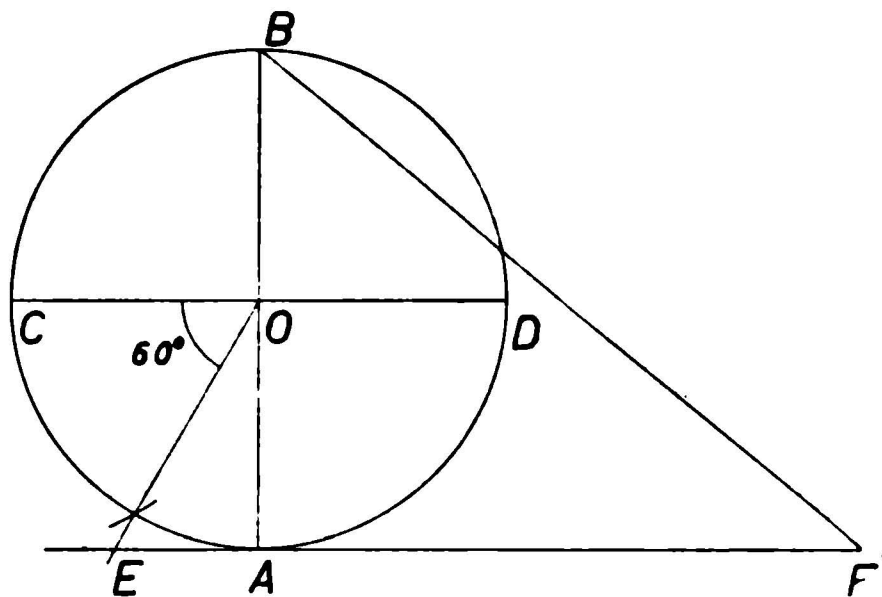
sestavme si v tabulku:

α	10°	20°	30°	40°	50°
arc α	0,17453	0,34907	0,52360	0,69813	0,87266
$-\rho(\alpha)$	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0034

Až do $\alpha = 30^\circ$ jest aproximace velmi dobrá, poskytujíc oblouky kružnic až do poloměru $r = 250$ mm s absolutní

nepřesností menší než 0,1 mm. Delší oblouky až do $\alpha = 60^\circ$ rektifikujeme nejvýše s dvojnásobnou nepřesností na tečnu kružnice vedenou zhruba uprostřed oblouku (na př. $\widehat{CB} \approx \approx C'B'$ v obr. 38). Ještě delší oblouky rozdělíme napřed v několik oblouků vhodně kratších, z nichž každý rektifikujeme zvlášť.

b) Použijeme-li této konstrukce na rektifikaci oblouku kružnice příslušného k středovému úhlu 30° , obdržíme



Obr. 39. Kochaňského aproximace délky půlkružnice.

dobrou aproximaci $\frac{1}{2}$ obvodu kružnice. Mnohem lepší aproximaci dostaneme však konstrukcí Kochaňského (obr. 39), známou ze střední školy.

Sestrojíme k sobě kolmé průměry AB a CD a vedme k ní tečnu v bodě A . Od poloměru OC nanesme $\sphericalangle COE = 60^\circ$, takže $\overline{AE} = r \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = r : \sqrt{3}$. Od bodu E nanesme na tečnu $\overline{EF} = 3r$ tak, aby A byl mezi E a F . Pak polovina obvodu kružnice rovná se přibližně

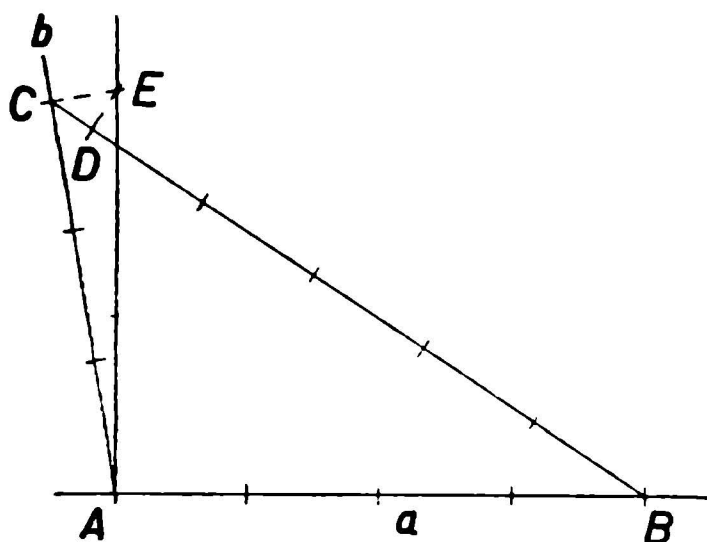
$$\overline{BF} = r \cdot \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \doteq 3,14153r.$$

Nepřesnost konstrukce $0,00006r$ dosahuje 0,1 mm teprve

při poloměru 1,7 m, tedy prakticky nikdy nepřichází v úvahu.¹⁰⁾

c) Obou těchto konstrukcí užíváme také výhodně k přibližnému vepsání pravidelných n -úhelníků do kružnice. Na příklad $\frac{2}{13}\overline{BF}$ v obr. 39 jest délka oblouku kružnice, jehož tětivou je přibližně strana pravidelného třináctiúhelníka, vepsaného do kružnice. Koncové body tohoto oblouku najdeme obrácením konstrukce v obr. 38.

4,5. Příklady jiných aproximací. Někdy je výhodné geometricky aproximovati i konstrukce druhého stupně.



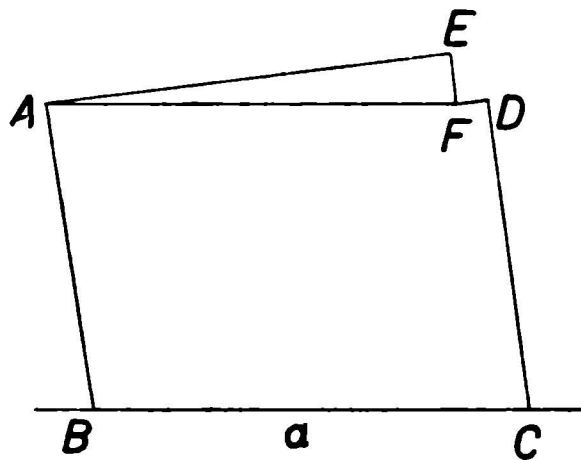
Obr. 40. Aproximace konstrukce kolmice vztyčené v bodě A k přímce a .

Na příklad najítí patu kolmice spuštěné z bodu A na velmi vzdálenou přímku a nelze dosti přesně provésti obvyklým způsobem pravoúhlým kreslicím trojúhelníkem nebo kružítkem. Pravý úhel trojúhelníků není nikdy tak dokonalý, abypata dlouhé kolmice jím sestavené se nelišila podstatně od správné polohy. Rovněž příliš dlouhé

kružítko, nebo obyčejné kružítko prodloužené nástavci, deformuje se snadno tak značně, že výsledek bývá velmi nejistý. Uveďme vyhovující aproximace dvou základních konstrukcí tohoto druhu.

¹⁰⁾ Jest veliké množství přibližných konstrukcí délky obvodu kružnice a s tím souvisejících přibližných konstrukcí čtverce, který by měl s kružnicí stejný obsah (*quadratura circuli*). Viz na př. H. E. Timmerding, *Zeichnerische Geometrie* (Leipzig, 1928) a Th. Wahlen, cit. v kapit. 2., pozn. ¹⁾. Tamtéž viz důkaz nemožnosti přesného provedení obou těchto konstrukcí pouze pravítkem a kružítkem.

a) V bodě A přímky a vztýčiti k ní kolmici (obr. 40). Pravoúhlým kreslicím trojúhelníkem vztyčme v A přibližnou „kolmici“ k a . Od A nanese na ni třikrát libovolnou délku d do C a na a tutéž délku čtyřikrát do B . Kdyby obě přímky byly navzájem skutečně kolmé, bylo by $\overline{BC} = 5d$ (racionální pravoúhlý trojúhelník). Následkem nesprávného pravého úhlu však $\overline{BC} \neq 5d$. Nanese proto na tuto spojnic $\overline{BD} = 5d$ a otočme úsečku \overline{BD} kolem B a úsečku \overline{AC} kolem A tak, až body C a D navzájem splynou v bodě E na správné kolmici. Krátké obloučky kružnic \widehat{CE} a \widehat{DE} nahradíme ovšem dosti přesně kolmicemi, sestrojenými pravoúhlým kreslicím trojúhelníkem. Přesvědčíme se znovu racionálním pravoúhlým trojúhelníkem, je-li \overline{AE} správnou kolmicí, t. j. je-li $\overline{AE} = 5d$; není-li, opakování konstrukce dá již vyhovující výsledek.



Obr. 41. Přibližné sestrojení rovnoběžky k přímce a bodem A .

b) Bodem A vésti rovnoběžku s přímkou a (obr. 41). Bodem A vedeme libovolnou přímku AB a najdeme její průsečík B s a . Na a zvolíme libovolný další bod C a vedeme jím přímku CD , přibližně rovnoběžnou s AB . Nanese na ni $\overline{CD} = \overline{BA}$. Bodem A vedeme ještě přímku AE přibližně rovnoběžnou s a a nanese na ni $\overline{AE} = \overline{BC}$. Není-li $AB \parallel CD$ a $AE \parallel a$, jest $D \neq E$. Otočíme-li \overline{AE} kolem A a \overline{CD} kolem C , až jejich koncové body D, E splynou v bodě F , jest $AF \parallel a$. Krátké obloučky kružnic \widehat{EF} a \widehat{DF} nahradíme opět dosti přesně kolmicemi. Přesvědčíme se, je-li již $\overline{AF} = \overline{BC}$ a $\overline{BA} = \overline{CF}$, v dovolených hranicích nepřes-

nosti. Není-li, opakováním konstrukce obdržíme výsledek prakticky správný.

Volíme-li AB a CD přibližně kolmé k a , vidíme z obr. 41, že rovnoběžka AF se prakticky neliší od spojnice AD . Stačí tedy sestrojiti dvě přibližné kolmice AB a CD k a , třeba kreslicím trojúhelníkem o nikoliv docela správném pravém úhlu, a nanést na ně stejné délky $\overline{BA} = \overline{CD}$. Spojnice AD je již velmi dobrou rovnoběžkou s a .

c) Z bodu A spustíme kolmici na přímku a tím způsobem, že podle obr. 40 v A vztyčíme kolmici k přímce $b \parallel a$, kterou jsme sestrojili bodem A podle obr. 41.

d) Tyto geometrické aproximace se liší od předešlých v tom, že u nich zpravidla nevyšetřujeme horní hranici nepřesnosti.

4,6. Empirické křivky. V grafickém počtu se užívá často křivek daných nebo, lépe řečeno, aproximovaných pouze svým obrazem na nákresně, jejichž výtvarný zákon však neznáme. Takové křivky nazýváme empirické křivky.

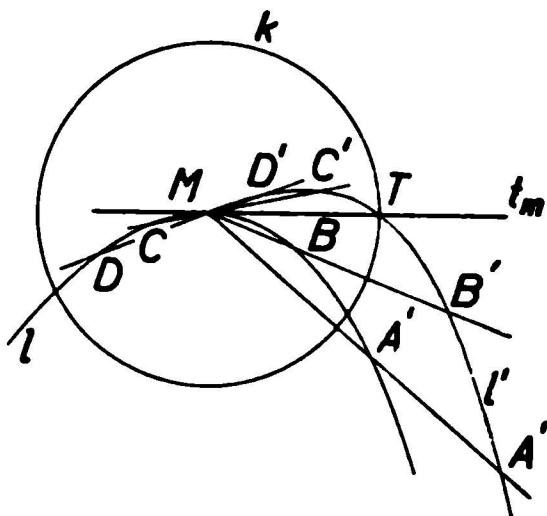
b) Abychom sestrojili tečnu empirické křivky l v bodě M (obr. 42), vedme jí svazek paprsků, jejichž druhé průsečíky s l označme A, B, C, D, \dots . Od nich nanesme na tyto paprsky vhodnou stálou délku

$$a = \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \dots$$

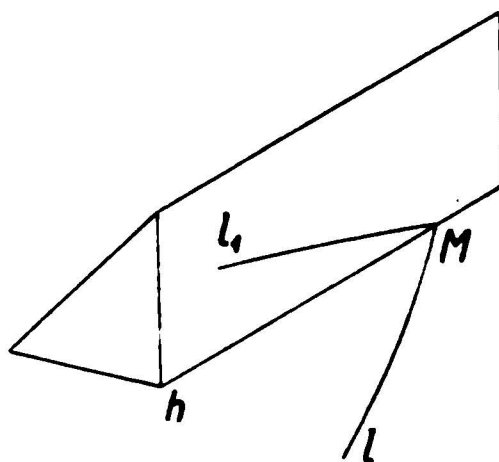
a opišme kružnici k poloměrem a kolem středu M . Body A', B', C', D', \dots spojme křivkou l' a označme T její průsečík s kružnicí k . Z konstrukce plyne, že spojnice $MT \equiv t_M$ jest oním paprskem svazku, jehož druhý průsečík s l padá také do M . Jest to tedy tečna křivky l v bodě M .

Uvedená konstrukce je značně pracná. Pohodlnější je sestrojiti napřed normálu křivky l v M zrcátkem, jehož rovina je kolmá k nákresně, načež tečna křivky je kolmicí k normále. Takové zrcátko nejlépe realizujeme vyleštěnou stěnou pláště kovového trojbokého hranolu, jehož rovinný řez, kolmý k pobočným hranám, je pravoúhlým trojúhelníkem (obr. 43). Položme jej na nákresnu tak, aby zrcadlící

stěna byla kolmá k nákresně a aby hrana h při pravém úhlu procházela bodem M křivky l . Není-li hrana h normálou křivky, svírá křivka l úhel se svým obrazem l_1 v zrcátku, křivka vypadá v M zlomená. Otáčíme-li hranou h okolo bodu M až hrot při M zmizí, uvedeme ji do polohy kolmé ke

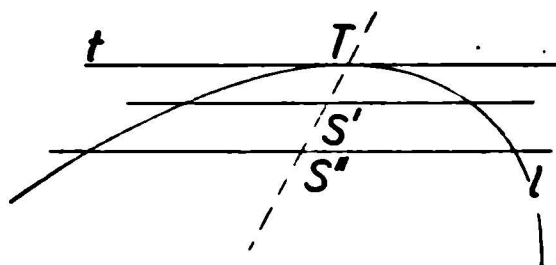


Obr. 42. Tečna empirické křivky l v bodě M .



Obr. 43. Kovový trojboký hranol na sestrojení normál křivek.

křivce. Podél hrany h nakreslená přímka jest pak normálou křivky l v M . Při dostatečném cviku jest tato metoda značně přesná, vyžaduje však hranolu (pomůcky značně nákladné).

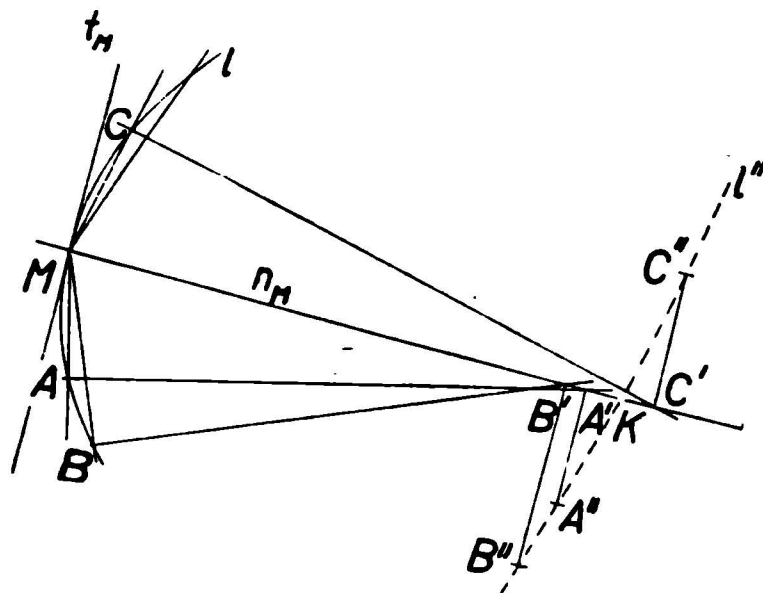


Obr. 44. Sestrojení bodu dotyku T tečny t empirické křivky.

b) V čtých konstrukcích bývá úkolem sestrojiti tečny empirické křivky v několika bodech libovolně na ní zvolených. Místo konstrukce hranolem nebo obtížné konstrukce podle obr. 42 sestrojme raději zkusmo (geometrický experiment ve smyslu odst. 1,1) několik tečen křivky

a hledejme naopak jejich body dotyku (obr. 44). V okolí neznámého dotykového bodu T nakreslené tečny t , aproximujme danou křivku kvadratickou parabolou. Bodem T prochází průměr paraboly, který spojuje středy S' a S'' tětiv rovnoběžných s t .

c) Jinou úlohou bývá sestrojiti oskulační kružnici empirické křivky l v M (obr. 45). Sestrojme normálu n_M



Obr. 45. Přibližná konstrukce oskulační kružnice v bodě M empirické křivky l .

křivky v M . Veďme jí dále svazek paprsků. V jejich druhých průsečících A, B, C, \dots s l vztyčme k těmto paprskům kolmice. Jejich průsečíky s n_M označme resp. A', B', C', \dots . Vztyčme v těchto bodech kolmice k normále n_M a nanesme na ně resp. délky tětiv, které na paprscích svazku vytíná křivka. Tak na př. $\overline{B'B''} = \overline{MB}$. Při tom tětivy ležící po jedné straně bodu M nanášejíme na tutéž stranu od normály n_M , kdežto tětivy, ležící po opačné straně bodu M , nanášejíme na opačnou stranu od n_M . Body A'', B'', C'', \dots , které takto dostaneme, spojíme křivkou l'' . Kružnice sestrojená nad průměrem MA' dotýká se křivky l v M a v jeho okolí jí protíná ještě v A . Podobně je tomu s ostatními kružnicemi nad průměry MB' atd. Je-li K průsečík l'' s n_M ,

kružnice nad průměrem MK dotýká se l v M a další její průsečík s l v okolí M splývá s M . Jest to tedy přibližně oskulační kružnice křivky l v M .

d) Z povahy věci plyne, že nedovedeme najít hranici nepřesnosti těchto aproximací, poněvadž neznáme výtvarný zákon křivky.
