[dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole

35. ročník Matematické olympiády

In: Vladimír Repáš (editor); Anna Pribišová (editor); Juraj Vantuch (editor): [dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole. (4.-7. ročník). (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 64–77.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405306

35. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

6. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1985/1986

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Svatopluk dal každému ze svých synů 4 hůlky s délkami 6 dm, 5 dm, 8 dm, 4 dm a řekl jim: „Každou ze čtyř hůlek můžete nejvýše jednou přeříznout. Udělejte to tak, abyste řezáním získali hůlky požadovaných délek.

1. Ty, nejstarší synu, přines hůlky s délkami 2 dm, 2 dm, 3 dm, 4 dm, 4 dm, 4 dm, 5 dm.
2. Ty, prostřední, přines hůlky s délkami 1 dm, 2 dm, 2 dm, 3 dm, 4 dm, 5 dm, 6 dm.
3. Ty, nejmladší, přines hůlky s délkami 1 dm, 1 dm, 1 dm, 2 dm, 3 dm, 3 dm, 4 dm, 4 dm, 4 dm.

Mohl každý syn splnit úkol? Najděte všechna řešení.

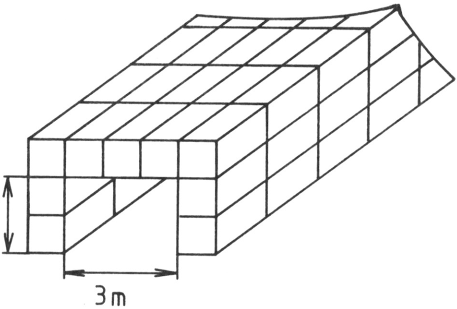
MOZ 4 - I - 2

Hanka a Míša si hráli na obchod. Jejich platidly byly kuličky a kostky. Dohodli se, že kulička bude mít hodnotu 3 Kčs a kostka 5 Kčs. Jak mohla zaplatit Hanka, jestliže si chtěla koupit:

a) knížku v hodnotě 13 Kčs,
b) panenku v hodnotě 49 Kčs?
(Uveďte vždy všechny možnosti.)

MOZ 4 - I - 3

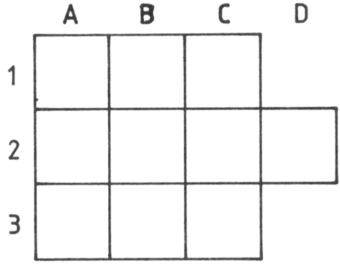
Liliputáni obdivovali velký kamenný tunel, který postavil Gulliver z kamenů tvaru kvádru s rozměry 1 m × 1 m × 2 m. Část tohoto 500 m dlouhého tunelu se šířkou 3 m a výškou 2 m je nakreslena na obrázku 53 (výška a šířka jsou vyznačeny). Gulliver chce postavit nový, stejně dlouhý tunel, ale takový, aby měl výšku 4 m a šířku 6 m (tloušťka stěn má zůstat nezměněná). Kolik takových kvádrů s rozměry 1 m × 1 m × 2 m si musí na stavbu připravit?



Obr. 53

MOZ 4 - I - 4

Vyplňte matematickou křížovku (obr. 54):
1. řádek: číslo, které po dělení 10 dává zbytek 3,
2. řádek: číslo, které je násobkem 3,
3. řádek: dvojnásobek 1. řádku.
Sloupec A: číslo, které je násobkem čísla 229.
Sloupec B: nejmenší trojciferné číslo, které je dělitelné 3 beze zbytku.
Sloupec C: číslo, jehož střední číslice je součtem krajních číslic v jeho zápise.
Sloupec D: počet trpaslíků, přátel Sněhurky.



Obr. 54

MOZ 4 - I - 5

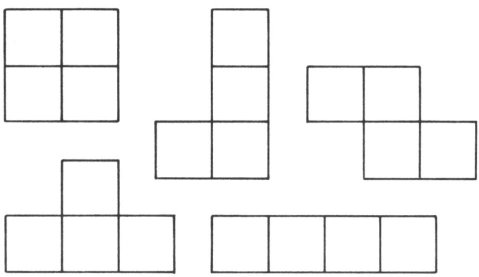
Utvořte největší sedmiciferné číslo z číslic 0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, které má všechny tyto vlastnosti:

a) každou z daných číslic použijete právě jednou,
b) číslo je menší než 8 000 000,
c) číslo není dělitelné deseti.

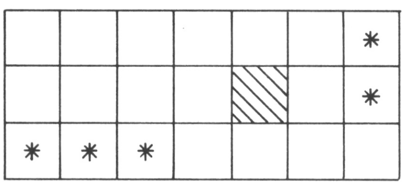
MOZ 4 - I - 6

Na obrázku 55a je nakresleno pět mnohoúhelníků. Naskládejte je do krabičky, jejíž dno je nakresleno na obrázku 55b, tak aby bylo splněno:

a) každý z pěti mnohoúhelníků zakryje právě jednu hvězdičku,
b) mnohoúhelníky pokryjete celé dno krabičky kromě vyšrafovaného čtverečku.



a)



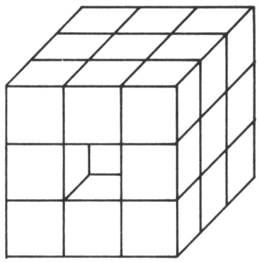
Obr. 55 b)

MOZ 4 - II - 1

Utvoř z číslic 0, 2, 5, 7, 8, 9 nejmenší možné sudé šesticiferné číslo. Každou z daných číslic použij právě jednou.

MOZ 4 - II - 2

Saša měl 100 kusů samolepek tvaru čtverce se stranou délky 3 cm. Má děravou krychli (znázorněnou na obr. 56), která je složena z 24 shodných krychlí s délkou hrany 3 cm. Kolik samolepek mu zůstalo, jestliže jimi polepil stěny této děravé krychle (i zevnitř)?



Obr. 56

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Najděte nejmenší přirozené číslo s těmito vlastnostmi:
a) Po dělení číslem 51 dává zbytek 33.
b) Po dělení číslem 54 dává zbytek 0.

MOZ 5 - I - 2

Matematická křížovka (obr. 57). Do každého čtverečku vepište některou z číslic 0, 1, ..., 9. V řádcích a sloupcích jsou zapsána trojciferná čísla.

Vodorovně. V řádku:

a – polovina čísla jako ve sloupci 1, napsaná odzadu,
b – číslo, které při dělení deseti dává zbytek 0,
c – číslo, které je rozdílem největšího a nejmenšího trojciferného čísla.

Svisle. Ve sloupci:

1 – jestliže by bylo číslo o 400 větší, mělo by všechny číslice stejné,
2 – třetí číslice tohoto čísla se rovná součtu prvních dvou číslic,
3 – tajenka.

	1	2	3
a			
b			
c			

Obr. 57

MOZ 5 - I - 3

V době krádeže bylo v hotelu 96 lidí, z nichž 61 je mimo podezření. Ze 47 zaměstnanců, kteří byli tehdy v hotelu, je 23 mimo podezření. Kolik hostů není mimo podezření?

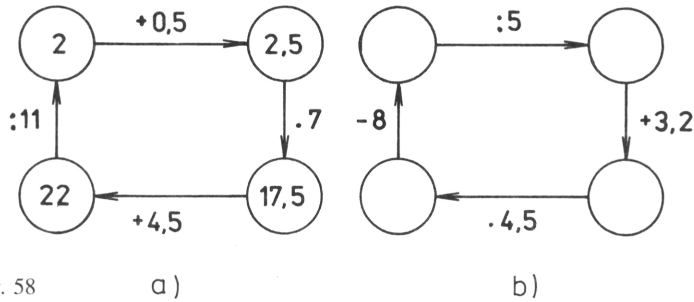
MOZ 5 - I - 4

Dosaďte za jednotlivá písmena číslice tak, aby platil naznačený součet. Za různá písmena dosaďte různé číslice, za stejná písmena stejné číslice ($A = Á$).

$$\begin{array}{cccc}
 & & & J \\
 & & J & Á \\
 & J & A & N \\
J & A & N & O \\
\hline
4 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

MOZ 5 - I - 5

V kroužcích na obrázku 58a jsou čísla, která odpovídají naznačeným početním výkonům (např. $2+0,5=2,5$; $2,5\cdot 7=17,5$). Také do kroužků na obrázku 58b vepište taková čísla, aby odpovídala uvedeným početním výkonům.



Obr. 58

MOZ 5 - I - 6

Z města A do města B je 36 km. Z města A vyrazili současně cyklista rychlostí 12 km/h a osobní auto Š 100. Jakou rychlostí jel řidič Š 100, když se ve městě B zdržel nákupy 50 minut a při cestě nazpátek potkal cyklistu v polovině vzdálenosti mezi městy A, B? (Uvažujte, že cyklista i auto jeli stálou rychlostí.)

MOZ 5 - II - 1

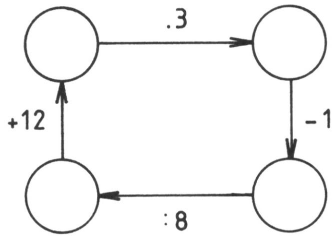
Myslím si číslo. Kdybych je vydělil číslem 72, dostal bych zbytek 50. Kdybych je vydělil číslem 74, dostal bych zbytek 0. Je to nejmenší číslo z těch, která mají tyto vlastnosti. Najdi číslo, které si myslím.

MOZ 5 - II - 2

Ve třídě je 35 žáků. Odebírají časopisy Kamarád a ABC. ABC neodebírá 20 žáků a Kamaráda neodebírá 15 žáků ve třídě. Aspoň jeden z těchto časopisů odebírá 30 žáků třídy. Kolik žáků ze třídy odebírá oba časopisy?

MOZ 5 - II - 3

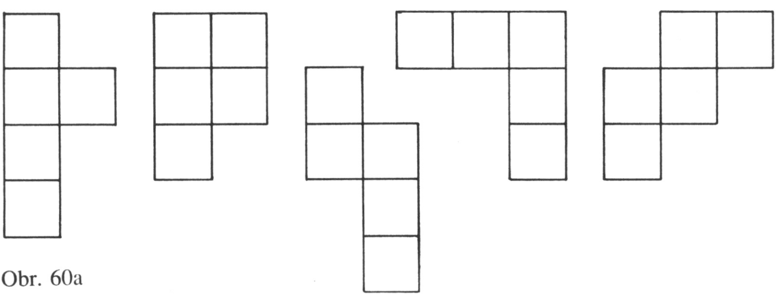
Do kroužků na obrázku 59 napište celá čísla tak, aby odpovídala uvedeným početním výkonům.



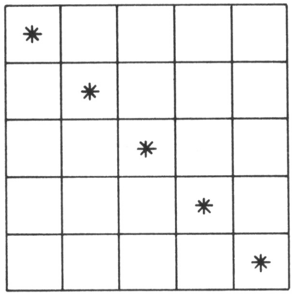
Obr. 59

MOZ 5 - II - 4

Na obrázku 60a vidíte pět útvarů. Pokryjte jimi čtverec s 5×5 čtverečky (obr. 60b), tak aby každý útvar pokryl jednu hvězdičku.



Obr. 60a



Obr. 60b

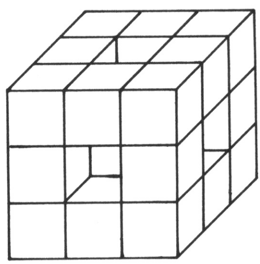
Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Je dán rovnoběžník *ABCD*: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 60°$. Rozdělte daný rovnoběžník na 6 shodných trojúhelníků. Shodnost trojúhelníků dokažte.

MOZ 6 - I - 2

David měl 100 kusů samolepek tvaru čtverce s délkou strany 3 cm. Kolik samolepek mu zůstalo, jestliže jimi polepil (i uvnitř) stěny tělesa „děravá krychle" znázorněného na obrázku 61? Těleso se skládá z 20 shodných krychlí s délkou hrany 3 cm.

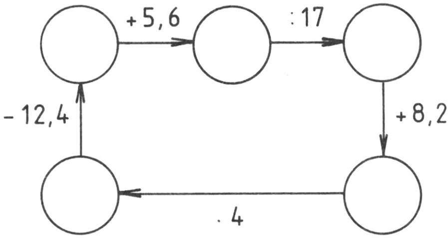


Obr. 61

MOZ 6 - I - 3

Do kroužků na obrázku 62 vepište čísla tak, aby odpovídala naznačeným početním výkonům.

Nerozumíte-li zadání, podívejte se na úlohu MOZ 5 - I - 5 na str. 69.



Obr. 62

MOZ 6 - I - 4

Název města se zapisuje pěti písmeny. Když každé písmeno nahradíme pořadovým číslem abecedy bez háčků ($A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$, …, nezapomeňte na CH, …, $Z = 25$), dostaneme čísla, která mají tyto vlastnosti: Součet všech pěti čísel se rovná $\frac{1}{4}$ z 256. Třetí číslo je větší než všechna ostatní, a to o 10 větší než druhé, o 5 větší než první, o 2 větší než čtvrté a o 19 větší než páté. Jak se jmenuje město?

MOZ 6 - I - 5

Karel má telefonní číslo *abcd,* Vladimír má telefonní číslo *mnopq*. Tato čísla jsou zajímavá tím, že dohromady obsahují všechny číslice od 1 do 9, a to každou číslici právě jednou, přičemž součin těchto dvou čísel je největší možný. Zjistěte, jaká telefonní čísla mají Karel a Vladimír.

MOZ 6 - I - 6

Určete složení, pořadí a bodové hodnocení prvních tří dvojčlenných hlídek v branných závodech podle těchto údajů:

Jožka získal o 10 bodů víc než Dušan, Dušan o 20 víc než Petr, Ruda získal o 5 bodů méně než druhý člen jeho hlídky. Emil ztratil na každém stanovišti o 5 bodů více než druhý člen jeho hlídky. Karel ztratil na dvou stanovištích po 5 bodech a na zbývajících pěti stanovištích po 10 bodech, zatímco jeho partner získal na všech stanovištích plný počet bodů. Úspěšnější závodníci z těchto tří hlídek získali celkem 380 bodů. Hlídka, která se umístila na druhém místě, získala 220 bodů.

MOZ 6 - II - 1

Název města se píše čtyřmi písmeny. Jestliže se každé písmeno nahradí pořadovým číslem abecedy: A B C D E F G H CH I J K L M N O P R S T U V X Y Z, získaná 4 čísla budou mít tyto vlastnosti:

1. První číslo se rovná jedné osmině čtvrtého čísla.
2. Třetí číslo je o 13 větší než první, o 3 menší než druhé a o 1 menší než čtvrté.

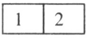
Jaký je název města?

MOZ 6 - II - 2

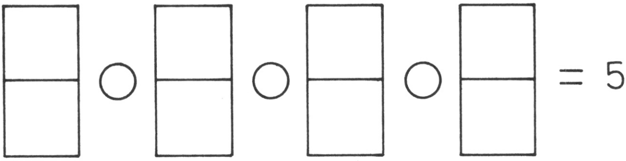
Je dán pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 8 cm a odvěsnou délky 4 cm. Zjistěte, zda ze šesti takovýchto nepřekrývajících se trojúhelníků se dá složit rovnoběžník, jehož jeden vnitřní úhel je 30°. Najděte všechny možnosti.

MOZ 6 - II - 3

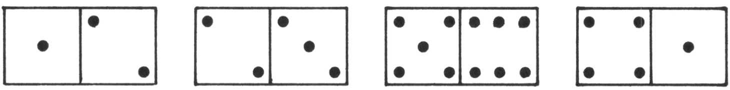
Dominové kostky můžeme chápat jako zápisy zlomků. Přitom jedna kostka může vyjadřovat dva zlomky, např. dominová kostka

 podle toho, jak ji postavíme, vyjadřuje zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{1}$. Do kroužků v obrázku 63 vepište znaménka plus nebo minus a na místa prázdných dominových kostek umístěte dominové kostky z obrázku 64 tak, aby se výsledek rovnal 5.

Obr. 63



Obr. 64



MOZ 6 - II - 4

Myslím si čtyřciferné číslo. Vím, že:

1. Jeho ciferný součet je setina z čísla, které dostaneme zaokrouhlením myšleného čísla na sta.
2. Jeho poslední číslice je o 1 větší než předposlední číslice.
3. Součet jeho posledních dvou číslic se rovná jeho druhé číslici.

Které je to číslo?

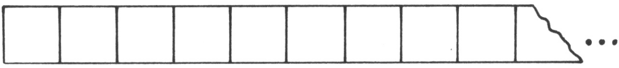
Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Námořník o vánocích roku 1985 vzpomínal, že při poslední plavbě kolem Evropy vyplul se svou lodí z Leningradu za krásného slunečného rána první pondělí v měsíci. První pondělí po první neděli ve stejném měsíci se už koupal v Kodani. Poslední sobotu před poslední nedělí v dalším měsíci si prohlížel Atény. Do Oděsy připlul poslední sobotu téhož měsíce. Určete den, měsíc a rok začátku a konce cesty. Příhoda není starší než 7 roků.

MOZ 7 - I - 2

Pás je složen z 1 985 čtverců (obr. 65). V každém čtverci je jedna číslice. Dvojice sousedních čísel tvoří dvojciferné číslo, které je násobkem čísla 17 nebo 23. Určete první čislici, jestliže poslední číslice je 7.

Obr. 65 

MOZ 7 - I - 3

Narýsujte trojúhelník ABC se stranami $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm. Uvnitř trojúhelníku ABC sestrojte bod D tak, aby trojúhelníky ABD, BCD a ACD měly stejný obsah.

MOZ 7 - I - 4

Libovolně zvolíme 8 po sobě jdoucích přirozených čísel. Zjistěte, kolik může být mezi nimi:

a) nejvíce prvočísel,

b) nejméně prvočísel.

Uveďte příklady.

MOZ 7 - I - 5

Věžní hodiny odbíjejí malým zvonem každou čtvrthodinu:

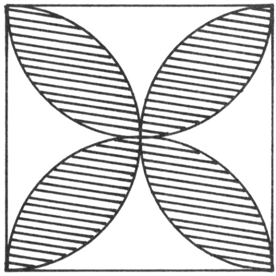
1. čtvrthodinu ... 1 úder
2. čtvrthodinu ... 2 údery
3. čtvrthodinu ... 3 údery
4. čtvrthodinu ... 4 údery

a velkým zvonem každou celou hodinu příslušný počet úderů (1, 2, ..., 12 úderů).

Zjistěte nejkratší dobu, za kterou můžeme slyšet 1 000 úderů.

MOZ 7 - I - 6

Narýsujte čtyřlístek (obr. 66) a vypočítejte jeho obsah. Délka strany čtverce je 6 cm.



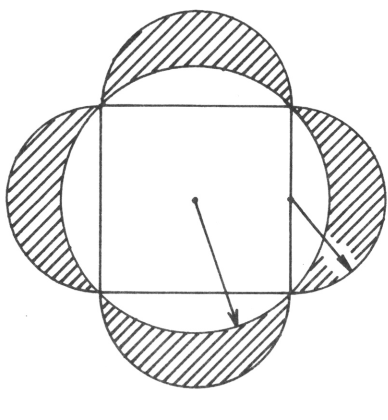
Obr. 66

MOZ 7 - II - 1

V krabici je 666 hracích kostek. Jirka je postupně vybírá a pokládá na stůl. První kostku položí tak, aby jednička byla nahoře, potom položí dvě kostky s dvojkami nahoře, dále tři kostky s trojkami nahoře atd. až šest kostek s šestkami nahoře. Potom všechno zopakuje, tj. opět položí jednu kostku tak, aby jednička byla nahoře atd. …, až se krabice vyprázdní. Vypočítejte součet teček na horních stěnách kostek.

MOZ 7 - II - 2

Čtverec *ABCD* má strany délky 6 cm. Co je větší? Obsah čtverce *ABCD*, nebo součet obsahů čtyř měsíčků? (Obr. 67.)



Obr. 67

MOZ 7 - II - 3

Určete prvních devět a posledních devět číslic podílu:

$$\underbrace{3000000\ldots\ldots000007}_{99\text{ nul}} : 37$$

Určete i zbytek.

MOZ 7 - II - 4

Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a uvnitř něj zvolte bod X. Sestrojte k bodu X body souměrně sdružené podle přímek AB, AC, BC a označte je K, L, M. Vyznačte průnik trojúhelníků ABC a KLM. Zjistěte, zda tímto průnikem může být trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník atd. Měňte tvar trojúhelníku i polohu bodu X. Narýsujte.